



普通高等教育“十二五”规划教材·应用型本科系列

线性代数

主编 杨永发 张志海 徐 勇



科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材·应用型本科系列

线 性 代 数

主 编	杨永发	张志海	徐 勇
副主编	李茂林	李景和	马秀娟
	苏国忠	樊 军	白 云

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书是为适应高等学校理工科和经济类专业的教学需要而编写的教材,内容包括:线性方程组与矩阵、方阵的行列式、矩阵与向量的运算、向量组与向量空间、矩阵的特征值与特征向量、二次型、Matlab 软件在线性代数中的应用. 每节内穿插有例题、练习题,每章末附有习题. 书末附录包括用逆序法定义行列式的值及习题参考解答.

本书注意理论和实际相结合,选材适当,体系新颖,论述严谨,条理清楚,对概念的解释透彻并具有一定的可读性,便于教学和学生自学.

本书可作为高等学校理工类与经济类本、专科“线性代数”课程的教材用书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/杨永发, 张志海, 徐勇主编. —北京: 科学出版社, 2012

普通高等教育“十二五”规划教材·应用型本科系列

ISBN 978-7-03-033814-3

I. ①线… II. ①杨… ②张… ③徐… III. ①线性代数—高等学校—教材
IV. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012) 第 041532 号

责任编辑: 相 凌 唐保军 / 责任校对: 郭瑞芝

责任印制: 张克忠 / 封面设计: 华路天然工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

北京市农林印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2012 年 3 月第 一 版 开本: 787 × 1092 1/16

2012 年 3 月第一次印刷 印张: 14

字数: 320 000

定价: 26.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

河北省独立学院教材编委会

主 任：展 永 胡华强

副主任：于天池 王锡朝 卢辉斌 刘更谦 杜彦良
杨继清 郝书珍 郭 健 徐建民 谭 静

编 委（以姓氏笔画为序）：

于天池	于新凯	马 岱	王自华	王锡朝
卢辉斌	刘更谦	张建华	杜彦良	展 永
杨永发	杨继清	郝书珍	胡华强	姜剑云
郭 健	柴 欣	徐玉民	徐建民	梁泽林
崔树军	盖建新	翟广运	谭 静	

总 序

独立学院作为高等教育创新的产物,经过十余年的快速发展,已经取得了令人瞩目的成绩,为高等教育大众化和深化高等教育改革发挥了重要作用.同时,也应看到独立学院在办学定位、培养目标、培养过程等诸多方面与公办一般本科院校存在着“同质化”倾向.

根据教育部关于独立学院培养适应地方、区域经济和社会发展需要的“本科应用型高级专门人才”指示精神,河北省独立学院进行了长期的调研和研究,从社会需求入手,对办学定位、培养目标、培养规格进行论证,明确了各自的人才培养目标,完成了人才培养的顶层设计,为推进教育教学改革奠定了基础;并定期召开独立学院专题研讨会,共同交流和探讨教育教学研究与改革问题.

2010年7月在河北工业大学城市学院召开了“河北省独立学院教材建设研讨会”,会议达成了“以校际间合作课题组的形式,合力打造‘应用型本科’系列教材”的共识.由河北省独立学院教材编委会组织编写、科学出版社出版的“应用型本科系列”教材终于陆续正式出版,这既是河北省独立学院优化课程内容和课程体系的研究成果,也是推动教师改革教学方法,改变“同质化”教学状况,培养基础扎实,专业能力较强,适应社会发展需求的高素质应用型人才的一项基础性工作.

本系列教材的主参编人员由独立学院教学经验丰富、治学严谨、教学效果好的优秀教师组成;他们来自不同的学校,以课题组研究的形式和高度的社会责任感,发挥各自的教学专长,分工协作,研究和讨论编写作大纲、体例和书稿.

正式出版的教材是经部分独立学院试用并根据教学效果修改书稿后出版的.教材是体现教学内容和教学要求的知识载体,是保障和提高教学质量的重要基础.以教材建设为抓手,改革和完善人才培养方案,优化课程体系,整合课程内容,稳步推进和深化教育教学改革,是保证独立学院健康持续发展,办出特色,培养高素质“应用型”本科人才的重要手段.因此,我们将继续加强校际间合作,根据独立学院的专业特点和培养规格,深入研究,不断完善,努力编写出在国内有影响、特色鲜明的应用型本科系列教材.

河北省独立学院教材编委会

2011年8月

前 言

对理工科大学学生来说,“线性代数”是一门十分重要的数学基础理论课.一方面,在培养学生严谨的逻辑思维方法方面,它有着其他课程不可替代的重要作用;另一方面,这门课程所包含的数学概念和基础知识,也为理工科各专业的后续课程提供了必备的数学基础.编写本书,主要是为了满足高等学校理工科和经济类专业的教学需要,为“线性代数”课程提供一本内容完整、体系设计新颖、易读好用、努力反映课程教学改革成果的新教材.

本书以一种较新的方式组织课程内容,主要考虑了以下几点:一是便于学生阅读,内容组织方式易于被学生接受;二是便于教师组织教学;三是尽量争取内容前后呼应,结构联系紧密.全书以线性代数方程组和矩阵为两条主线,全部内容围绕线性方程组和矩阵展开,矩阵初等变换是贯穿全书的基本方法.

本书以线性方程组为切入点,由线性方程组及高斯消元法引进矩阵及其初等变换的概念;第2章在行列式性质的证明中,强调了矩阵初等变换的作用,这使得矩阵及其初等变换背景清晰,加强了矩阵和行列式的联系;向量线性相关性,是读者较难理解的概念,本书中加了一个直观性较强的引例,同时将矩阵秩的性质较多地用在了线性相关性问题的讨论中,降低了理解上的难度;将向量的内积运算与矩阵乘法放在了一起,以期引起读者对二者关联性的注意;将向量空间改放在第4章,一方面利用了向量空间基与维数与向量组最大无关组和秩的相似性,叙述上简略一些,另一方面也便于叙述线性方程组解的理论,突出了向量空间的实用性.以上考虑,较少见于国内同类教材.

每一章的最后,都给出了一个与内容有联系的阅读材料,以增加本书的可读性,也希望读者能够对线性代数的问题感兴趣.一些定理的证明和一些拓展性的内容,书中用小字排列,初学者可以略去,不影响对其他内容的理解.

一些与线性代数有关的实际问题,必须借助于计算机才能求出解答,为了满足读者利用计算机软件解线性代数问题的需求,本书第7章给出了Matlab软件在线性代数中的应用.为便于读者掌握课程的基本内容,在每节中穿插有若干练习题,作为基本训练之用.每章末附有习题,书后附有习题的参考答案或简要解答,供读者参考.本书包含的内容,可以满足48学时的教学需要,删掉一些定理的证明和第7章,也可在36学时内完成主要部分的教学.本书初稿在河北工业大学及其他部分学校经过5届以上的学生使用,反映较好.

本书共7章.第1章由张志海编写;第2章由樊军编写;第3章由徐勇、李茂林编写;第4章由马秀娟编写;第5章、第6章由李景和编写;第7章由苏国忠编写.白云为全书选配了习题,并做了解答.阅读材料及附录A由杨永发编写,全书最后由杨永发定稿.

河北工业大学理学院院长、博士生导师刘国欣教授审阅了全书,对本书的出版给予了极大的支持.科学出版社对本书的出版倾注了大量心血,作者在此一并致以深深的谢意.

另外,也感谢参考文献中所列的诸位作者,本书作者从他们的著作中得到许多有益的启示,并采纳了若干优秀的例题、习题及阅读材料,所有这些都极大地丰富了本书的内容.

由于作者的水平所限,书中难免有考虑不周之处,所以,热忱地希望使用本书的教师和同学予以指正,以便再版时订正.

杨永发

2011年8月于天津

目 录

前言

第 1 章 线性方程组与矩阵	1
1.1 线性方程组	1
1.1.1 线性方程组的概念	1
1.1.2 非齐次线性方程组的解法	2
1.1.3 齐次线性方程组的解法	4
1.2 矩阵与向量	6
1.2.1 矩阵与向量的概念	6
1.2.2 矩阵的初等变换	12
1.3 阅读材料 经济数学中的线性模型	19
1.3.1 价格平衡模型	19
1.3.2 投入产出模型	21
习题 1	23
第 2 章 方阵的行列式	25
2.1 n 阶行列式的定义	25
2.2 n 阶行列式的性质	29
2.2.1 代数余子式展开性质	29
2.2.2 初等变换性质	33
2.3 行列式的计算举例	36
2.4 行列式的应用	45
2.4.1 矩阵的秩	45
2.4.2 克拉默法则	48
2.5 阅读材料 行列式的历史与发展	50
习题 2	51
第 3 章 矩阵与向量的运算	53
3.1 矩阵与向量的线性运算	53
3.1.1 矩阵的加法和数乘	53
3.1.2 向量的加法和数乘	55
3.2 矩阵的乘法	57
3.2.1 矩阵乘法的定义	57
3.2.2 矩阵乘法的性质	60
3.2.3 方阵的幂与方阵的多项式	63
3.3 向量的内积与向量的正交性	65
3.3.1 向量的内积	65
3.3.2 向量的正交性与正交矩阵	66

3.4	逆矩阵	67
3.4.1	逆矩阵的概念	67
3.4.2	初等变换求逆矩阵	71
3.4.3	利用逆矩阵求解矩阵方程	76
3.5	矩阵的分块	78
3.5.1	分块矩阵及其运算法则	78
3.5.2	一些特殊的分块方法	81
3.6	阅读材料 矩阵乘法的两个应用	85
3.6.1	矩阵乘法在计算机图形学中的一个应用	85
3.6.2	赌徒输光问题	86
	习题 3	89
第 4 章	向量组与向量空间	93
4.1	向量组的线性相关性	93
4.1.1	引例	93
4.1.2	向量组的线性相关性	94
4.2	向量组的秩	102
4.2.1	向量组的相互线性表示	102
4.2.2	向量组的最大线性无关向量组与向量组的秩	105
4.2.3	矩阵的行秩与列秩, 向量组秩的求法	106
4.3	向量空间	111
4.3.1	向量空间和子空间	111
4.3.2	向量空间的基与维数	113
4.4	线性方程组解的结构	114
4.4.1	齐次线性方程组	114
4.4.2	非齐次线性方程组	119
4.5	阅读材料 线性方程组的应用	122
4.5.1	化学反应方程式的平衡	122
4.5.2	网络流的管理	123
	习题 4	124
第 5 章	矩阵的特征值与特征向量	127
5.1	特征值和特征向量	127
5.2	相似矩阵与矩阵的对角化	134
5.2.1	相似矩阵的概念	134
5.2.2	矩阵的对角化	135
5.3	施密特正交化方法与实对称矩阵的对角化	138
5.3.1	施密特正交化方法	138
5.3.2	实对称矩阵对角化	140
5.4	阅读材料 矩阵对角化的两则应用	146
5.4.1	人口迁移问题	146

5.4.2 线性微分方程组求解	148
习题 5	149
第 6 章 二次型	151
6.1 二次型及其矩阵表示	151
6.2 二次型化为标准形	154
6.2.1 正交变换法	154
6.2.2 初等变换法和配方法	156
6.2.3 惯性定理	160
6.3 正定二次型与正定矩阵	162
6.4 阅读材料 主成分分析法	167
习题 6	169
第 7 章 Matlab 软件在线性代数中的应用	171
7.1 Matlab 软件基本介绍	171
7.1.1 Matlab 的安装和启动	171
7.1.2 命令窗口与文本编辑窗口的使用	171
7.1.3 数组	171
7.1.4 循环语句介绍	172
7.2 用 Matlab 求解线性代数中的问题	172
7.2.1 行列式的计算	172
7.2.2 矩阵的基本运算	173
7.2.3 矩阵的初等变换及矩阵的秩	176
7.2.4 求解线性方程组	177
7.2.5 求矩阵的特征值和特征向量	179
7.2.6 将实对称矩阵的对角化	180
7.2.7 二次型的简化与正定化	180
附录 A 用逆序法定义行列式的值	182
附录 B 习题参考解答	187
参考文献	210

第 1 章 线性方程组与矩阵

线性方程组是各个方程关于未知量均为一次的方程组. 对线性方程组的研究, 是线性代数的一个重要内容, 也是科学计算中最常遇到的问题. 例如, 在应力分析、分子结构、电路分析和测量学中都会遇到线性代数方程组的求解问题. 在数学问题的数值计算方法中, 大量的问题, 如最小二乘法、三次样条函数插值、微分方程边值问题的有限元法、差分法等, 也都涉及线性方程组的求解.

在线性代数中, 线性方程组的求解和矩阵及矩阵初等变换的理论密切相关. 本章首先给出求解线性方程组的一个重要方法——高斯消元法, 然后引进矩阵和矩阵初等变换的概念, 并利用矩阵初等变换的方法讨论线性方程组的求解.

1.1 线性方程组

1.1.1 线性方程组的概念

n 个自变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的线性方程通常表示为

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b,$$

其中系数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 和 b 为已知实数或复数, b 称为常数项, n 为任意正整数. m 个方程构成的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1.1.1)$$

称为一个线性代数方程组, 其中, a_{ij} 表示第 i 个方程中第 j 个自变量 x_j 的系数, $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n, b_i$ 为第 i 个方程的常数项.

当常数项 $b_1, b_2, \dots, b_m$ 全为零时, 方程组 (1.1.1) 中所有项均为一次项, 方程组变为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (1.1.2)$$

式 (1.1.2) 称为方程组 (1.1.1) 对应的齐次线性方程组, 相应的式 (1.1.1) 称为非齐次线性方程组.

例 1.1.1 3 个自变量的线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + 7x_3 = -5 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -4 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

是一个非齐次线性方程组, 这个方程组对应的齐次线性方程组为

$$\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

定义 1.1.1 (方程组的解) 当将方程组中的未知量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 用一组常数 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 代替时, 若方程组两边的值相等, 则称 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 是方程组的一组解.

当方程组 (1.1.1) 有解时, 称方程组是相容的, 否则称方程组不相容.

对给定的一个线性方程组, 它的解可能①有唯一解; ②有无穷解; ③无解. 对于 3 个未知量, 3 个方程的情形, 每个方程表示一个平面. 当方程组有唯一解时, 表示 3 个平面有唯一的交点; 方程组有无穷多解时, 表示 3 个平面重合或交于一条直线; 方程组无解时, 则表示 3 个平面没有共同的交点.

线性方程组的所有解构成的集合, 称为方程组的解集. 如果两个线性方程组有相同的解集, 称这两个方程组是等价方程组, 或称同解方程组.

求解线性方程组的方法, 是利用同解变换的方法, 将线性方程组化为相对较简单的同解方程组, 逐步简化以得出线性方程组的解.

1.1.2 非齐次线性方程组的解法

设线性方程组 (1.1.1) 是相容的, 下面介绍解线性方程组的基本方法 —— 高斯消元法.

例 1.1.2 求解线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + 7x_3 = -5 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -4 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

解 将第一个方程与第二个方程对调位置, 使对调后的第一个方程中 x_1 的系数为 1, 得到

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -4 \\ 3x_1 - 7x_2 + 7x_3 = -5 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases} \quad (1.1.3)$$

为了消去第二、三个方程中的 x_1 项, 将第一个方程的两边乘以 -3 加到第二个方程上, 两边乘以 -4 加到第三个方程上, 得

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -4 \\ 2x_2 - 5x_3 = 7 \\ 6x_2 - 14x_3 = 20 \end{cases} \quad (1.1.4)$$

消去式 (1.1.4) 中第三个方程的 x_2 项, 为此, 将第二个方程两端乘以 -3 后加到第三个方程上, 得

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -4 \\ 2x_2 - 5x_3 = 7 \\ x_3 = -1 \end{cases} \quad (1.1.5)$$

可以看到, 式 (1.1.3)~式 (1.1.5) 都是同解方程组, 但式 (1.1.5) 的求解却要容易得多, 形如式 (1.1.5) 的方程组称为梯形方程组 (echelon form linear system).

由方程组 (1.1.5) 逐步回代, 可以顺次解出

$$x_3 = -1, \quad x_2 = 1, \quad x_1 = 3. \quad (1.1.6)$$

上述解题过程中, 对线性方程组施行的变换称为对线性方程组的初等变换 (elementary operation). 归纳起来, 对线性方程组施行的初等变换共有三种:

- I. 交换任意两个方程的位置, 第 i 个方程和第 j 个方程相交换, 记作 $L_i \leftrightarrow L_j$;
- II. 以非零常数 λ 乘以某一个方程的两边, 第 i 个方程两端乘以常数 λ , 记作 λL_i ;
- III. 以常数 k 乘以第 j 个方程后加到第 i 个方程上, 记作 $L_i + kL_j$.

这三种类型的初等变换均不改变线性方程组的解.

利用方程组的初等变换将方程组化为梯形方程组的过程称为消元过程, 由梯形方程组回代得出方程组的解的过程称为回代过程, 消元过程和回代过程合称为高斯消元法.

当线性方程组的解不唯一时, 可以用线性方程组的通解表示线性方程组的全部解. 所谓通解, 就是可以表示线性方程组的全部解的一个表示式, 通解中一般包含若干个任意常数 $t_1, t_2, \dots, t_s$. 方程组的任一个解, 都对应于 $t_1, t_2, \dots, t_s$ 的一组值, 反过来, $t_1, t_2, \dots, t_s$ 的任一组值, 都对应于方程组的一个解.

求线性方程组的通解, 可以用相似的方法.

例 1.1.3 求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 6x_4 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 12x_4 = 2 \end{cases} \quad (1.1.7)$$

解 对方程组作初等变换 $L_2 + (-2)L_1$, $L_3 + (-4)L_1$, 消去第二、三个方程中的未知量 x_1 , 得

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -1 \\ -2x_2 + 6x_3 - 4x_4 = -2 \end{cases}$$

作初等变换 $L_3 + (-2)L_2$, 消去第三个方程, 得

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -1 \end{cases}$$

最后作初等变换 $L_1 + L_2$, $(-1)L_2$, 得

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

将未知量 x_3, x_4 移到等号的右侧, 得

$$\begin{cases} x_1 = -2x_3 - 2x_4 \\ x_2 = 3x_3 - 2x_4 + 1 \end{cases} \quad (1.1.8)$$

在方程组 (1.1.8) 中, 任意取定变量 x_3, x_4 的一组值. 例如, 令

$$x_3 = t_1, \quad x_4 = t_2,$$

回代得出

$$\begin{cases} x_1 = -2t_1 - 2t_2 \\ x_2 = 3t_1 - 2t_2 + 1 \\ x_3 = t_1 \\ x_4 = t_2 \end{cases} \quad (1.1.9)$$

其中 t_1, t_2 可以取任意的实数值. 当 t_1, t_2 取所有可能的值时, 式 (1.1.9) 给出方程组的全部解. 式 (1.1.9) 是方程组 (1.1.7) 的通解.

当方程组中含有矛盾方程时, 方程组会出现无解的情况.

例 1.1.4 讨论下列线性方程组的解的情况:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ 6x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \\ 9x_1 - 9x_2 + 9x_3 + 7x_4 = -1 \end{cases} \quad (1.1.10)$$

解 对方程组作初等变换 $L_2 + (-2)L_1, L_3 + (-3)L_1$, 得

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ -3x_2 - 6x_3 - 5x_4 = -1 \\ -3x_2 - 6x_3 - 5x_4 = -7 \end{cases}$$

作变换 $L_3 + (-1)L_2$, 得

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ -3x_2 - 6x_3 - 5x_4 = -1 \\ 0 = -6 \end{cases} \quad (1.1.11)$$

在方程组 (1.1.11) 中, 第三个方程是矛盾方程, 故方程组 (1.1.11) 无解, 从而方程组 (1.1.10) 也无解.

练习 1.1.1 求解下列方程组:

$$\begin{aligned} (1) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases} & \quad (2) \begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 11 \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - x_4 = -1 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 5 \\ -x_1 - 9x_2 - 4x_4 = 17 \end{cases}; \\ (3) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 4 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -2 \end{cases} & \quad (4) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ 5x_1 + 12x_2 - 7x_3 + 6x_4 = -7 \end{cases}. \end{aligned}$$

1.1.3 齐次线性方程组的解法

对于齐次线性方程组 (1.1.2), 因为

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad \dots, \quad x_n = 0 \quad (1.1.12)$$

总是它的一个解, 故齐次线性方程组一定相容, 称式 (1.1.12) 为方程组 (1.1.2) 的平凡解(trivial solution) 或零解. 如果方程组有非零解, 则它必有无穷多个解. 可以利用高斯消元法对齐次线性方程组进行求解.

例 1.1.5 判断下列方程组是否有非零解, 如果有非零解, 求出其通解:

$$\begin{cases} x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \quad (1.1.13)$$

解 因为第一个方程中 x_1 的系数为零, 首先作变换 $L_1 \leftrightarrow L_2$, 将第一、二两个方程调换位置, 得

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 - 4x_3 = 0 \\ 5x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

作变换 $L_3 + \left(-\frac{5}{2}\right)L_1$, 消去第三个方程中的 x_1 项, 得

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 - 4x_3 = 0 \\ \frac{1}{2}x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

由第二个方程消去第三个方程, 得

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

在上式中选定一个变量, 如 x_3 , 移到等号的右边, 得到

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -2x_3 \\ x_2 = 4x_3 \end{cases}$$

令 $x_3 = t$, 解得

$$\begin{cases} x_1 = 5t \\ x_2 = 4t \\ x_3 = t \end{cases}, \quad (1.1.14)$$

其中, 参数 t 可以取任何实数. 当 $t = 0$ 时, 得到方程组的零解; 当 $t \neq 0$ 时, 就得方程组的非零解. 可以看到, 这个方程组有无穷多个非零解, 式 (1.1.14) 是它的通解.

例 1.1.6 求解齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - 7x_2 + 7x_3 = 0 \\ -4x_1 + 6x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ 2x_3 = 0 \end{cases}$$
$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0.$$

在例 1.1.3 和例 1.1.5 所得到的通解中, 分别含有任意常数 t_1, t_2 和任意常数 t , 这些常数的取得, 是在由方程组化成的梯形方程组中, 选定每个方程的第一项对应的未知量, 将其余未知量对应的项移到等号的右边. 那些移到等号右边的自变量称为**自由未知量**, 留在等号左边的未知量称为**基本自变量**, 再将自由未知量取为任意常数, 而将基本未知量用这些任意常数表示, 得到方程组的通解.

$$\begin{aligned} (1) \quad & \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ -x_1 + 8x_2 + x_3 = 0 \end{cases} ; \quad (2) \quad \begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases} ; \\ (3) \quad & \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ ax_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

1.2 矩阵与向量

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \qquad \qquad \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

的求解, 根据 1.1 节的讨论, 可以看到, 利用高斯消元法解线性方程组, 其实只有系数 $a_{ij}(i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n)$ 和常数项 $b_i(i=1, 2, \dots, m)$ 参与运算. 在方程组中去

掉各个自变量 x_i , 加号 “+”, 等号 “=” 后, 剩下一个矩形数组, 两边括以方括号, 表示为

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}, \quad (1.2.1)$$

这个数组携带了线性方程组的全部信息, 它和对应的线性方程组相互唯一确定.

对于齐次线性方程组 (1.1.2), 常数项全部为零, 在式 (1.2.1) 中去掉最后一列, 得到

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}. \quad (1.2.2)$$

称形如式 (1.2.1) 和式 (1.2.2) 的矩形数组为 “矩阵”.

定义 1.2.1 $m \times n$ 个数 $a_{ij} (i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$ 排成一个 m 行、 n 列的数表, 记作

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1.2.3)$$

称为一个 m 行 n 列的矩阵, 简称为 $m \times n$ 矩阵或矩阵(matrix), a_{ij} 称为矩阵的元素, 元素 a_{ij} 的下标 i 表示它所在的行, 称为行标, 下标 j 表示它所在的列, 称为列标.

矩阵常用一个大写英文字母表示. 例如, 元素为 a_{ij} 的矩阵 (1.2.3) 可记作 $A_{m \times n}$ 或 A , 表示出它的元素, 矩阵也简记作 $[a_{ij}]_{m \times n}$, 或 $[a_{ij}]$, 即

$$A = A_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij}]. \quad (1.2.4)$$

式 (1.2.2) 称为线性方程组的系数矩阵, 而式 (1.2.1) 称为线性方程组的增广矩阵, 矩阵中的元素可以是实数、复数, 也可以是矩阵、函数或其他数学符号. 元素为实数的矩阵称为实矩阵, 元素为复数的矩阵称为复矩阵, 元素为其他对象的矩阵称为超矩阵 (hypermatrix). 本书中大多数情况下讨论的是实矩阵.

只有一列或一行的矩阵称为向量.

定义 1.2.2 n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 组成的一个有序数组

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

称为一个 n 维列向量, 简称 n 维向量, 其中 a_i 称为 $\mathbf{a}$ 的第 i 个分量或坐标. 当将 n 维向量写作

$$[a_1, a_2, \dots, a_n]$$

时, 则称为 n 维行向量, 记作 $\mathbf{a}^T$.

n 维向量也可以看作是一个 $n \times 1$ 矩阵, 称为列矩阵; 同时一个 n 维行向量也可看作是 $1 \times n$ 矩阵, 称为行矩阵.

线性方程组的未知量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 和右端项 $b_1, b_2, \dots, b_m$ 构成两个向量

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

分别称为线性方程组的未知向量和常数向量.

下面介绍几个来自实际问题的矩阵例子.

例 1.2.1(交换矩阵) 设一个经济系统由 3 个产业部门构成, 分别是煤矿、发电厂和钢铁厂, 每一个部门的产品在各个部门之间的分配情况可以用表 1.2.1 表示.

表 1.2.1 各部门产品交换表

产品使用部门	产品生产部门		
	煤矿	发电厂	钢铁厂
煤矿	0.0	0.4	0.6
发电厂	0.6	0.1	0.2
钢铁厂	0.4	0.5	0.2

其中每一列的 3 个数分别表示这个部门的产品在 3 各部门之间的分布比例. 例如, 表中的第二列表示发电厂的电能有 40% 被煤矿利用, 50% 用于钢铁厂, 10% 留给发电厂自己使用, 假设各个部门的产品只在系统内部分配, 故各列的数字之和等于 1. 由表 1.2.1 可以得到矩阵

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0.6 & 0.1 & 0.2 \\ 0.4 & 0.5 & 0.2 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{E}$ 称为交换矩阵^①.

例 1.2.2(通路矩阵) 设有 4 座城市 A_1, A_2, A_3, A_4 , 其间道路通向如图 1.2.1 所示. 以数 r_{ij} 表示由第 i 个城市直接通向第 j 个城市的道路通路条数, 则由图 1.2.1 提供的城市之间的通路信息, 可以由如下的矩阵表示 (注意道路指向是有方向的):

$$\mathbf{R} = [r_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

^① 交换矩阵由美国经济学家, 诺贝尔经济学奖获得者 Wassily Leontief 提出.