"十一五"国家重点图书

法兰西数学
精品译丛

概率与位势（第I卷）

可测空间

□ C. 德拉歇利　P.-A. 梅耶　著
□ 李欣鹏　姚一隽　译
□ 许明宇　校

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

"十一五"国家重点图书

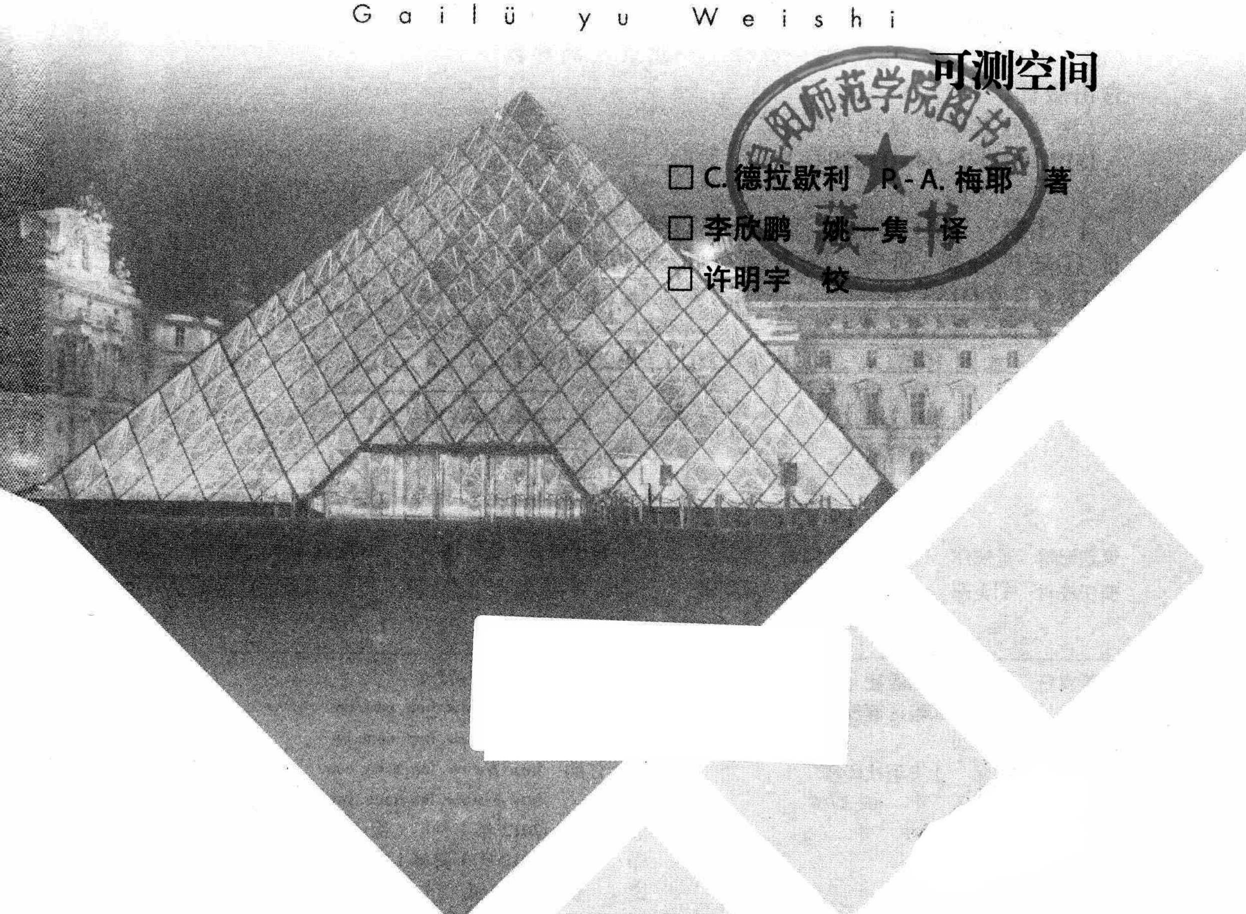
法兰西数学精品译丛

数学天元基金资助项目

概率与位势（第I卷）

Gailü yu Weishi

可测空间



C. 德拉歇利　P.-A. 梅耶　著

李欣鹏　姚一隽　译

许明宇　校

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

图字：01-2009-3890 号
Probabilité et potential (Volume I)
Claude Dellacherie, Paul-André Meyer
ISBN 2-7056-1372-2

图书在版编目(CIP)数据

概率与位势. 第1卷，可测空间/(法) 德拉歇利，(法) 梅耶著；李欣鹏，姚一隽译. --北京：高等教育出版社，2012. 1
(法兰西数学精品译丛)
ISBN 978-7-04-032294-1

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①德… ②梅… ③李… ④姚… Ⅲ. ①随机分析-研究 ②可测空间-研究 Ⅳ. ①O211. 6 ②O153. 3

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第231568号

策划编辑 王丽萍　责任编辑 李华英　封面设计 张 楠　版式设计 余 杨
责任校对 胡美萍　责任印制 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	国防工业出版社印刷厂	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×1092mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	13.25	版　　次	2012年1月第1版
字　　数	250千字	印　　次	2012年1月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	48.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　32294-00

《法兰西数学精品译丛》序

随着解析几何及微积分的发明而兴起的现代数学, 在其发展过程中, 一批卓越的法国数学家发挥了杰出的作用, 作出了奠基性的贡献. 他们像灿烂的星斗发射着耀眼的光辉, 在现代数学史上占据着不可替代的地位, 在大学教科书、各种专著及种种数学史著作中都频繁地出现着他们的英名. 在他们当中, 包括笛卡儿、费马、帕斯卡、达朗贝尔、拉格朗日、蒙日、拉普拉斯、勒让德、傅里叶、泊松、柯西、刘维尔、伽罗华、庞加莱、嘉当、勒贝格、魏伊、勒雷、施瓦茨及利翁斯等这些耳熟能详的名字, 也包括一些现今仍然健在并继续作出重要贡献的著名数学家. 由于他们的出色成就和深远影响, 法国的数学不仅具有深厚的根基和领先的水平, 而且具有优秀的传统和独特的风格, 一直在国际数学界享有盛誉.

我国的现代数学, 在 20 世纪初通过学习西方及日本才开始起步, 并在艰难曲折中发展与成长, 终能在 2002 年成功地在北京举办了国际数学家大会, 在一个世纪的时间中基本上跟上了西方历经四个多世纪的现代数学发展的步伐, 实现了跨越式的发展. 这一巨大的成功, 根源于好几代数学家持续不断的艰苦奋斗, 根源于我们国家综合国力不断提高所提供的有力支撑, 根源于改革开放国策所带来的强大推动, 也根源于很多国际数学界同仁的长期鼓励、支持与帮助. 在这当中, 法兰西数学精品长期以来对我国数学界所起的积极影响, 法兰西数学的深厚根基、无比活力和优秀传统对我国数学家所起的不可低估的潜移默化作用, 无疑也是一个不容忽视的因素. 足以证明这一点的是: 在我国的数学家中, 有不少就曾经留学法国, 直接受到法国数学家的栽培和法兰西数学传统和风格的熏陶与感召, 而更多的人也或多或少地通过汲取法国数学精品的营养而逐步走向了自己的成熟与辉煌.

由于语言方面的障碍, 用法文出版的优秀数学著作在我国的传播受到了较大的

限制. 根据一些数学工作者的建议, 并取得了部分法国著名数学家的热情支持, 高等教育出版社决定出版《法兰西数学精品译丛》, 将法国的一些享有盛誉并有着重要作用与影响的数学经典以及颇具特色的大学与研究生数学教材及教学参考书, 有选择地从法文原文分批翻译出版. 这一工作得到了国家自然科学基金委员会数学天元基金的支持和赞助, 对帮助并推动我国读者更好地学习和了解法国的优秀数学传统和杰出数学成就, 进一步提升我国数学 (包括纯粹数学与应用数学) 的教学与研究工作的水平, 将是意义重大并影响深远的, 特为之序.

李大潜

2008 年 5 月

中译本序

我非常高兴能够在 21 世纪看到《概率与位势》的一个新的版本。该书的法文原版在 1975 至 1992 年间由 Hermann 出版社出版, 从 1979 至 1988 年先后由 North Holland 和 Elsevier 出版社出了部分章节的英译本. 这次能够出版中译本, 先师 Paul-André Meyer (他于 2003 年去世) 泉下有知, 定当备感欣慰. 他为促进中法两国数学界的交流付出过极多的心血; 而且如果我没有记错的话, 他对于书面和口语的中文都有一定的了解, 我就不行了.

1968 年, Meyer 在《斯特拉斯堡概率论讨论班讲义》的第 II 卷 (Springer 的 LNM 系列丛书第 51 卷) 中发表了《过程的 "一般" 理论的详导 (Guide détaillé de la théorie "générale" des processus)》, 俗称为 "灰色导引", 其中还援引了孔夫子的一句话[①]. 1972 年 Springer 出版了我的小书《容度和随机过程》, 其中的第二部分基本上就是把 "灰色导引" 的内容加以详述并有所补充, 阐述斯特拉斯堡学派关于过程的一般理论的工作. Meyer 挺喜欢我那本书的, 并且在 1973 年前后建议我跟他合作, 撰写他那本《概率与位势》(Hermann 出版社 1966 年初版, 同年即有 Blaisdell 翻译的英文版) 的新版 (其实是完全重新写过, 篇幅也大大地增加了). 我当然答应了, 但是并没有想到这会整整耗去十五六年的光阴, 而且最后的产出是煌煌五卷, 而不是最初设想的一本.

虽然按照字典序把我的名字列在前面, 也不用否认我在这套书 (以及 Maisonneuve 在第 V 卷) 中的贡献的重要性, 但是毫无疑问的, Meyer 才是这项工程自始至终、从内容到形式的总负责人. 他甚至还亲力亲为, 干泥水匠的活: 第 I 卷和第 II

[①]译校者注: 指的是《论语 • 子路》中 "必也正名乎" 一句, Meyer 在文中给出了一些概念的 "现代" 名称.

卷的前 2/3 内容是斯特拉斯堡的秘书打出来的, 其他的都是 Meyer 自己在一台 “走私” 的打字机上打出来的 (最后一卷是用 TEX 书写的). 在那个年代, 用一台改装过的打字机和一套可以替换的铅字模块打数学文章需要一定的手工技术, 还是颇有趣的 (我自己就有一台这样的机器). 那个年代没有 “删除 — 复制 — 粘贴” 的软件, 凡事都要实实在在地动手, 要用 “剪刀 — 打字机 — 糨糊瓶”, 才能对已经打好的文字做修改, 还必须保持行数不变 —— 这是一项我很喜欢的益智游戏.

Meyer 和我对于数学的美感有相同的理解, 对于好的法语有同样的追求, 对于书写编辑的工整也同样在乎. 不仅如此, 我们还有一模一样的打字机, 所以从 “打字稿” 中是难以辨别出哪些是他写的, 哪些是我写的. 我们之间的关系可能仅仅用融洽来形容还不够, 但是 Meyer 工作起来很快 (Walsh 称他为 “西方最快的机器”), 而我那时 (现在也是) 非常之慢. Meyer 很可能因此而感到不舒服, 尽管我并非故意如此.

除了用 Tex 写的第 V 卷以外, 本书的法文版基本上和 Meyer 的打字稿是一模一样的 (页码、标题等是出版社加的). 现在这看上去显得陈旧也不好看, 但是 40 年前, 我们的确都习惯于阅读这样在打字机上打出来的论文或者书稿. Hermann 出版社曾经多次向我们承诺, 会真正排版印刷本书, 但是至今也没有兑现. 因此我非常高兴能够 (对于写作这篇序言的时间来说) 在不久的将来看到本书的一部分能够用漂亮的汉字印刷出版.

Claude Dellacherie
2011 年 9 月 8 日于法国鲁昂

前言

从原则上说, 书名的作用是通过若干个关键词来简明扼要地告诉读者本书的内容. 正因为此, 我们觉得有必要马上提醒读者, 本卷只包含了很少的概率论, 而且完全没有涉及位势论①. 概率论将在后面的一卷里面出现 (鞅论和随机积分), 而位势论 (预解和半群理论) 要排在更后面。至于联结这两部分的那个 "与" 字所涉及的内容, 已经推后到了一个我们想都不敢想的遥远的未来。实际上, 在这一卷里面, 先是对测度论做了简单的回顾, 然后还有两个比较长的章节, 一章是关于解析集和容度, 另一章则是关于随机过程理论的基础的。

为什么用这个标题呢? 在 1966 年, 本书的第二作者已经出版了一本名为《概率与位势》的书。该书有 11 章, 所涵盖的内容远比眼前这本书要广泛。它只缺少 "与" 字所涉及的内容, 原计划在第 II 卷中讨论。该卷中的一部分初稿在 1967 年以关于 Markov 过程的 "课程讲义" 的形式发表。而现在, 我们不是要完成那个第二部分, 结束这项工程, 而是两个人一起从头再来, 把原来那册第 I 卷的第一部分重新编辑出版。我们这样做有几个理由。首先, 1968 年 Blumenthal 和 Getoor 出版的关于 Markov 过程的专著让我们不再像 1966 至 1967 年间那样迫切地要写一本这方面的标准参考书. 其次, 从 1966 年到现在, 整个理论有了全面的、迅猛的、大幅度的发展. 我们来举几个例子. 在概率论方面, 本书第一版包含了良好可测过程的概念, 而可料过程这个在今天的概率论工作者视为左膀右臂的概念, 在那里都没有明确地写出来. 在位势理论方面, 在一个注记 (第一版, 第 247 页) 中我们提到了一个称为 "拟约化" 的貌不惊人的概念: "我们并不清楚下述定理究竟有什么用处"; 而根据 Mokobodzki 的工作, 现在我们知道那是预解式理论的关键之一. 至于书名中的 "与" 这一部分,

①这里我们效仿我们的导师 N. Bourbaki, 在他们的《分析的基础结构》里面没有半点分析.

在介绍 Ray 预解式的最早的一些工作 (第 266 页) 之前, 我们曾告诫读者 "下面这些结果在以后各章中不会用到", 而现在看来, 这些结果是基础性的. 我们还可以举出许多这样的例子.

自 1966 年以来, 我们的工作条件也大大改观了. 那时, 虽然位势论或者 Markov 过程的专家都已经有很多, 但是对两个领域之间类似于荒漠的领域感兴趣的人少之又少①. 现在的情况就大不一样了 (这里面或许有本书第一版的功劳, 尽管有着很多这样那样不尽如人意之处, 但还是为推广若干想法做出了贡献). 封面上只印了两个人的名字, 但是读者们应该明白, 在这里或者后几卷中讲述的新观点, 都是通过难以计数的交流得来的. 只要读者翻阅一下自 1967 年以来每年都出版的斯特拉斯堡概率讨论班②文集, 就可以对此有一个初步的了解, 而那还只是冰山一角.

这样, 理论的迅猛发展让我们放弃了把本书的第二部分建立在并不牢固的基础上的念头, 而我们身处其间的活跃的数学工作者群体鼓励我们把本书完全重写. 我们的出版商也对我们表示充分的理解和支持, 答应让我们写作一部分, 他们就出版一部分.

从我们的理论的令人惊叹的发展之中, 我们也汲取了若干教训, 至少我们希望如此. 特别的, 我们希望摒弃在许多教科书中都表现出来的一种态度, 即书中所讲述的内容都是绝对真理, 来自于一个理想的世界, 永远不会贬值. 数学当然是一种真理, 但是其价值并不体现在它们是否印刷在精美的纸张上. 许多在 1966 年看来非常热门的结果, 今天人们已经完全不感兴趣、就此消亡了, 而有许多当年很不起眼的小结果, 今天已经发展成了这一领域里非常重要的内容.

所以我们试图让这本书变得尽量活泼有生气一点, 时不时回顾一下, 加一些注记, 并且留一些空间给小技巧和 "无用的" 注记. 我们必须承认, 有些内容的确不够有意思, 有时候我们自己也觉得有点没劲 (在这样的地方读者自己也能够体会出来), 但是这样的事情并不经常发生.

我们保留了第一版的组织结构: 在每一章内, 所有的定理、定义、注记, 都按照它们的出现次序编号: 例如定理 II.31 (表示第 II 章的第 31 段) 后面跟着注记 II.32, 然后是定义 II.33. 这对于引用是方便的, 但是读者们可以想象要在即将完成的一章里面做一些改动是一件多么痛苦的事情. 因此, 书中会有一些不合乎规范的现象 (比如同一个数字出现两次或以上, 用 "b" 等记号区分, 或者偶尔有跳号的现象, 或者有一些平淡无奇的段落也加了编号). 书后面的名词和符号索引, 也是按照这种方式排序的. 参考文献是按照作者的姓名用字典序排的, 但是对于同一个作者的著作, 编号 [1], [2], 没有任何逻辑顺序.

我们要向 Koehly 女士致以真挚的感谢, 她根据手稿从头到尾打字完成了本书, 从来没有发生不愉快, 而且我们希望在将来至少还有五卷交给她打字.

---

①英文版: 也就十来个人.

②译校者注: 参见本书所附 M. Yor 院士撰写的 Meyer 教授生平.

最后, 题献部分: 本来我们没有打算把这本书题献给谁[①], 但是我们最近刚刚从 Frank Knight 那里听说今年[②] Doob 正好 65 岁. 而他的思想在本书第 IV 章中贯穿始终, 也给了整本书以启迪. 所以很自然地我们在这里写下

献给 J.L.Doob 的 65 岁生日.

①这对于在老爸工作 (或者假装工作) 的时候让孩子们安静下来的那两位女士实在是太不知感激了.

②译校者注: 1975年.

郑重声明

法兰西数学精品译丛

注：书号前缀为 978-7-04-0xxxxx-x

书号	书名	著译者
★24308-6	解析函数论初步	H. 嘉当
★25156-2	微分学	H. 嘉当
★28417-1	广义函数论	L. 施瓦兹
★25801-1	微分几何	M. 贝尔热、B. 戈斯丢
★26362-6	拓扑学教程	G. 肖盖
★25155-5	谱理论讲义	J. 迪斯米埃
★24619-3	拟微分算子和 Nash-Moser 定理	S. 阿里纳克、P. 热拉尔
★29467-5	解析与概率数论导引	G. 特伦鲍姆
★33238-4	概率与位势（第 I 卷）	C. 德拉歇利、P.-A. 梅耶
★31960-6	无穷小计算	J. 迪厄多涅
33238-4	广义系统的精确控制、摄动和稳定性（第一卷）精确控制论	J.-L. 利翁斯
	代数教程	R. 戈德曼
	概率与位势（第 II 卷）	C. 德拉歇利、P. -A. 梅耶
	金融数学导引	El Karoui, E. Gobet
	完全集与三角级数	Jean-Pierre Kahane
	分析与代数原理 (及数论)	Pierre Colmez

说明：加★者已出版.

目录

第 0 章　符号

集合论符号 1

我们将集合 A 的余集记为 $\complement A$, 或者记为更常见的 A^c. 符号 $A \setminus B$ 表示 $A \cap B^c$; $A \triangle B$ 表示对称差 $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. E 中满足某个性质 P 的所有元素组成的集合记为 $\{x \in E : P(x)\}$, 在不产生歧义的情形下, 我们记为 $\{x : P(x)\}$, 或者简记为 $\{P\}$.

函数 f 在集合 A 上的限制记为 $f|_A$. 类似的, 若 $\mathcal{E}$ 为一族子集, 则 $\mathcal{E}|_A$ 表示 $\mathcal{E}$ 中的元素在 A 上的限制①.

集类的封闭性 2

我们经常会用到如下形式的叙述: 集类 $\mathcal{E}$ 对于运算 $(\cdots)$ 封闭, 其中括号内是一些集合运算的符号, 有时带有字母② f, d, q, m, 这些字母分别表示: 有限、可数、任意和单调. 下面的两个例子可以说明它们的具体含义: “$\mathcal{E}$ 对于运算 $(\cup f, \cap q)$ 封闭” 表示 $\mathcal{E}$ 中有限个元素的并集③和任意多个元素的交集仍然属于 $\mathcal{E}$; “$\mathcal{E}$ 对于运算 $(\cup md, ^c)$ 封闭” 表示 $\mathcal{E}$ 中可数个单调递增元素的并集属于 $\mathcal{E}$, 并且 $\mathcal{E}$ 中任一元素的余集仍然属于 $\mathcal{E}$. 一般说来, 集类或函数族常用花体字母表示.

我们记 $\mathcal{E}_\sigma$ (相应的, $\mathcal{E}_\delta$) 为对于可数并 $(\cup d)$ (相应的, 可数交 $(\cap d)$) 运算封闭且包含 $\mathcal{E}$ 的最小集类, 这些都是集合论中的经典记号. 我们记 $(\mathcal{E}_\sigma)_\delta = \mathcal{E}_{\sigma\delta}$.

---

①译校者注: $\mathcal{E}|_A = \{B \cap A : B \in \mathcal{E}\}$.

②译校者注: 这是法文单词的首字母, 相应的英文单词的首字母为 f, c, a, m.

③Bourbaki 认为有限并包含 “指标集为空集的并集” 的情形, 对有限交亦如此. 此处我们不采用这种形式.

3 格论符号

设 f 和 g 为两个实值函数, 我们分别用 $f \vee g$ 和 $f \wedge g$ 表示 $\sup(f,g)$ 和 $\inf(f,g)$. 符号 f^+ 和 f^- 与它们的经典含义相同: $f^+ = f \vee 0, f^- = (-f) \vee 0$.

更一般的, 我们用 $\vee$ 和 $\wedge$ 分别表示最小上界和最大下界: 例如, 由一族 σ-代数 $\mathcal{F}_i$ 的并所生成的最小 σ-代数我们记为 $\vee_i \mathcal{F}_i$.

4 沿着 $\mathbb{R}$ 的极限

符号 $s \uparrow t$ 表示 $s \to t$, $s \leqslant t$; $s \upuparrows t$ 表示 $s \to t$, $s < t$; 对于序列 (s_n), $s_n \uparrow t$ 和 $s_n \upuparrows t$ 有同样的意义, 我们还附带要求 (s_n) 是递增的. 符号 $\downarrow$ 的含义类比可知. 通常, 沿着 $\mathbb{N}$ 当 $n \to \infty$ 时的极限简记为 $\lim_n$, $\liminf_n$.

5 积分理论

不附加其他说明的话. 测度总是指一个 "抽象可测空间上的非负可数可加集函数". 我们不假定所有的测度都是 σ-有限的, 否则我们需要讨论的某些位势测度会被排除在外. 不过我们仅考虑有限测度的可数和 (在这样的测度下, 比如说 Fubini 定理仍然是成立的).

符号 $\lambda \vee \mu = \sup(\lambda, \mu)$, $\lambda \wedge \mu = \inf(\lambda, \mu)$, $\mu^+, \mu^-, |\mu| = \mu^+ + \mu^-$ 与它们的经典含义相同. $\|\mu\|$ 表示 μ 的全变差 $\langle |\mu|, 1 \rangle$ (有时为无穷). 函数 f 关于测度 μ 的积分记为 $\int f(x)\mu(\mathrm{d}x)$[①]: 通常我们简记为 $\int f\mu$; $\dfrac{\mu}{\nu}$ 表示 Radon-Nikodym 分布密度, 此处没有 "d". 而当 $\mathbb{R}$ 上的测度 μ 作为某个增函数 F 的导数出现时, 我们常用 Stieltjes 积分 $\int f(x)\mathrm{d}F(x)$ 表示. 特别的, 当 $F(x) = x$ 时, 记为 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

当 μ 为概率测度时, 我们经常将 $\int f\mu$ 记为 $\mathbb{E}[f]$, (特别的, 当 A 为一个复杂事件时) 将 $\int_A f\mu$ 记为 $\mathbb{E}[f, A]$.

6 函数空间

给定拓扑空间 E, 我们用 $\mathcal{C}(E)$, $\mathcal{C}_b(E)$, $\mathcal{C}_c(E)$, $\mathcal{C}_0(E)$ 分别表示由连续、有界连续、连续且具有紧支集、(当 E 为局部紧空间时) 连续且在无穷远处趋于 0 的实值函数所构成的空间. 我们在这些符号上加一个 "+" (例如 $\mathcal{C}^+(E)$ 等) 表示相应空间中由非负函数全体组成的锥. 我们常用 $\mathcal{C}_c^\infty(E)$ 表示具有紧支集的无穷次可微函数空间 (此时我们需假设 E 为流形, 通常就是 $\mathbb{R}^n$).

若 $(E, \mathcal{E})$ 为可测空间, 则 $m(\mathcal{E})$ (相应的, $b(\mathcal{E})$) 表示 $\mathcal{E}$-可测 (相应的, 有界 $\mathcal{E}$-可测) 实函数构成的空间. 我们只对分离拓扑空间 E 使用和测度相关的记号: $\mathcal{M}_b^+(E)$ 和 $\mathcal{M}^+(E)$ 分别表示 E 上的有限 Radon 测度以及任意 Radon 测度所构成的锥, 而 $\mathcal{M}_b(E)$ 和 $\mathcal{M}(E)$ 表示由上述锥所生成的向量空间.

① 也记作 $\mu(f)$, $\langle \mu, f \rangle$.