

新概念定律公式

中学版



中学生 数学

新概念定律公式手册

上

龙文/编

湖南科学技术出版社

中 学 版

中学生 数学
新概念定律公式手册

龙 文 / 编

上

前　　言

进入 21 世纪,素质教育是我国基础教育改革和发展的方向。为迎接新世纪,落实科教兴国,实施素质教育,满足广大中学生学好数学的需要,并为了给广大中学数学教师教学提供方便,我们编写了这本手册。

本手册包括现行中学数学教学内容体系中的公式、定理和重要的概念等知识,并根据实际需要和有利于读者理解、掌握知识的原则进行了适当的拓宽和加深。条目内容按教材章节分单元编排,便于查阅。各个单元除基本内容外,还介绍了中学阶段必须掌握的重要数学思想方法和解题技巧,同时适当选编了部分典型例题,便于巩固。

本手册适合中学生日常学习和复习迎考使用,对于广大中学数学教师,也是一本内容翔实的教学参考书。

本手册在编写过程中,查阅了有关书刊资料,谨在此表示衷心的感谢。由于时间仓促,水平有限,书中不足之处在所难免,欢迎广大读者提出宝贵意见。

编　者

目 录

初中数学

第一部分 代 数

第一章 有理数	(1)
§ 1.1 整数与整除	(1)
§ 1.2 有理数及其运算	(4)
第二章 整式	(9)
§ 2.1 代数式及其有关概念	(9)
§ 2.2 整式的运算	(11)
§ 2.3 多项式的因式分解	(15)
第三章 分式	(18)
第四章 数的开方与二次根式	(23)
§ 4.1 数的开方	(23)
§ 4.2 二次根式的概念	(26)
§ 4.3 二次根式的运算	(27)
第五章 方程和方程组	(35)
§ 5.1 等式和方程的有关概念	(35)
§ 5.2 一元一次方程和一元二次方程	(37)
§ 5.3 一元高次方程	(41)
§ 5.4 分式方程和无理方程	(42)
§ 5.5 方程组	(46)
§ 5.6 列方程组解应用题	(51)
第六章 不等式	(58)
第七章 函数与图像	(60)

§ 7.1 平面直角坐标系、函数概念	(60)
§ 7.2 一次函数及其性质	(63)
§ 7.3 二次函数及其性质	(65)
§ 7.4 反比例函数及其性质	(68)
第八章 统计初步	(79)

第二部分 平面几何

第一章 线段、角	(83)
第二章 相交线、平行线	(86)
§ 2.1 垂线	(86)
§ 2.2 平行线	(86)
§ 2.3 命题、定理、证明	(88)
第三章 三角形	(89)
§ 3.1 三角形	(89)
§ 3.2 全等三角形	(94)
§ 3.3 尺规作图	(96)
§ 3.4 等腰三角形	(97)
§ 3.5 线段的垂直平分线和轴对称	(99)
§ 3.6 直角三角形的性质和判定三角形的五心	(100)
§ 3.7 “三角形”单元的基本解题思路和方法	(102)
第四章 四边形	(108)
§ 4.1 多边形及有关概念	(108)
§ 4.2 特殊四边形的性质和判定	(109)
§ 4.3 中心对称与梯形	(110)
§ 4.4 几条重要的定理	(112)
§ 4.5 多边形的面积	(112)
§ 4.6 三角形的中线、高、角平分线长度计算公式	(113)
§ 4.7 “四边形”单元的基本解题思路和方法	(114)
第五章 相似形	(121)
§ 5.1 比例的性质	(121)
§ 5.2 平行线分线段成比例定理	(123)

§ 5.3 相似三角形的判定与性质	(124)
§ 5.4 相似多边形的性质	(126)
§ 5.5 几个著名的定理	(127)
§ 5.6 “相似形”单元的基本解题思路和方法	(129)
第六章 解直角三角形.....	(137)
第七章 圆.....	(144)
§ 7.1 圆的基本概念	(144)
§ 7.2 基本轨迹命题	(144)
§ 7.3 与圆有关的角	(146)
§ 7.4 直线和圆的位置关系	(148)
§ 7.5 两圆的位置关系	(152)
§ 7.6 正多边形及有关计算	(154)
§ 7.7 “圆”单元的基本解题思路和方法	(158)
附 录	
一、常数表	(167)
二、平方、立方表.....	(167)
三、常用计量单位表	(168)
四、拉丁字母和希腊字母	(171)

高中数学

第一章 集合与简易逻辑.....	(172)
§ 1.1 集合	(172)
§ 1.2 简易逻辑	(177)
第二章 函数.....	(183)
§ 2.1 映射	(183)
§ 2.2 函数和反函数	(186)
§ 2.3 函数的三要素	(190)
§ 2.4 函数的性质和图像	(194)
§ 2.5 正比例函数、反比例函数、一次函数和二次函数	(202)
§ 2.6 幂函数、指数函数和对数函数.....	(204)
§ 2.7 函数的应用	(217)

第三章 数列	(222)
§ 3.1 数列的一般概念	(222)
§ 3.2 等差数列和等比数列	(224)
§ 3.3 特殊数列的求和	(231)
§ 3.4 简单的递归关系	(234)
§ 3.5 数学归纳法	(238)
第四章 三角函数	(241)
§ 4.1 任意角的三角函数	(241)
§ 4.2 三角函数的图像和性质	(247)
§ 4.3 基本公式	(252)
§ 4.4 三角函数式的变换	(254)
§ 4.5 解三角形	(258)
§ 4.6 反三角函数	(267)
§ 4.7 简单三角方程	(274)

初中数学

第一部分 代数

第一章 有理数

§ 1.1 整数与整除

数字 也称数码,用来记数的符号.现在世界各国最常用的0,1,2,3,4,5,6,7,8,9十个数码是印度-阿拉伯数字.中国常用的数码是:一,二,三,四,五,六,七,八,九,十.

数码 即数字.

自然数 1,2,3,4,5,⋯等数,称为自然数,又称为正整数.“1”是自然数的单位,也是最小的一个自然数.自然数的个数是无限的,没有最大的自然数.

【说明】 以后的新教材中自然数包括0,0是第一个自然数,也是最小的一个自然数.

基数和序数 用来表示数量多少的正整数叫做基数,如3个人的3;用来表示顺序的正整数叫做序数,如第3个人的3.

整数 正整数、零、负整数统称为整数.

整除 对于任意给定的两个整数 $a, b (b \neq 0)$,若存在一个整数 q ,使得等式 $a = bq$ 成立,则称 b 整除 a ,或 a 被 b 整除,记作 $b \mid a$.若不存在整数 q ,使 $a = bq$ 成立,则称 b 不能整除 a ,或 a 不能被 b 整除,记作 $b \nmid a$.

a.

约数(因数)和倍数 若整数 a 能被整数 b ($b \neq 0$) 整除 ($b|a$), 则称 a 是 b 的倍数, b 为 a 的约数(或因数).

因为整数都是 ± 1 的倍数, 所以 ± 1 是任何整数的约数; 又因为零是非零整数的倍数, 所以任何一个非零整数都是零的约数.

整数整除的性质 设 a, b, c, d, \dots 均为整数.

(1) 若 $a|b$, 则 $(-a)|b$, $a|(-b)$, $(-a)|(-b)$, $|a||b|$;

(2) 若 $a|b$, $b|c$, 则 $a|c$;

(3) 若 $a|b$, $b|a$, 则 $|a|=|b|$;

(4) 若 $a|b$, 则 $a|bc$;

(5) 若 $a|b$, $c \neq 0$, 则 $ac|bc$;

(6) 若 $ac|bc$, (当然有 $c \neq 0$), 则 $a|b$;

(7) 若 $a|b$, 且 $b \neq 0$, 则 $|a| \leq |b|$;

(8) 若 $|a| < |b|$, 且 $|b| \neq |a|$, 则 $a=0$;

(9) 若 $d|a_1$, $d|a_2$, $d|a_3$, \dots , $d|a_n$, 则 $d|(m_1a_1 + m_2a_2 + m_3a_3 + \dots + m_na_n)$ ($m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ 为任意整数);

(10) 若 $d|(a+b)$, 且 $d|a$, 则 $d|b$;

(11) 若 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_m$ 内有一项不是 d 的倍数, 则至少还有一项也不是 d 的倍数;

(12) 若 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_m$, 且这 $m+n$ 项中有 $m+n-1$ 项是 d 的倍数, 则剩下的一项也是 d 的倍数;

(13) m 个连续整数中, 必有一个能被 m 整除;

(14) 若 a, b 是两个整数, 且 $b \neq 0$, 则有且仅有两个整数 q, r , 使 $a = qb + r$ ($0 \leq r < |b|$) 成立, 其中 a 为被除数, b 为除数, r 为余数. 显然, 当且仅当 $r=0$ 时 $b|a$.

能被 2、5、4、8、25、125 整除的整数

(1) 末位数字是偶数的整数能被 2 整除;

(2) 末位数字是 0 或 5 的整数能被 5 整除;

(3) 末两位数能被 4 或 25 整除的整数能被 4 或 25 整除;

(4) 末三位数能被 8 或 125 整除的整数能被 8 或 125 整除.

能被 3、9 整除的整数

各位数字的和能被 3 或 9 整除的整数能被 3 或

9 整除。

$$\text{例 1 } A = 4924361 \cdot N = 361 - 924 + 4 = -559.$$

$\therefore 131(-559)$.

13 | P a g e

$$\text{例 2 } A = 728453, \quad N = 453 - 728 = -275,$$

$\therefore 11 \mid (-275)$,

111728453.

能被 11 整除的整数的另一特征是：偶数位上的数字和与奇数位上数字和之差能被 11 整除。如 728453，因 $(7 + 8 + 5) - (2 + 4 + 3) = 11$ ， $\therefore 11 \mid 728453$ 。

质数(素数)和合数 一个大于 1 的整数,如果除了它本身和 1 以外,不能被其它正整数所整除,那么这个数称为质数.质数又称“素数”.质数有无限多个.最小的质数是 2.

一个大于 1 的整数，如果除了它本身和 1 以外，还能被其他正整数整除，那么这个数称为合数。1 既不是质数，也不是合数。

质因数 如果一个正整数 a 有一个因数 b , 且 b 又是质数, 则称 b 为 a 的质因数.

分解质因数 把一个合数表示成若干个质数的乘积的形式,叫做分解质因数.如把 18 分解质因数为

$$18 = 2 \times 3 \times 3.$$

奇数和偶数 能够被 2 整除的整数叫做偶数, 不能被 2 整除的整数叫做奇数. 偶数的一般表达式是 $n = 2k$, 奇数的一般表达式是 $n = 2k + 1$, 其中 k 为任一整数.

公约数和最大公约数. 设 a_1, a_2, \dots, a_n 是 n 个整数 ($n \geq 2$), 若整数 d 是这些数中每一个数的约数, 即 $d | a_1, d | a_2, \dots, d | a_n$, 则称 d 为 a_1, a_2, \dots, a_n 的一个公约数(公因数). 所有公约数中最大的一个叫做 a_1, a_2, \dots, a_n 的最大公约数, 记作 $(a_1, a_2, \dots, a_n) = d$, 如 $(24, 30, 66) = 6$;

24, 30, 66 的公约数有 1, 2, 3, 6.

公倍数和最小公倍数 设 a_1, a_2, \dots, a_n 是 n 个整数 ($n \geq 2$), 若整数 m 是这些数中每一个数的倍数, 即 $a_1 \mid m, a_2 \mid m, \dots, a_n \mid m$, 则称 m 为 a_1, a_2, \dots, a_n 的一个公倍数, 整数 a_1, a_2, \dots, a_n 的所有公倍数中, 最小的一个叫最小公倍数, 记作 $[a_1, a_2, \dots, a_n] = m$.

最小公倍数与最大公约数的关系 设 a, b 是两个正整数, 则 $[a, b] \cdot (a, b) = ab$, 即两个正整数的最小公倍数与最大公约数的乘积等于这两个数的乘积.

互质 两个整数 a, b 的最大公约数如果是 1, 则称 a, b 互质. 即若 $(a, b) = 1$, 则 a, b 互质. 如果整数 a_1, a_2, \dots, a_n ($n \geq 2$), 有 $(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$, 则称 a_1, a_2, \dots, a_n 互质, a_1, a_2, \dots, a_n 叫做互质数.

显然, 若 a_1, a_2, \dots, a_n 两两互质, 则 a_1, a_2, \dots, a_n 一定互质; 反之, 不一定成立. 如 $(6, 15, 35) = 1$, 即 6, 15, 35 是互质的, 但它们不是两两互质.

§ 1.2 有理数及其运算

正数 大于 0 的数叫做正数(正数前面的正号“+”可以省略不写).

负数 小于 0 的数叫做负数.

零 “0”表示正量和负量的分界点, 既不是正数也不是负数, 它是介于正数和负数之间的唯一的整数.

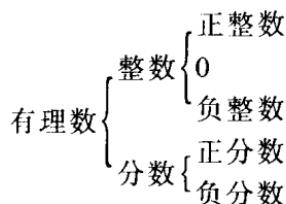
性质符号 符号“+”与“-”放在一个数前面表示这个数的正、负性时, 叫做性质符号.“+”叫做正号, “-”叫做负号.

运算符号 表示进行什么运算的符号, 如“+”、“-”、“×”、“÷”等, 叫做运算符号.

有理数 整数和分数统称为有理数. 任何一个有理数都可以化成分数的形式, 即都可化成 $\frac{n}{m}$ 的形式 (m, n 均为整数, 且 $m \neq 0$); 反过来, 任何一个可以表示为 $\frac{n}{m}$ (m, n 为整数, 且 $m \neq 0$) 这种形式的数一定是有理数.

有理数的分类 正整数、零、负整数统称为整数; 正分数、负分数统称为

分数.这样有理数按整数、分数的关系分类为:



非负有理数 正有理数和零的统称.

数轴 规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴.

相反数 只有符号不同的两个数叫做互为相反数(其中一个是另一个的相反数).数 a 的相反数是 $-a$, 0 的相反数是 0.

相反数的特性是:若 a 、 b 互为相反数, 则 $a + b = 0$; 反之, 若 $a + b = 0$, 则 a 、 b 互为相反数.

相反数的几何意义:数轴上分居原点两旁, 到原点等距离的两点所对应的两个数互为相反数.

绝对值

(1) 几何意义:数轴上表示数 a 的点与原点的距离叫做这个数 a 的绝对值. 数 a 的绝对值记作 $|a|$.

(2) 代数定义:一个正数的绝对值是它本身,一个负数的绝对值是它的相反数, 0 的绝对值是 0.

(3) 绝对值概念用式子表示为:设 a 为任意的有理数, 则

$$|a| = \begin{cases} a & (a > 0), \\ 0 & (a = 0), \\ -a & (a < 0). \end{cases}$$

绝对值的性质

(1) 数 a 的绝对值是一个非负数, 零是绝对值最小的数.

(2) 绝对值为正数的数有两个, 它们互为相反数.

(3) 两个互为相反数的绝对值相等. 反之, 绝对值相等的两个数相等或互为相反数.

有理数大小的比较

(1) 在数轴上表示的两个数, 右边的数总比左边的数大;

(2) 任何正数大于 0 和负数, 任何负数小于 0 和正数;

- (3)两个正数中,绝对值较大的数较大;
 (4)两个负数中,绝对值较大的数反而小.

有理数加法法则

- (1)同号两数相加,取相同的符号,并把绝对值相加;
- (2)绝对值不相等的异号两数相加,取绝对值较大的加数的符号,并用较大的绝对值减去较小的绝对值;
- (3)互为相反数的两个数相加得 0;
- (4)一个数同 0 相加,仍得这个数.

有理数减法法则:

- (1)语言叙述:减去一个数,等于加上这个数的相反数.

$$(2) \text{式子表示: } a - b = a + (-b).$$

减法变加法
 ↓
 减数变为它的相反数

- (3)减法可以化成加法,揭示事物之间相互转化的规律.

代数和 表示若干个正数、负数或零的和的式子,叫做代数和.在代数和中,性质符号和运算符号可以统一起来,因而两种符号可以转化.

有理数乘法法则

- (1)两数相乘,同号得正,异号得负,并把绝对值相乘;
- (2)任何数同 0 相乘都得 0;
- (3)几个不等于 0 的数相乘,积的符号由负因数的个数决定;当负因数有奇数个时,积为负,当负因数有偶数个时,积为正.
- (4)几个数相乘,有一个因数为 0,积就为 0.

倒数 乘积为 1 的两个数叫做互为倒数.零没有倒数.

特性:若 a 、 b 互为倒数,则 $ab = 1$;反之,若 $ab = 1$,则 a 、 b 互为倒数.

有理数除法法则

- (1)除以一个数等于乘以这个数的倒数.用数学式子表示为: $a \div b = a \times \frac{1}{b}$ ($b \neq 0$);
- (2)两数相除,同号得正,异号得负,并把绝对值相除;

(3) 0 除以任何一个不为 0 的数都得 0;

(4) 0 不能作除数.

乘方 求 n 个相同因数的积的运算叫做乘方. 乘方的结果叫做幂. 用式子表示为: $\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdots \cdot a}^{n \uparrow}$, 其中 a 叫做底数, n 叫做指数, a^n 叫做幂.

有理数乘方法则 正数的任何次幂都是正数; 负数的奇次幂是负数, 负数的偶次幂是正数. 零的任何正数次幂都为零.

有理数的运算律

$$\text{加法交换律} \quad a + b = b + a.$$

$$\text{加法结合律} \quad (a + b) + c = a + (b + c).$$

$$\text{乘法交换律} \quad ab = ba.$$

$$\text{乘法结合律} \quad (ab)c = a(bc).$$

$$\text{乘法对加法的分配律} \quad a(b + c) = ab + ac.$$

去括号法则 \Leftrightarrow 添括号法则

$$a + (b \pm c) = a + b \pm c.$$

$$a - (b \pm c) = a - b \mp c.$$

有理数的混合运算 有理数混合运算的顺序:

(1) 先算乘方, 再算乘除, 最后算加减. 如果有括号, 就先算括号里面的.

(2) 通常把六种基本的代数运算分成三级, 加减是第一级运算, 乘与除是第二级运算, 乘方(与开方)是第三级运算. 运算顺序的规定详细地讲是: 先算高级运算, 再算低一级运算; 同级运算按从左到右的顺序进行. 如果有括号, 先算小括号, 再算中括号, 最后算大括号.

(3) 利用运算律, 可不按上面的常规顺序. 例如:

$$a(b + c) = ab + ac.$$

有理数的稠密性 任意两个有理数之间存在无限多个有理数, 这个性质叫做有理数的稠密性.

科学记数法 把一个大于 10 的数记成 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq a < 10$, n 比原数的整数位数少 1, 这种记数法叫做科学记数法. 例如 72000 写成 7.2×10^4 , $60000000 = 6 \times 10^7$.

近似数 近似地表示某一个量的准确值的数叫做近似数或近似值. 例如: 用 3.14 代替 π , 3.14 就是 π 的一个近似数.

去尾法 规定取到某位, 这位以后的数字一律舍去, 此即去尾法. 如用去尾法求 π 的取 5 位的近似数为 3.1415.

收尾法 规定取到某位, 把某位以后的数字全部舍去, 若舍去的数字不全是零, 则在所保留数字的末位加上一个 1, 此即收尾法. 如用收尾法求 5.234 的精确到百分位的近似数是 5.24.

进一法 即“收尾法”.

四舍五入法 规定保留到某位时, 看其下一位的数字, 这个数字不大于 4 时按去尾法处理, 这个数字不小于 5 时按收尾法处理.

精确度 一个近似数对于它所表示的准确数误差的程度叫做这个近似数的精确度. 精确度有两种形式: 一是精确到哪一位, 一是保留几个有效数字, 它们的实际意义不相同.

有效数字 有效数字是对一个准确数的近似数的精确度而提出的. 一个近似数, 从左边第一个不是 0 的数字起, 到精确到的数位止, 所有的数字都叫做这个数的有效数字, 如 0.03086 有四个有效数字 3, 0, 8, 6; 3.260×10^8 有四个有效数字 3, 2, 6, 0.

例 近似数 1.6 与 1.60 的区别

(1) 精确度不同: 1.6 精确到十分位(即精确到 0.1), 它表示的准确值是大于或等于 1.55 而小于 1.65; 1.60 精确到百分位(即精确到 0.01), 它表示的准确值是大于或等于 1.595 而小于 1.605. 由此可见, 1.60 比 1.6 的精确度高.

(2) 有效数字不同: 1.6 只有两个有效数字, 1.60 有三个有效数字. 因此必须注意, 近似数末尾的“0”不能随意去掉.

第二章 整 式

§ 2.1 代数式及其有关概念

代数式 用有限次运算符号(加、减、乘、除、乘方、开方)把数或表示数的字母连结而成的式子叫做代数式.

单独的一个数或字母也是代数式.

代数式的书写:

(1)字母与字母相乘,数字与字母相乘(数字应写在字母前),乘号通常写作“·”或者省略不写.如 $x \times y$ 可写作 $x \cdot y$ 或 xy , $(m + n) \times 4$ 可写成 $4 \cdot (m + n)$ 或 $4(m + n)$.但为避免误会,数与数相乘时仍用“ \times ”号,不宜用“·”号,更不能省略乘号;

(2)在代数式中出现除法运算时,一般按照分数的写法来写.例如 $s \div t$ 写作 $\frac{s}{t}$, $3ab \div 5$ 写作 $\frac{3ab}{5}$;

(3)带分数与字母相乘,省略乘号时应把带分数化成假分数.例如 $a^2 b \times 2 \frac{1}{3}$ 应写成 $\frac{7}{3} a^2 b$.

(4)实际问题中需写单位时,若代数式的最后结果含有加、减运算,则要将整个式子用括号括起来,再写单位;否则,可直接写单位.例如 $5x$ 千米/时, a^2 千克, $\frac{m+n}{a}$ 元, $(a+b)$ cm, $(x+y)$ 天.

(5)相同字母的积,如 $a \times a \times a$,一般写成 a^3 .

代数运算 在初等数学中,加、减、乘、除,有理数次乘方,正整数次开方,这些运算都叫做代数运算.

代数式的值 用数值代替代数式里的字母,按照代数式指明的运算,计算出的结果,叫做代数式的值.

代数式中字母的允许值 代数式中的字母所能取的数值,也就是不使代数式没有意义的数值,叫做字母的允许值(或使代数式有意义的值,或字母的取值范围).

单项式 只含有数与字母的积的代数式叫做单项式,单独的一个数或一个字母也是单项式.

由此:(1)单项式中只含有乘法和乘方运算,不能含有加减运算;(2)单项式中可以含有除以数的运算,但不能含有除以字母(未知数)的运算.例如, $\frac{ab}{3}$ 是单项式,而 $\frac{3}{ab}$ 是代数式,不是单项式.

单项式的系数 单项式中的数字因数叫做单项式的系数.若一个单项式只含有字母因数,它的系数就是1或-1,若单项式是一个常数,则系数就是它本身.要注意负数作系数时应包括前面的符号(即系数带符号).对于形如 $-\frac{xy}{5}$ 的单项式,要改写成 $-\frac{1}{5}xy$,把系数放在字母的前面,而判断它的系数.

单项式的次数. 一个单项式,所有字母的指数的和叫做这个单项式的次数.例如 $-5x^7yz^2$ 的次数是10.不等于0的常数叫做零次单项式;0是单项式,它的次数不确定,或说它是任意次单项式.

多项式 几个单项式的和叫做多项式.或者:由数和字母,经过加法和乘法的有限次运算所构成的式子叫做多项式.单项式被看成多项式的特例.

多项式的项 在多项式中,每个单项式叫做多项式的项.

常数项 多项式里不含字母的项叫做常数项.

多项式的次数 多项式里,次数最高项的次数,叫做这个多项式的次数.

多项式通常以它的次数和项数来命名,称几次几项式.次数是几叫几次式,项数是几叫几项式.例如多项式 $6xy^4 + 2x^2y^2 - 3xy - 4$ 叫做五次四项式.

零多项式 各项系数均为0的多项式叫做零多项式.零多项式恒等于0.

零次多项式 单独一个不等于0的常数,称为零次多项式.

齐次多项式 各项次数都相同的多项式,叫做齐次多项式,如 $3x^2 + xy - 4y^2$ 是二次齐次多项式.

降幂排列 把一个多项式按某一个字母的指数从大到小的顺序排列起来,叫做把这个多项式按这个字母的降幂排列.例如多项式