萬有文庫

第一集一千種

王雲五主編

平面幾何學

圓

東利作著

黃元吉譯

商務印書館發行

平面幾何學
圓

東利作著
黃元吉譯

算學小叢書

王雲五主編

萬有文庫

黃元吉譯

發行兼印刷者　上海寶山路 商務印書館

發行所　上海及各埠 商務印書館

中華民國十八年十月初版

The Complete Library
Edited by
Y. W. WONG

CIRCLE

By
HIG SHI

Translated by
HUANG YUAN CHI

THE COMMERCIAL PRESS, LTD.
Shanghai, China
1929

A四〇五分

目　次

⊥ 垂線，正交，垂直． ≡ 疊合，全同．

△ 三角形． ▱ 平行四邊形．

▭ 矩形． □ 正方形． ‖ 平行．

卄 平行且相等．a,b,c 爲△ABC之三邊．

R 爲外接圓之半徑． r 爲內接圓之半徑．

r′,r″,r‴ 爲A,B,C角內傍接圓之半徑．

線分卽有限直線．

平面幾何學

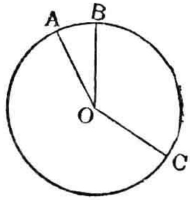
圓

第一章

圓之基本性質

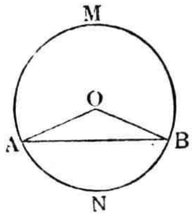
1. 定義 圓者，卽所稱圓周之曲線所圍平面之一部分也；此曲線上一切之點，距一定點恒相等，此定點稱爲圓之**中心**，由中心至圓周所引各線分，卽各有限直線，稱爲圓之**半徑**.

如圖。曲線 ABC 爲圓周，以此曲線爲限界，所圍平面之部分，卽圓是也；又O爲中心，OA，OB，OC各爲半徑.



圓依所記之文字稱之。如圖，稱爲O圓，或稱ABC圓，或稱OA圓.

注意．稱圓周者亦單稱圓，其不嫌混雜者，蓋從前後文之關係，不難判別其爲圓與圓周也；圓周分平面爲二部，有中心之部分，爲圓之內部，無中心之部分，爲圓之外部．



2．定義，圓周之一部分爲弧，兩弧合成全圓周者爲共軛弧，共軛弧之大者爲優弧，小者爲劣弧．

如圖，AMB與ANB爲共軛弧，二共軛弧相等者，各爲半圓周．

3．定義．由弧之兩端．聯成之線分曰弦，直徑卽通過中心之弦也．

同圓之直徑皆爲半徑之二倍，故互相等．直徑之中點，卽圓之中心．

4．定義．弓形者，弧與弦所圍圓之部分也；扇形者，弧與二半徑所圍圓之部分也．

如前圖，AMB及ANB皆爲弓形，又OANB及OAMB皆爲扇形．

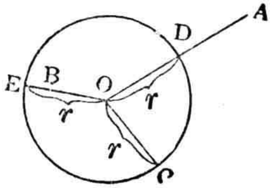
5．公理．由圓內外二點所聯成之直線，必與圓周相交．

6．定理1．由圓之中心至圓外之點，其距離必比半徑大；由圓之中心至圓內之點，其距離必比半徑小．

O爲圓之中心，A爲圓外之點，B爲圓內之點，r爲半徑，則

$OA>r$，$OB<r$.

證明．由A，O兩點聯成OA直線，與圓周相交於D，(5)



故 $$OA=OD+DA,$$

$$\therefore\ OA>OD$$

然 $OD=r$ 故 $OA>r$,

次由B點作半徑 OE，$OE=r$

$$OB<OE,\quad \therefore\ OB<r.$$

7. 系 1． 一點與圓之中心相距等於半徑，此點必在圓周上．

如云不然，則其點必在圓內，或在圓外，然此點與中心所成之距離，不能等於半徑．

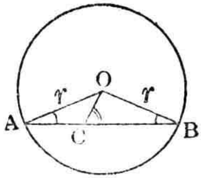
8. 系 2． 一點與中心所成之距離，比半徑大，此點必在圓外，若比半徑小，此點必在圓內．(歸謬法)

9. 系 3． A B弦上之點，除其兩端，必皆在圓內．

證明 O 爲中心，C 爲 AB 弦上之點，因 $OA=OB$，故於

$\triangle OAB$形內， $\angle A=\angle B$

然在$\triangle OAC$形內，



外角 $OCB>A$,

$\therefore\ \angle OCB>B$,

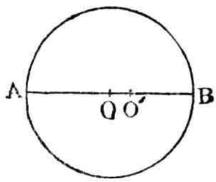
故由 $\triangle OCB$ 其邊必為 $OB>OC$，故 $OC<r$，故 C 點必在圓內。

10. 系 4. 直線與圓周共有之點，不能多於二點以上。

如謂有三點，則由中心至此三點所引三線分，皆為半徑，必皆相等，是由直線外一點至直線得引相等三線分矣。

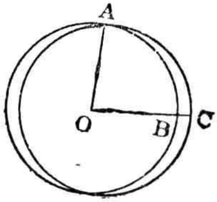
11. 定理 2. 凡圓祇有一中心。

證明. O 為圓之中心，其他任意之點 O'，皆非中心，如謂 O, O' 皆為中心，則由此二點所引直徑AB，必為$OA=OB, O'A=O'B$，是有限直線 AB 有二中點矣，故凡圓祇有一中心，



注意，此定理改為"一圓不能有二中心，"其義同也。

12. 定理 3. 同以 O 為中心 OA 為半徑之二圓，必可疊合。



證明．設有一圓周上任意之點 C不在他圓周上，則其半徑 OC 必與他圓周相交，其交點爲B，則 OB$\neq$OC．然同圓之半徑必相等，故OB＝OA，OC＝CA，若 OB $\neq$OC．是不合於理，故此兩圓必可疊合．

13．系 1．二圓半徑相等者，此二圓必可疊合．

蓋相等之半徑爲OA，O′A′．其中心 O 令疊於中心O′之上，其半徑OA必適疊於半徑 O′A′ 之上，是與前節定理相符，故可疊合．

定義　凡可疊合之圓，稱爲等圓．

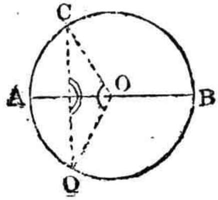
注意．半徑不等者圓亦不等，故等圓之半徑必相等．

14．系 2．圓之中心固定，而於其平面上將此圓旋轉，必常合於原位．

蓋半徑之長不變，而中心又爲固定，故圓周上各點，不能入於原位之圓內．亦不能出於原位之圓外．

15．定理 4．直徑(AOB)分圓及圓周爲二等分

證明．以直徑AB爲折痕，將弓形ACB折合於ADB之部分，因ACB 弧上一切之點，與中心相距，皆等於半徑，故點點皆落於ADB弧之上，即ADB弧上一切之點，適與ACB弧上一切之點相疊合，



故ACB，ADB兩弓形成疊合。

別證　依中心O旋轉，將弓形ACB旋至半周，其A點必適疊於B點之上，B點必適疊於A點之上，故ACB弧與BDA弧成疊合。　(14)

16. 定義　圓爲直徑所分之各部分，稱爲半圓。

17. 定理 4 之第一證明法，圓依其直徑成對稱。第二證明法，圓依其中心成對稱．詳言之，第一證明法，凡與直徑A B成正交之弦如C D，必適於其中點與A B成正交．第二證明法，凡通過中心O之弦，必皆以中心O爲中點．

18. 定義　通過圓之中心之無限直線，稱爲中心線．

19. 定理 5. 由定點P至圓周所作各線分之中，以中心線上之P A爲最小，P B爲最大．

證明．O爲圓之中心，PC爲不通中心任意所作之線分．

(第一) P點在圓外．

由　$\triangle POC$，　$PO<PC+OC$，

由是減去　$OA=OC$

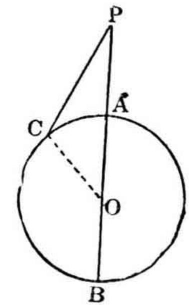
則　　$PA<PC$.

次　　$PC<PO+OC$,

因　　$OC=OB$,

∴　　$PC<PO+OB$.

即　　$PC<PB$.



（第二）P點在圓內.

三角形二邊之差，必比第三邊小，

故　　$\triangle POC$,

$OC-OP<PC$,

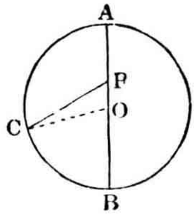
∴　　$OA-OP<PC$,

∴　　$PA<PC$,

次　　$PO+OC>PC$,

∴　　$PO+OB>PC$,

∴　　$PB>PC$,

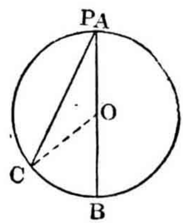


（第三）P點在圓周上.

此則P，A兩點相疊合，故PA爲零而

$PB=PO+OB=PO+OC$

故　　$PB>PC$.



20. 系. 直徑即最大之弦.

21. 定義 點與圓相距之最小者，稱爲點與圓之距離.

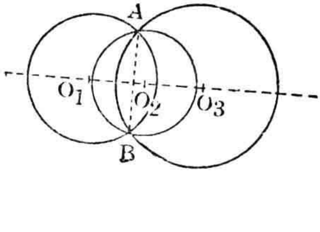
如前定理，P點與O圓之距離，PA之長是也.P點若在圓周上，則其距離爲零.

22. 定理 6. 通過一定點A.可作無數之圓.

證明 任取一點O爲中心，OA爲半徑，規取圓周，此圓即通過A點，故依此可作無數之圓.

23. 定理 7. 通過二定點A，B，可作無數之圓.

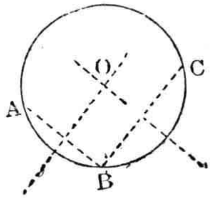
證明 緣分AB之垂直二等分線上各點，必與A，B二定點成等距.故於此直線上任取O_1點爲中心，O_1A爲半徑，規取圓周，此圓必兼通過B點. (7)



24. 定理 8. 不同在一直線上之三定點A，B，C，通過此三定點，必可作一圓，惟祇能作一圓而止.

證明 A，B，C 三點不同在一直線上，與此三點成等距者祇有一點，此點即AB，BC上垂直二等分線之交點O是也.故以O爲中

心，OA爲半徑，規取圓周，此圓通過A,B,C,三點，然祇能作此一圓而止，因凡非以O爲中心之圓，不能通過A,B,C三點，而以O爲中心，OA爲半徑之圓，則又皆成疊合也。(12)



25. 系 1. 不相疊合之二圓，其共有之點，不能多於二點以上。

26. 系 2. 相異之二圓，其共有之點，不能多於二點以上。

27. 注意 1. 前定理，即"不同在一直線上之三點，可決其能成一圓"。

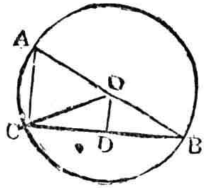
注意 2. 因無與一直線上三點成等距之點，故無通過一直線上三點之圓。

問 題 I.

*1、 直角三角形以斜邊A B爲直徑，作圓周，其直角之頂點C，必適在此圓周上。

凡用*記號，係屬主要問題。

證明 A, B, C 三點，與斜邊AB之中點 O，成等距，BC 邊之中點 D，與 O 聯成 OD 直線，必與 AC 平行。故 OD 爲 BC 之垂直二等分線。



$\therefore$ OC=OB=OA，

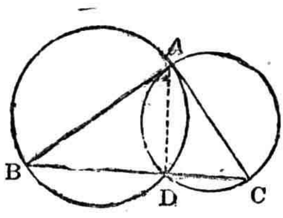
故以O爲中心，OA爲半徑，作圓周，即以AB爲直徑之圓，必通過頂點C。

2. 同由一斜邊所成之直角三角形，其直角之頂點，必同在一圓周上。

3. 矩形之四頂點，必同在一圓周上。

4. 四邊形兩對角線若成正交，則以四邊爲直徑所作四圓周，必同交於一點。

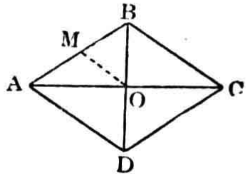
【指】四圓周皆通過對角線之交點。



5. 三角形以二邊爲直徑作兩圓，必適於底邊或其延長線上相交，

【指】 兩圓周通過垂線之正交點，依 $\angle B<90°$，$\angle B=90°$，$\angle B>90°$ 分別證明可也。

6. 菱形以四邊爲直徑，作四圓周，必同交於一



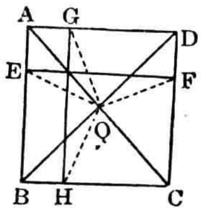
點.

【指】 菱形爲ABCD, 則其B, D二點與A, C二點成等距, 故BD爲AC之垂直二等分線.

7. 菱形四邊之中點, 必同在一圓周上.

【指】如前圖, AB之中點爲M, $OM=\frac{1}{2}AB$.

8. 由正方形一對角線上任意之點, 準與二鄰邊平行引二直線, 此二直線與四邊之交點, 必同在一圓周上.



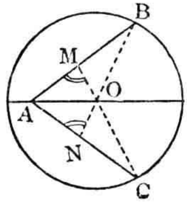
【指】 □ABCD之中心爲O, 平行線爲EF, GH, 則

$\triangle AEO \equiv AGO \equiv BHO \equiv DFO$ 依此證明可也.

9. 由圓內A點. 引A B, A C二直線, 係與圓周相交於B, C, 而與由A點所作之直徑, 夾成相等之角, 如是則A B, A C必相等.

證明. 由中心 O 作 AB, AC 之垂線 OM, ON,

則　　$\triangle OAM \equiv OAN$,



$\therefore\ OM=ON,\ AM=AN,$

因之　$\triangle OMB\equiv ONC,$

$\therefore\ MB=NC.$

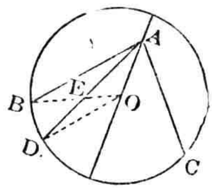
故　$AM+MB=AN+NC,$

卽　　$AB=AC.$

注意　讀者試以AO爲折痕，將圓折疊，以證明本題，

10. 由圓外A點，引A B，A C二直線，係與圓周相交於B，C，而與中心線A O夾成相等之角，如是則A B，A C必相等.

11、A點在圓內，而非中心，其由A至圓周所引相等之線分，不能多於二線分以上.



注意，與中心線AO夾成等角之二線分AB，AC爲相等.　　(9)

今作第三線分　AD，其不能與AB相等，可證之如次，作半徑 OB，OD，其AD，OB之交點爲E，則

$$AE+EB>AB,$$

$$ED+OE>OD,$$

$$\therefore\quad AD+OB>AB+OD$$