普通高等教育“十二五”规划教材
理工类大学数学教学丛书
河南省精品课程配套教材

郭运瑞　主编

高等数学
（下册）

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材
理工类大学数学教学丛书
河南省精品课程配套教材

高等数学

（下册）

主　编　郭运瑞
副主编　李巧萍　胡丽平　宋林森　马巧云
编　者（按姓氏拼音排序）
白春阳　郭运瑞　何春花　胡丽平
李巧萍　刘　娟　陆　博　马巧云
宋林森　杨小飞　原冠秀　张清山

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是根据“高等学校本科教学质量与教学改革工程”的需要，参照高等学校数学与统计学教学指导委员会发布的《理工类本科数学基础课程教学基本要求》，参考《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》编写而成的.

全书分上、下册出版，本书为下册. 下册内容包括：多元函数的微分法及其应用，重积分，曲线积分与曲面积分，微分方程，无穷级数 5 章内容. 全书每节后都配有精选的习题，既有基本题又有应用广泛的综合应用题. 每章后还附有分层次教学测试练习题、Mathematica 数学实验和数学欣赏，充分考虑分层次教学的需要，对全方位提升学生的综合素质和创新能力等方面起到积极的推进作用.

本书可作为高等本科院校理工类专业的高等数学教材，也可作为学生自学和考研的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(下册)/郭运瑞主编. —北京：科学出版社，2012
理工类大学数学教学丛书 · 普通高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-03-033851-8

Ⅰ.①高… Ⅱ.①郭… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 043641 号

责任编辑：张中兴 周金权 / 责任校对：钟 洋
责任印制：张克忠 / 封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2012 年 3 月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2012 年 3 月第一次印刷 印张：15 3/4
字数：336 000

定价：67.00 元(上、下册)

(如有印装质量问题，我社负责调换)

目 录

第 8 章 多元函数的微分法及其应用

到目前为止，我们仅讨论了一元函数的微积分，研究的对象是一元函数 $y=f(x)$. 但在自然科学和生产实践中出现的函数，因变量不是只依赖于一个变量，而是依赖于两个或更多个自变量. 因此，有必要进一步研究多元函数的微分法及其应用.

8.1 多元函数的基本概念

8.1.1 多元函数及其定义域

我们先看几个多元函数的例子：

例 1 圆柱体的体积 V 和它的底面半径 r，高 h 之间满足关系式

$$V=\pi r^2 h \ (r>0,h>0),$$

这里，当 r,h 在集合 $\{(r,h)\mid r>0,h>0\}$ 内取定一对值 (r,h) 时，V 的对应值就随之确定.

例 2 平行四边形的面积 A 由它的相邻两边之长 a,b 和它们的夹角 θ 决定，即

$$A=ab\sin\theta \ (a>0,b>0,0<\theta<\pi),$$

这里，当 a,b,θ 在集合 $\{(a,b,\theta)\mid a>0,b>0,0<\theta<\pi\}$ 内取定一组值 (a,b,θ) 时，A 的对应值就随之确定.

例 3 电路中电流强度 I，电压 V 和电阻 R 之间满足关系式

$$I=\frac{V}{R} \ (V>0,R>0),$$

这里，当 V,R 在集合 $\{(V,R)\mid V>0,R>0\}$ 内取定一对值 (V,R) 时，I 的对应值就随之确定.

上面三个例子的几何和物理意义虽各不相同,但它们却有共同的性质,抽出这些共性就可得出以下二元函数的定义.

定义 8.1 设 D 是平面上的一个点集,如果对于每个点 $P(x,y)\in D$,变量 z 按照一定的法则 f 总有确定的值和它对应,则称 z 是变量 x,y 的二元函数(或点 P 的函数),记为

$$z=f(x,y)(\text{或 } z=f(P)).$$

点集 D 称为该函数的**定义域**,x,y 称为**自变量**,z 称为**因变量**. 数集$\{z\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$称为该函数的**值域**.

z 是 x,y 的函数也可以记为 $z=z(x,y)$,$z=\varphi(x,y)$等.

类似地,可以定义三元函数 $u=f(x,y,z)$,以及三元以上的函数. 一般地,可定义 n 元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 当 $n=1$ 时,n 元函数就称为**一元函数**. 当 $n\geqslant 2$ 时,n 元函数统称为**多元函数**.

二元函数的定义域与一元函数相类似,我们作如下约定:一般地,二元函数 $z=f(x,y)$的定义域,是使该表达式有意义的自变量的全体所确定的平面点集.

例 4 求 $z=\ln(x+y)$的定义域.

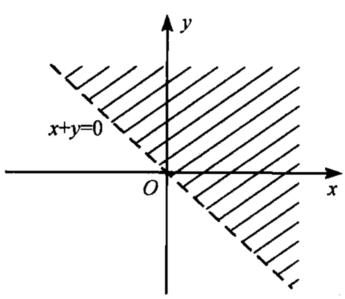

图 8.1

解 要使该算式表示的二元函数有意义,x,y 必须满足

$$x+y>0,$$

于是该函数的定义域为

$$\{(x,y)\mid x+y>0\}.$$

如图 8.1 所示.

例 5 求 $z=\arcsin\dfrac{x}{2}+\arcsin\dfrac{y}{3}$的定义域.

解 要使该函数有意义,须使

$$\begin{cases}\left|\dfrac{x}{2}\right|\leqslant 1,\\ \left|\dfrac{y}{3}\right|\leqslant 1.\end{cases}\quad \text{即}\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2,\\ -3\leqslant y\leqslant 3.\end{cases}$$

故所求函数的定义域为

$$\{(x,y)\mid -2\leqslant x\leqslant 2,-3\leqslant y\leqslant 3\},$$

如图 8.2 所示,这是一个矩形区域.

例 6 求二元函数 $z=\ln(9-x^2-y^2)+\sqrt{x^2+y^2-1}$的定义域.

解 这个函数是由 $\ln(9-x^2-y^2)$和 $\sqrt{x^2+y^2-1}$两部分构成,所以要使函数 z 有意义,x,y 必须同时满足

$$\begin{cases}9-x^2-y^2>0,\\ x^2+y^2-1\geqslant 0.\end{cases}$$

即
$$1 \leqslant x^2+y^2<9,$$
所以函数定义域为
$$D=\{(x,y)\mid 1 \leqslant x^2+y^2<9\}.$$
点集 D 在 xOy 平面上表示以原点为圆心，半径为 3 的圆与以原点为圆心的单位圆所围成的圆环域（包含边界曲线内圆 $x^2+y^2=1$，但不包含边界曲线外圆 $x^2+y^2=9$）（如图 8.3 所示）.

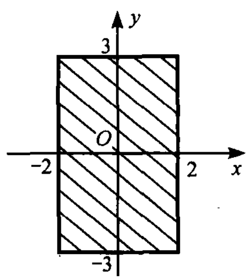

图 8.2

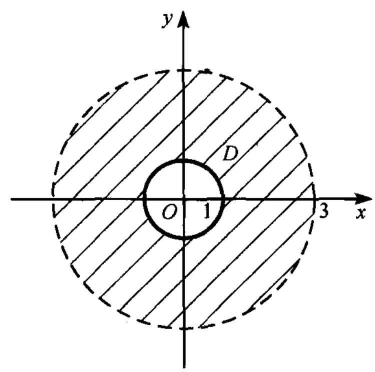

图 8.3

二元函数的定义域一般是由一条或几条曲线围成的一部分平面，称为**区域**，如果区域延伸到无限远，就称这区域是**无界的**，例 4 中函数的定义域就是无界区域. 如果区域总可被包围在一个以原点为圆心而半径适当大的圆内，则称此区域是**有界的**. 如例 5、例 6 中函数的定义域就是有界区域，围成区域的曲线称为区域的**边界**，连同边界在内的区域称为**闭区域**，如例 5 中函数定义域是闭区域. 不包括边界的区域，称为**开区域**. 例 6 中函数的定义域是半开区域.

为了今后讨论方便，下面给出平面邻域概念. 设 $P_0(x_0,y_0)$ 是 xOy 平面上的一个点，δ 是某一正数，称集合
$$\{(x,y)\mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$$
为点 P_0 的 δ **邻域**，记为 $U(P_0,\delta)$.

平面上的邻域与区域概念可以推广到空间，如集合
$$\{(x,y,z)\mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}<\delta\}$$
称为空间点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的 δ **邻域**.

8.1.2　二元函数的几何表示

我们知道，一元函数 $y=f(x)$ 的图像是一条平面曲线，对于二元函数 $z=f(x,y)$，在空间中取定一直角坐标系，将 $z=f(x,y)$ 的定义域 D 画在 xOy 坐标面上，对于 D 中任一点 $P(x,y)$，在空间由 $z=f(x,y)$ 可以确定点 $M(x,y,f(x,y))$，当点

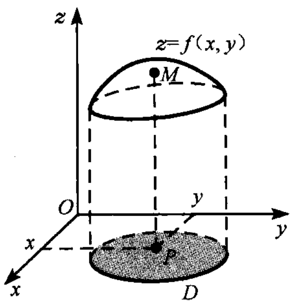

图 8.4

$P(x,y)$在 D 内变动时,点 M 就在空间变动,M 点的轨迹,即空间点集

$$\{(x,y,z)\,|\,z=f(x,y),(x,y)\in D\}$$

就是函数 $z=f(x,y)$的图形,如图 8.4 所示.一般来说,它是一张曲面,这就是二元函数的几何表示.

例 7 函数 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的图形是以原点为中心,以 R 为半径的球面在 xOy 平面上方的部分,如图 8.5 所示.

例 8 $z=x^2+y^2$ 的图形是顶点在原点,以 z 轴为旋转轴的旋转抛物面,如图 8.6 所示.

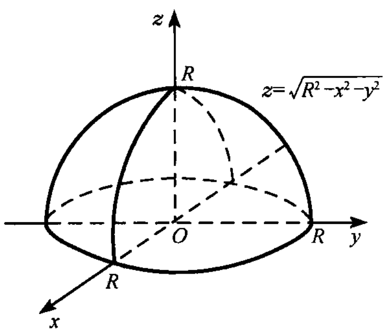

图 8.5

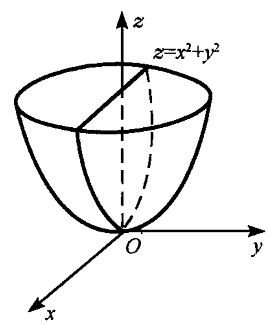

图 8.6

习题 8.1

1. 画出下列平面区域:

(1) $a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d$;　　(2) $x^2+y^2\leqslant 1,x\geqslant 0,y\geqslant 0$;

(3) 由 $y=x,y=\dfrac{x}{2}$及 $x=1$ 所围成的区域;　　(4) $a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2,0<a<b$.

2. 若 $f(x,y)=xy+\dfrac{x}{y}$,求 $f\left(\dfrac{1}{2},3\right),f(1,-1),f\left(\dfrac{1}{x},\dfrac{1}{y}\right)$.

3. 若 $f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2$,求 $f(x,y)$.

4. 求下列各函数的定义域:

(1) $z=\ln(4-xy)$;　　(2) $z=\dfrac{1}{\sqrt{y-\sqrt{x}}}$;

(3) $z=\sqrt{x^2-4}+\sqrt{4-y^2}$;　　(4) $u=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

5. 描绘下列函数的图像:

(1) $z=\sqrt{x^2+y^2}$;　　(2) $z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$.

8.2　二元函数的极限与连续

8.2.1　二元函数的极限

我们已经知道，一元函数 $y=f(x)$ 的极限是描述函数 $f(x)$ 随自变量 x 的变化而变化的趋势. 多元函数的极限在这点上与一元函数类似，但是由于自变量的个数增多，自变量的变化过程较一个自变量的情形复杂多了.

对于一元函数 $y=f(x)$，由极限存在的充要条件可知，极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 是否存在，只须考察左、右极限 $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)$ 是否都存在，且是否相等即可.

对于二元函数 $z=f(x,y)$，当 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 时，函数 $f(x,y)$ 以常数 A 为极限，应该如何描述呢？首先，应注意到，在 xOy 平面上，动点 $P(x,y)$ 趋向于定点 $P_0(x_0,y_0)$ 的方向和路径都可以是任意的，这一点与一元函数极限的情形截然不同. 现在给出二元函数的极限概念.

定义 8.2　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域内（可以不包括点 $P_0(x_0,y_0)$）有定义. 如果动点 $P(x,y)$ 以任何方式趋于点 $P_0(x_0,y_0)$（即 $x\to x_0,y\to y_0$）时，函数 $z=f(x,y)$ 都无限地趋于某一常数 A，那么把常数 A 称为函数 $z=f(x,y)$ 当 $x\to x_0,y\to y_0$（即 $P\to P_0$）时的**极限**，记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A \quad 或 \quad \lim_{P\to P_0}f(x,y)=A.$$

与一元函数的极限概念相仿，二元函数的极限也可用"ε-δ"方式描述如下：

定义 8.3　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域内（可以不包括点 $P_0(x_0,y_0)$）有定义，A 为某一确定常数，如果对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，使得对于适合不等式

$$0<|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

的一切点 $P(x,y)$，都有不等式

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon,$$

成立，那么把 A 称为函数 $z=f(x,y)$ 当 $x\to x_0,y\to y_0$ 时的**极限**，仍用上述极限记号.

为了与一元函数的极限加以区别，我们称二元函数的极限为**二重极限**.

例 1　设函数 $f(x,y)=(x^2+y^2)\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}\,(x^2+y^2\neq 0)$，求证 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=0$.

证　因为

$$\left|(x^2+y^2)\cos\frac{1}{x^2+y^2}-0\right|=|x^2+y^2|\left|\cos\frac{1}{x^2+y^2}\right|\leqslant x^2+y^2,$$

所以，对任给的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$，则当

$$0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$$

时，总有

$$\left|(x^2+y^2)\cos\frac{1}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$$

成立，所以 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0$.

例 2 设函数 $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$，求 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$.

解 因为

$$0\leqslant\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|=\left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right|\mid y\mid\leqslant\mid y\mid\leqslant\sqrt{x^2+y^2}.$$

由两边夹准则得

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0.$$

值得指出，函数 $f(x,y)$ 当 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 时以 A 为极限，是指 $P(x,y)$ 以任何方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数 $f(x,y)$ 都无限接近于 A，因此，若 $P(x,y)$ 以某一特殊方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数 $f(x,y)$ 无限接近某一定数，我们不能由此得出函数 $f(x,y)$ 的极限存在. 倘若 $P(x,y)$ 以不同方式趋于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数 $z=f(x,y)$ 趋于不同的数值，据此可以得出函数极限不存在.

例 3 考察函数 $f(x,y)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$，当 $P(x,y)\to P_0(0,0)$ 时的极限.

解 当 $P(x,y)$ 沿着直线 $y=x$ 和曲线 $y=\sqrt{x}$ 趋于点 $P_0(0,0)$ 时，

$$\lim_{x\to0}f(x,x)=\lim_{x\to0}\frac{x^3}{x^2+x^4}=\lim_{x\to0}\frac{x}{1+x^2}=0,$$

而

$$\lim_{x\to0}f(x,\sqrt{x})=\lim_{x\to0}\frac{x(\sqrt{x})^2}{x^2+(\sqrt{x})^4}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2},$$

这两个极限是不相等的，这表明 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$ 不存在.

8.2.2 二元函数的连续性

在上面二元函数的极限的基础上，我们给出二元函数连续的概念.

定义 8.4 若函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 及其附近有定义，且

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处**连续**. 否则，称函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处**间断**.

如果函数 $z=f(x,y)$ 在平面区域 D 上各点处都连续，就称函数 $z=f(x,y)$ 在区

域 D 上连续，或者说 $z=f(x,y)$ 是**区域 D 上的连续函数**.

例 4　讨论函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点(0,0)处的连续性.

解　由例 1 知，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=0=f(0,0)$，所以函数 $f(x,y)$ 在点(0,0)处连续.

从二元函数的几何表示，我们可以把函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续，直观地想象为曲面 $z=f(x,y)$ 在这点附近是连接着的. 如果 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 不连续，则称点 (x_0,y_0) 为函数 $f(x,y)$ 的间断点，那可能是曲面 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处有个"眼"或者在它附近有条"缝". 例如函数 $z=\sin\dfrac{1}{x^2+y^2-1}$ 在圆周 $x^2+y^2=1$ 上没有定义，所以该圆周上各点都是函数的间断点.

需要指出，一元函数的极限运算法则可推广到多元函数上. 据此，可以证明多元连续函数的和、差、积、商(分母不为零处)均为连续函数.

与一元初等函数相类似，二元初等函数是指由常数以及基本初等函数经过有限次的四则运算和复合所构成的可以用一个解析式表示的函数. 多元连续函数的复合函数也是连续函数.

根据上面指出的连续函数的和、差、积、商的连续性以及连续函数的复合函数的连续性，再考虑到基本初等函数的连续性，我们可以进一步得到如下结论：

一切二元初等函数在其定义区域内都是连续的. 所谓定义区域是指包含在定义域内的区域.

由二元函数的连续性，如果要求在 P_0 点处的极限，而该点又在该函数的定义区域内，则极限就是函数在该点的函数值.

例 5　求 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}\dfrac{x+y}{xy}$.

解　函数 $f(x,y)=\dfrac{x+y}{xy}$ 是初等函数，而点 $P_0(1,2)$ 是其定义域内的一点，所以

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}\frac{x+y}{xy}=f(1,2)=\frac{3}{2}.$$

例 6　求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$.

解　$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy+1-1}{xy(\sqrt{xy+1}+1)}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1}{\sqrt{xy+1}+1}=\dfrac{1}{2}$.

类似于闭区间上一元连续函数的性质，在有界闭区域 D 上连续的二元函数有如下性质：

性质 8.1 若函数 $f(x,y)$在有界闭区域 D 上连续,则 $f(x,y)$在 D 上必取得最大值和最小值.

性质 8.2 若函数 $f(x,y)$在有界闭区域 D 上连续,则 $f(x,y)$在 D 上必有界.

性质 8.3 若函数 $f(x,y)$在有界闭区域 D 上连续,则 $f(x,y)$在 D 上必能取得介于它的任何两个不同的函数值之间的一切值. 特殊地,如果 μ 是函数在 D 上的最大值 M 与最小值 m 之间的某个数,则必有一点 $Q(x_0,y_0)\in D$,使得 $f(x_0,y_0)=\mu$.

习题 8.2

1. 求下列函数的极限:

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}\dfrac{x\sqrt{x+y^2}}{x+y}$;

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x+y)\cos\dfrac{1}{xy}$;

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\dfrac{1}{x^2+y^2}$;

(4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$;

(5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(xy)}{x(y+1)}$;

(6) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{y\sin x}{3-\sqrt{x\sin y+9}}$.

2. 证明下列极限不存在:

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x+y}{x-2y}$;

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$.

3. 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin xy}{y}, & y\neq 0,\\ 0, & y=0\end{cases}$ 的连续性.

4. 下列函数在哪些点不连续:

(1) $z=\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$;

(2) $z=\dfrac{y^2+4x}{y^2-4x}$;

(3) $z=\dfrac{xy}{x+y}$;

(4) $z=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$.

8.3 二元函数的偏导数与全微分

8.3.1 偏导数

1. 偏导数的定义

在研究一元函数时,常常考虑其变化率问题,对于多元函数,同样需要讨论它的变化率. 由于自变量的个数增多,因变量和它的自变量的关系也更为复杂. 这时,常用的办法是分别考察因变量对每个自变量的变化率(其他自变量视为常量),对二元函数 $z=f(x,y)$而言,如果只有自变量 x 变化而 y 固定,这时它就是 x 的一元函数,这函数对 x 求导数,就称为二元函数 z 对 x 的偏导数,即有如下定义:

定义 8.5 设二元函数 $z=f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$的某个邻域内有定义,当 y 固