最新版

重难点突破训练

数学

九年级 全一册

李焕兰 胡春洪 主编

重点难点突破

深入浅出训练

名师精析精讲

思路实用创新

名校名题

湖北长江出版集团
湖北教育出版社

最新版

重难点突破训练

数学

九年级（全一册）

主 编 李焕兰 胡春洪
编 者 廖艳梅 吴玉林 刘兆锋 胡春洪
闵耀明 李焕兰 殷国俊 汪 飞
邓 旭 张 莹 余 帆 陶 俊
林 俊 舒砚萍 陈 明 凌 霄
肖 汉 韩 敏

湖北长江出版集团
湖北教育出版社

(鄂)新登字 02 号

图书在版编目(CIP)数据

重难点突破训练数学九年级(全一册)/李焕兰,胡春洪主编.—武汉:湖北教育出版社,2010.5
ISBN 978-7-5351-4777-6

Ⅰ.重… Ⅱ.①李…②胡… Ⅲ.数学课-初中-习题 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 093618 号

出版 发行:湖北教育出版社　　武汉市青年路 277 号
网　　址:http://www.hbedup.com　　邮编:430015　电话:027-83619605

经　销:新　华　书　店
印　刷:湖北恒泰印务有限公司　　(430223·武汉市江夏庙山开发区汤逊湖工业园)
开　本:880mm×1230mm　1/16　　15.75 印张
版　次:2009 年 2 月第 2 版　　2010 年 5 月第 2 次印刷
字　数:348 千字　　印数:5 001-10 000

ISBN 978-7-5351-4777-6　　定价:26.00 元

目 录

第二十一章　二次根式

21.1　二次根式

重点扫描

1. 一般地，我们把形如$\sqrt{a}\,(a\geqslant 0)$的式子叫做二次根式，“$\sqrt{\ }$”称为二次根号.
2. $\sqrt{a}\,(a\geqslant 0)$是一个非负数.
3. 一般地，$(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0)$，$\sqrt{a^2}=a(a\geqslant 0)$.
4. 用基本运算符号（基本运算符号包括加、减、乘、除、乘方和开方）把数和表示数的字母连接起来的式子，叫**代数式**(algebraic expression).

秦九韶（1202—1261），字道古. 秦九韶与李冶、杨辉、朱世杰并称宋元数学四大家. 于宋淳祐七年(1247)，他写成了一部划时代的数学巨著《数书九章》，他所论的“正负开方术”，被称为“秦九韶程序”. 秦九韶在数学方面的研究成果，比英国数学家取得的成果要早800多年.

难点突破

例 1　下列各式中，一定是二次根式的是________.（填序号）

(1) $\sqrt{\pi}$；(2) $\sqrt{-2}$；(3) $\sqrt{x^2+1}$；(4) $\sqrt{a+4}$；(5) $\sqrt{9}$；(6) $\sqrt{4x^2-4x+1}$；(7) $\sqrt[3]{4x}$；(8) $\sqrt{-x}\,(x\leqslant 0)$.

思路分析：紧扣二次根式定义，先看被开方数是否为非负数，再看根指数是否为2.

解：填(1)、(3)、(5)、(6)、(8).

判断一个式子是否为二次根式，是从“形式”上判断的. 如例1中的$\sqrt{9}$，虽然$\sqrt{9}=3$，但$\sqrt{9}$是二次根式，3却不是二次根式.

例 2　当x取什么实数时，下列各式有意义？

(1) $\sqrt{3-2x}$；(2) $\sqrt{\dfrac{1}{x+2}}$；(3) $\sqrt{(2x+1)^2}$；(4) $\sqrt{x+5}-\sqrt{4-3x}$；

(5) $\dfrac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{1-x}}$.

像$\sqrt{x^2+4x+4}$，$\sqrt{x^2+1}$等二次根式中字母x的取值范围是全体实数.

思路分析：要使二次根式有意义，则被开方数必须是非负数. 若有分母，则分母还应不等于零.

解：(1) 当$3-2x\geqslant 0$，即当$x\leqslant\dfrac{3}{2}$时，$\sqrt{3-2x}$有意义；

(2) 由$\dfrac{1}{x+2}\geqslant 0$，得$x+2>0$，即$x>-2$，∴ 当$x>-2$时，$\sqrt{\dfrac{1}{x+2}}$有意义；

(3) ∵ 无论x为任何实数，均有$(2x+1)^2\geqslant 0$，∴ x为任何实数时，$\sqrt{(2x+1)^2}$有意义；

（4）由$\begin{cases}x+5\geqslant 0,\\4-3x\geqslant 0,\end{cases}$得$-5\leqslant x\leqslant\frac{4}{3}$，∴ 当$-5\leqslant x\leqslant\frac{4}{3}$时，$\sqrt{x+5}-\sqrt{4-3x}$有意义；

（5）由$\begin{cases}2x-1\geqslant 0,\\1-x>0,\end{cases}$得$\frac{1}{2}\leqslant x<1$，∴ 当$\frac{1}{2}\leqslant x<1$时，$\frac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{1-x}}$有意义.

本题综合了三角形三边关系和$\sqrt{a^2}$的化简.

例 3 在$\triangle ABC$中，a、b、c是三角形的三边，试化简$\sqrt{(a-b+c)^2}-2\sqrt{(c-a-b)^2}$.

思路分析：根据三角形三边之间的关系，确定出$a-b+c$与$c-a-b$的符号即可解决问题.

解：∵ a、b、c是三角形的三边，∴ $a+c>b$，$a+b>c$.

∴ $a-b+c=(a+c)-b>0$，$c-a-b=c-(a+b)<0$.

∴ $\sqrt{(a-b+c)^2}-2\sqrt{(c-a-b)^2}=|a-b+c|-2|c-a-b|$

$=a-b+c-2(a+b-c)=3c-a-3b$.

非负数的性质：若几个非负数的和为 0，则这几个非负数都为 0.

例 4 已知等式$\sqrt{2x-3}+\sqrt{y+2}=\sqrt{z-2}+\sqrt{2-z}$在实数范围内成立，求$xyz$的值.

思路分析：由被开方数为非负数，隐含$z=2$，从而等号右边为零.

解：由$\begin{cases}z-2\geqslant 0,\\2-z\geqslant 0,\end{cases}$得$z=2$. 这时等式变为$\sqrt{2x-3}+\sqrt{y+2}=0$.

∵ $\sqrt{2x-3}\geqslant 0$，$\sqrt{y+2}\geqslant 0$，∴ $\sqrt{2x-3}=\sqrt{y+2}=0$.

∴ $x=\frac{3}{2}$，$y=-2$.

∴ $xyz=\frac{3}{2}\times(-2)\times 2=-6$.

求字母的取值范围，通常需要建立关于该字母的不等式或不等式组. 本题利用二次根式和绝对值的非负性建立不等式组.

例 5 已知$3\sqrt{x}+5|y|=7(x>0)$，$2\sqrt{x}-3|y|=m$，求m的取值范围.

思路分析：观察已知等式与待求等式可以发现，两个等式均含有$\sqrt{x}$与$|y|$，所以可以将m看做已知数，先求出用含m的代数式表示$\sqrt{x}$与$|y|$，再由$\sqrt{x}$与$|y|$的非负性建立关于m的不等式组，即可求出其取值范围.

解：由$\begin{cases}3\sqrt{x}+5|y|=7,\\2\sqrt{x}-3|y|=m,\end{cases}$得$\begin{cases}\sqrt{x}=\frac{21+5m}{19},\\|y|=\frac{14-3m}{19}.\end{cases}$

$5\sqrt{x}+2|y|=7+m.$

又∵ $\sqrt{x}>0(x>0)$，$|y|\geqslant 0$，∴ $\begin{cases}\frac{21+5m}{19}>0,\\\frac{14-3m}{19}\geqslant 0.\end{cases}$解得$-\frac{21}{5}<m\leqslant\frac{14}{3}$.

∴ m的取值范围是$-\frac{21}{5}<m\leqslant\frac{14}{3}$.

学法指津

1. 二次根式$\sqrt{a}(a\geqslant 0)$实质是非负数a的算术平方根. 理解二次根式概念注意抓住两个要点：① 从形式上看，二次根式必须有二次根号“$\sqrt{\ }$”；② 被开方数a可以是数，也可以是代数式，但无论是数还是式，都必须“非负”.

2. $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a(a\geqslant0),\\-a(a\leqslant0).\end{cases}$ 当$\sqrt{a^2}=a$时，则$a\geqslant0$；当$\sqrt{a^2}=-a$时，则$a\leqslant0$，两种情况都不要忽略$a=0$.
3. 本节常见的思维误区是：① 具体应用二次根式定义中“$a\geqslant0$”这一条件时，容易因考虑问题不周而出错；② 运用性质解决问题时，性质相混淆.

能力训练

have a try 小试牛刀

1. 下列式子一定是二次根式的是（　　）.

(A) $\sqrt{2}$　　(B) $\sqrt{-3}$　　(C) $\sqrt{-1^2}$　　(D) $\sqrt{x}$

2. (2008年江苏常州市中考题) 若式子$\sqrt{x+5}$在实数范围内有意义，则x的取值范围是（　　）.

(A) $x>-5$　　(B) $x<-5$　　(C) $x\neq-5$　　(D) $x\geqslant-5$

3. 下列说法正确的是（　　）.

(A) $\sqrt{0}$不是二次根式　　(B) 当$a<0$时，$(\sqrt{a})^2=-a$

(C) $\sqrt{10^{-2}}$无意义　　(D) 若$\sqrt{\frac{1}{(x+1)^2}}$有意义，则$x\neq-1$

4. 下列各式中，正确的个数是（　　）.

① $(-\sqrt{2})^2=2$；② $\sqrt{-5^2}=-5$；③ $\sqrt{(-6)^2}=\pm6$；④ $(\sqrt{3})^2=9$.

(A) 0个　　(B) 1个　　(C) 2个　　(D) 3个

5. (2008年安徽省中考题) 化简$\sqrt{(-4)^2}=$________.

6. (2008年贵州遵义市中考题) 若$|a-2|+\sqrt{b-3}=0$，则$a^2-b=$________.

use your head 初露锋芒

7. (2007江西省中考题) 已知$\sqrt{20n}$是整数，则满足条件的最小正整数n为（　　）.

(A) 2　　(B) 3　　(C) 4　　(D) 5

8. 下列各式中，x可取任意实数的是（　　）.

(A) $\sqrt{\frac{1}{x^2}}$　　(B) $\sqrt{x^2-1}$　　(C) $\sqrt{\frac{x^2}{x-2}}$　　(D) $\sqrt{x^2-2x+3}$

9. 若$|a-b+1|$与$\sqrt{a+2b+4}$互为相反数，则$(a+b)^{2009}=$________.

10. 若式子$\sqrt{a-1}+\frac{1}{\sqrt{2-a}}$有意义，则字母$a$的取值范围是________.

11. 若$a=-\sqrt{-b^2}$，则$a^{2010}=$________.

12. 若式子$\sqrt{-x}+\frac{2}{\sqrt{xy}}$有意义，则平面直角坐标系中点$A(x,y)$在第________象限.

13. 在实数范围内因式分解：① $x^2-3=$____________；② $x^4-4x^2+4=$____________.

14. （2008 年广州市中考题）如图 21-1，已知实数 a、b 在数轴上的位置，化简 $\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2}-\sqrt{(a-b)^2}$.

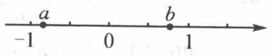


图 21-1

15. (1) 已知 $\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}=y+4$，求 x^y 的平方根；

(2) 若 $x<\sqrt{a+4}-\sqrt{9-2a}+\sqrt{-2008a^2}$，化简 $\sqrt{(x+1)^2}-\sqrt{x^2}$.

16. 已知 $a^2+\sqrt{b-2}=4a-4$，求 $\sqrt{ab}$ 的值.

try your best
挑战自我

17. 若 $\sqrt{(2007-m)^2}+\sqrt{m-2008}=m$，求代数式 $m-2007^2$ 的值.

18. 已知 $\sqrt{25-x^2}-\sqrt{15-x^2}=2$，求 $\sqrt{25-x^2}+\sqrt{15-x^2}$ 的值.

19. 求方程 $\sqrt[3]{x-2}=(1-\sqrt{3-x})^2$ 的整数根.

20. 已知实数 a、b、c 满足 $3\sqrt{a-b}+4\sqrt{c}=16(a\geqslant b, c\geqslant 0)$，且 $x=4\sqrt{a-b}-3\sqrt{c}$，试求 x 的取值范围.

21.2 二次根式的乘除

重点扫描

1. 二次根式的乘法法则：$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}(a\geqslant 0,b\geqslant 0)$；反过来，$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}(a\geqslant 0,b\geqslant 0)$，利用它可进行二次根式的化简.
2. 二次根式的除法法则：$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}(a\geqslant 0,b>0)$；反过来，$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}(a\geqslant 0,b>0)$，利用它可进行二次根式的化简.
3. 满足下列两个条件的二次根式，叫做**最简二次根式**.
   ① 被开方数不含分母；② 被开方数中不含能开得尽方的因数或因式.

二次根式乘法法则和除法法则均可推广到多个二次根式相乘或相除的情形.

难点突破

例 1 计算：

(1) $\sqrt{3}\times\sqrt{6}$；(2) $4\sqrt{27}\times(-2\sqrt{8})$；(3) $\sqrt{6}\times\sqrt{15}\times\sqrt{10}$；

(4) $\sqrt{48}\div\sqrt{6}$；(5) $-\sqrt{27}\div\left(\frac{3}{10}\sqrt{\frac{3}{8}}\right)$；(6) $\sqrt{4a^3b}\div\left(-\sqrt{\frac{a}{4b}}\right)$.

二次根式相乘或相除，可采用根号前系数相乘除，再乘根号内被开方数相乘除后的开方方式.

思路分析： 第(1)、(3)题直接利用公式$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}(a\geqslant 0,b\geqslant 0)$计算；第(2)题要利用乘法的交换律和结合律，将两个系数和两个二次根式分别相乘，同时注意确定积的符号；第(4)～(6)题利用二次根式除法法则计算.

解： (1) $\sqrt{3}\times\sqrt{6}=\sqrt{3\times 6}=\sqrt{3^2\times 2}=3\sqrt{2}$；

(2) $4\sqrt{27}\times(-2\sqrt{8})=4\times(-2)\times\sqrt{27\times 8}=-8\sqrt{3^3\times 2^3}=-48\sqrt{6}$；

(3) $\sqrt{6}\times\sqrt{15}\times\sqrt{10}=\sqrt{6\times 15\times 10}=\sqrt{2^2\times 3^2\times 5^2}=30$；

(4) $\sqrt{48}\div\sqrt{6}=\sqrt{48\div 6}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$；

(5) $-\sqrt{27}\div\left(\frac{3}{10}\sqrt{\frac{3}{8}}\right)=\left(-1\div\frac{3}{10}\right)\sqrt{27\div\frac{3}{8}}=-\frac{10}{3}\sqrt{9\times 8}=-20\sqrt{2}$；

(6) $\sqrt{4a^3b}\div\left(-\sqrt{\frac{a}{4b}}\right)=-\sqrt{4a^3b\div\frac{a}{4b}}=-\sqrt{4a^3b\cdot\frac{4b}{a}}=-4ab$.

例 1 中第(1)题也可这样做：

原式$=\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}=3\sqrt{2}$.

第(2)题可以先化简再运用乘法法则计算. 第(3)题可以仿照第(1)题处理. 注意体会这种分解“凑平方”的方法.

例 2 化简：

(1) $\sqrt{300}$；(2) $\sqrt{0.8a^5b^4c^3}$；(3) $\sqrt{29^2-20^2}$；(4) $\sqrt{5\frac{4}{9}}$；

(5) $\sqrt{\frac{121b^5}{16a^2}}$；(6) $ab\cdot\sqrt{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}(b>a>0)$.

思路分析： 第(1)～(3)题可利用“$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}(a\geqslant 0,b\geqslant 0)$”来化简. 第(1)、(3)题化简前需将被开方数分解因数或分解因式，化成乘积的形式，然后化简. 第(4)～(6)题可利用$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}(a\geqslant 0,b>0)$来化简. 被开方数是带分数时，

应先把它化成假分数.在本章没有特别说明,所有字母都当正数处理.

解:(1) $\sqrt{300}=\sqrt{3\times10^2}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{10^2}=10\sqrt{3}$;

(2) $\sqrt{0.8a^5b^4c^3}=\sqrt{\frac{4}{5}a^5b^4c^3}=\sqrt{\frac{2^2\times5}{5^2}(a^2)^2\cdot a(b^2)^2\cdot c^2\cdot c}$

$=\frac{2}{5}a^2b^2c\sqrt{5ac}$;

(3) $\sqrt{29^2-20^2}=\sqrt{(29+20)(29-20)}=\sqrt{49\times9}=7\times3=21$;

(4) $\sqrt{5\frac{4}{9}}=\sqrt{\frac{49}{9}}=\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{9}}=\frac{7}{3}$;

(5) $\sqrt{\frac{121b^5}{16a^2}}=\frac{\sqrt{121b^4\cdot b}}{\sqrt{16a^2}}=\frac{11b^2\sqrt{b}}{4a}$;

(6) $ab\cdot\sqrt{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}=ab\sqrt{\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}}=\frac{ab\sqrt{b^2-a^2}}{ab}=\sqrt{b^2-a^2}\ (b>a>0)$.

化简时被开方数是带分数的应化为假分数;被开方数是小数的要化为分数;被开方数较大时要分解因数;被开方数是多项式的要因式分解.总之,需要将被开方数化为积或商的形式.同时注意常用下列方法化简:

$$\boxed{\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{\frac{ab}{b^2}}=\frac{\sqrt{ab}}{b}}$$

例 3 已知 $a<b$,化简二次根式 $\sqrt{-a^3b}$ 的结果是( ).

(A) $-a\sqrt{-ab}$ (B) $-a\sqrt{ab}$ (C) $a\sqrt{ab}$ (D) $a\sqrt{-ab}$

思路分析:理解并熟练运用 $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a & (a\geqslant0),\\ -a & (a<0).\end{cases}$ 化简二次根式时,要讨论或判断根号内字母的符号,然后进行化简.

$\sqrt{-a^3b}=\sqrt{a^2\cdot(-ab)}=|a|\sqrt{-ab}$.下面只要确定 a 的符号,即可将绝对值符号化去.依题意,$-ab\geqslant0$,即 $ab\leqslant0$.

若 $a>0$,而 $a<b$,则 $b>0$.故 $ab>0$,显然与 $ab\leqslant0$ 矛盾,则 $a\leqslant0$.从而 $\sqrt{-a^3b}=-a\sqrt{-ab}$.

解:选(A).

此题也可以根据二次根式化简的法则,采取观察、分析符号两个步骤进行排除法解答:

① 观察被开方数:由于被开方数中只有平方因式可从根号内移到根号外,根号内的符号并不发生变化.观察原根式内的符号易知根号内不可能去掉"-"号,故可排除(B)、(C).

② 分析根号外的正负性:由 $\sqrt{-ab}$ 知 $ab<0$,而 $a<b$,故 $a<0$,观察原根号外为"a",应保持正数性,故根号外必为"$-a$",综合可得(A).

例 4 下列各式中哪些是最简二次根式?哪些不是?若不是,请将它们化为最简二次根式.

(1) $\sqrt{0.5}$;(2) $\sqrt{\frac{2}{5}xy}$;(3) $\sqrt{\frac{y}{x}}$;(4) $\frac{\sqrt{x}}{7}$;

(5) $\sqrt{m^2-n^2}\,(m>n>0)$;(6) $\sqrt{9x^3-6x^2+x}\left(x>\frac{1}{3}\right)$;

(7) $\sqrt{27a}$;(8) $\frac{4}{\sqrt{3}}$.

思路分析:判断一个二次根式是不是最简二次根式,就是看它是否满足最简二次根式的两个条件.

解:(4)、(5)是最简二次根式,其余 6 个二次根式都不是最简二次根式.(1) 可以化简为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$;(2) 可以化简为 $\frac{\sqrt{10xy}}{5}$;(3) 可以化简为 $\frac{\sqrt{xy}}{x}$;(6) 可以化简为 $(3x-1)\sqrt{x}$;(7) 可以化简为 $3\sqrt{3a}$;(8) 可以化简为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

对最简二次根式的定义可以作进一步理解:①被开方数中不含分母,也就是被开方数的因数必须是整数,因式必须是整式;②被开方数中每一个因式或因数的指数都是 1.

例 5 有一架未调试的天平,科学老师用它称一铁块的质量,当把铁块放在天平左盘时,称得其质量是 484 g,当把铁块放在天平右盘时,称得其质量是 625 g,试问铁块的实际质量是多少?

思路分析:根据科学知识"动力×动力臂=阻力×阻力臂",通过两次称

出的质量建立方程组来解决问题.

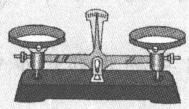
解：设铁块的实际质量为 mg，天平左臂的长为 l_1，天平右臂的长为 l_2，根据题意，得

$$\begin{cases} ml_1=484l_2, \\ ml_2=625l_1. \end{cases}$$于是有 $m^2l_1l_2=484\times625l_1l_2$.

化简，得 $m^2=484\times625$.

$$m=\sqrt{484\times625}=\sqrt{484}\times\sqrt{625}=22\times25=550(\text{g}).$$

答：铁块的实际质量是 550g.



本题中 l_1、l_2 是辅助未知量，它只帮助我们列出含 m 的方程组，而本题不需要求出 l_1、l_2，所以在解题过程中需要把它们消去.

学法指津

1. 要熟记二次根式的乘除法法则，要注意法则的正用、反用及灵活应用，还应注意法则的限制条件.
2. 化简二次根式就是把二次根式化简为最简二次根式.
3. 把二次根式化为最简二次根式的步骤：
   ①“一分”：利用分解因式（数）把被开方数（式）的分子、分母都化成质因数（或因式）的积的形式；
   ②“二移”：即把能开得尽方的因数（或因式），用它的算术平方根代替移到根号外，其中把根号内的分母中的因式移到根号外时，要注意应写在分母的位置上；
   ③“三化”：即化去被开方数中的分母.
4. 本节常见的思维误区是：①忽略法则的适用条件；②不注意式子隐含的条件；③ 分母开方后没写在分母的位置；④误认为 $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$，$\sqrt{a^2-b^2}=a-b$ 等.

能力训练

have a try 小试牛刀

1. （2008 年湖北荆州市中考题）下列根式中属最简二次根式的是（　　）.

   (A) $\sqrt{a^2+1}$　　(B) $\sqrt{\dfrac{1}{2}}$　　(C) $\sqrt{8}$　　(D) $\sqrt{27}$

2. （2008 年广州从化市中考题）把$\dfrac{\sqrt{12ab}}{\sqrt{3a}}$化简后得（　　）.

   (A) $4b$　　(B) $\dfrac{\sqrt{b}}{2b}$　　(C) $\dfrac{1}{2}\sqrt{b}$　　(D) $2\sqrt{b}$

3. （2006 年广州市白云区中考题）下列计算正确的是（　　）.

   (A) $4\sqrt{2}\times2\sqrt{3}=6\sqrt{5}$　　(B) $5\sqrt{2}\times5\sqrt{3}=5\sqrt{6}$

   (C) $2\sqrt{3}\times3\sqrt{3}=6\sqrt{3}$　　(D) $3\sqrt{5}\times5\sqrt{3}=15\sqrt{15}$

4. 下列各式成立的是（　　）.

   (A) $\sqrt{(-3)\times(-5)}=\sqrt{-3}\times\sqrt{-5}$　　(B) $\sqrt{9\dfrac{1}{4}}=\sqrt{9}\times\sqrt{\dfrac{1}{4}}$

(C) $\sqrt{\frac{-7}{-6}}=\sqrt{\frac{7}{6}}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{6}}$

(D) $\sqrt{\frac{-7}{-16}}=\frac{1}{4}\sqrt{-7}$

5.(2008年湖北鄂州市中考题)已知$\sqrt{\frac{1-a}{a^2}}=\frac{\sqrt{1-a}}{a}$,则$a$的取值范围是(　　).

(A) $a\leqslant 0$　　(B) $a<0$　　(C) $0<a\leqslant 1$　　(D) $a>0$

6. 把二次根式$(a-b)\sqrt{\frac{1}{b-a}}$中根号外的因式移入到根号内所得的结果是(　　).

(A) $\sqrt{a-b}$　　(B) $\sqrt{b-a}$　　(C) $-\sqrt{a-b}$　　(D) $-\sqrt{b-a}$

use your head
初露锋芒

7.(2007年广东梅州市中考题)比较$2.5,-3,\sqrt{7}$的大小,正确的是(　　).

(A) $-3<2.5<\sqrt{7}$　　(B) $2.5<-3<\sqrt{7}$

(C) $-3<\sqrt{7}<2.5$　　(D) $\sqrt{7}<2.5<-3$

8.(2008年天津市中考题)若$m=\sqrt{40}-4$,则估计m的值所在的范围是(　　).

(A) $1<m<2$　　(B) $2<m<3$　　(C) $3<m<4$　　(D) $4<m<5$

9. 化简二次根式$a\sqrt{-\frac{a+1}{a^2}}$的结果是(　　).

(A) $\sqrt{a+1}$　　(B) $-\sqrt{a+1}$　　(C) $\sqrt{-a-1}$　　(D) $-\sqrt{-a-1}$

10. 若$a<b$,化简二次根式$\frac{a}{a-b}\sqrt{-\frac{(a-b)^2}{a}}$的结果是(　　).

(A) $\sqrt{a}$　　(B) $-\sqrt{a}$　　(C) $\sqrt{-a}$　　(D) $-\sqrt{-a}$

11. 如果$\sqrt{a^3+a^2}=-a\sqrt{a+1}$,那么实数$a$的取值范围是________.

12. 观察分析下列数据,需找规律:$0,\sqrt{3},\sqrt{6},3,2\sqrt{3},\sqrt{15},3\sqrt{2},\cdots$,那么第10个数据应是________.

13. 如果$\sqrt{30}=a,\sqrt{3}=b$,那么$\sqrt{1000}$用a、b的代数式表示为________.

14. 计算:

(1) $\sqrt{12}\times\sqrt{27}\times\sqrt{3}$;

(2) $\frac{1}{3}\sqrt{30}\times 40\sqrt{\frac{1}{2}}\times\frac{3}{2}\sqrt{2\frac{2}{3}}$;

(3) $\frac{2}{3}\sqrt{ab^3}\cdot\left(-\frac{3}{2}\sqrt{ab}\right)$;

(4) $\sqrt{1\frac{2}{3}}\div\sqrt{2\frac{1}{3}}\times\sqrt{1\frac{2}{5}}$;

(5) $\sqrt{2\frac{1}{2}}\div 3\sqrt{28}\times\left(-5\sqrt{2\frac{2}{7}}\right)$;

(6) $2\sqrt{\frac{a^2-b^2}{6x^2}}\cdot\sqrt{\frac{x^2}{3a+3b}}\div\frac{4}{5}\sqrt{\frac{a-b}{b}}$.

15. 阅读下面题目,然后解答问题.

我们知道,两个正数,较大正数的平方也较大.它们的算术平方根呢?看下面的例子:$\sqrt{25}=5,\sqrt{16}=4$,因

为 5>4，所以 $\sqrt{25}>\sqrt{16}$. 一般地，当 $a>0$，$b>0$ 时，如果 $a>b$，则 $\sqrt{a}>\sqrt{b}$.

例 比较 $2\sqrt{3}$ 与 $3\sqrt{2}$ 的大小.

解： 方法一：$2\sqrt{3}=\sqrt{2^2\times 3}=\sqrt{12}$，$3\sqrt{2}=\sqrt{3^2\times 2}=\sqrt{18}$. ∵ $12<18$，∴ $\sqrt{12}<\sqrt{18}$. 即 $2\sqrt{3}<3\sqrt{2}$.

方法二：$(2\sqrt{3})^2=4\times 3=12$，$(3\sqrt{2})^2=9\times 2=18$. ∵ $12<18$，∴ $2\sqrt{3}<3\sqrt{2}$.

仿照例题的方法试解答下列各题：

(1) 比较 $7\sqrt{6}$ 与 $6\sqrt{7}$ 的大小；(2) 比较 $-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$ 与 $-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{7}}$ 的大小.

16. (2008 年山东威海市中考题) 先化简，再求值：$\frac{1+x}{1-x}\div\left(x-\frac{2x}{1-x}\right)$，其中 $x=\sqrt{2}$.

try your best
挑战自我

17. 观察下列各式：

$$\sqrt{1+\frac{1}{3}}=2\sqrt{\frac{1}{3}},\ \sqrt{2+\frac{1}{4}}=3\sqrt{\frac{1}{4}},\ \sqrt{3+\frac{1}{5}}=4\sqrt{\frac{1}{5}}\cdots$$

(1) 试猜想第 4 个等式，并验证你的猜想；

(2) 试写出第 n（n 为正整数）个等式，并证明该等式成立.

18. 如图 21-2，小正方形边长为 1，连接小正方形的三个顶点，可得 $\triangle ABC$，试问 AC 边上高是多少？

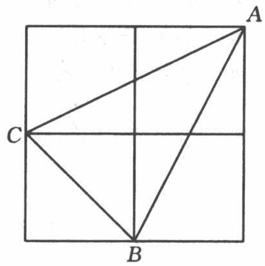


图 21-2

19. 设 $a=\frac{1}{2}\sqrt{3-b}+\frac{1}{3}\sqrt{b-3}+2$，求 $\sqrt{\frac{ab-1}{a+b}}\div\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ 的值.

20. 如图 21-3，双曲线经过点 A 和点 B，已知点 A 的坐标是 $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}},\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$，点 B 的横坐标是 $\frac{2}{\sqrt{6}}$，求点 B 的纵坐标.

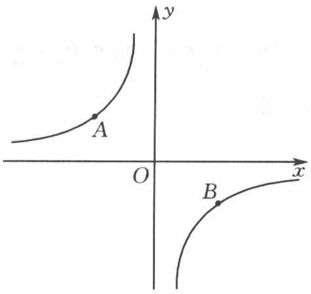


图 21-3

21.3 二次根式的加减

几个二次根式化成最简二次根式后，如果被开方数相同，这几个二次根式叫做同类二次根式. 二次根式加减，实质就是合并同类二次根式.

二次根式的加减，可简述为“先化简，后合并”. 先将不是最简二次根式的式子化为最简二次根式；再类似于合并同类项，将被开方数相同的式子合并. 被开方数不相同的式子不能合并，只能保留在运算结果中.

重点扫描

1. 二次根式加减时，可以先将二次根式化成最简二次根式，再将被开方数相同的二次根式进行合并.
2. 二次根式的混合运算：
   (1) 二次根式的混合运算顺序与整式混合运算顺序一样，先乘方，再乘除，最后加减，有括号的先算括号里面的；
   (2) 在二次根式的运算中，多项式乘法法则和乘法公式仍然适用.

难点突破

例 1 计算：$\left(\sqrt{24}-\sqrt{0.5}+2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)-\left(\sqrt{\frac{1}{8}}-\sqrt{6}+\frac{\sqrt{27}}{3}\right)$.

思路分析： 先将各二次根式化成最简二次根式，再将被开方数相同的二次根式进行合并，即将同类二次根式进行合并.

解： 原式 $=2\sqrt{6}-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2}{3}\sqrt{6}-\frac{\sqrt{2}}{4}+\sqrt{6}-\sqrt{3}$

$$=\left(2+\frac{2}{3}+1\right)\sqrt{6}+\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\sqrt{2}-\sqrt{3}=\frac{11}{3}\sqrt{6}-\frac{3}{4}\sqrt{2}-\sqrt{3}.$$

例 2 计算：

(1) $(\sqrt{18}+\sqrt{12})(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})$； (2) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})$；

(3) $(5+\sqrt{6})(5\sqrt{2}-2\sqrt{3})$； (4) $\frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{a}}{a+\sqrt{ab}}$；

(5) $\frac{x+2\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$.

思路分析： 灵活运用乘法公式，充分发挥因式分解的作用，可以使运算简便，化难为易.

解： (1) $(\sqrt{18}+\sqrt{12})(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})=(\sqrt{18}+\sqrt{12})(\sqrt{18}-\sqrt{12})$

$$=18-12=6;$$

(2) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})=[\sqrt{2}+(\sqrt{3}-\sqrt{5})][\sqrt{2}-(\sqrt{3}-\sqrt{5})]$

$=(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2$

$=2-(3-2\sqrt{15}+5)=-6+2\sqrt{15}$;

(3) $(5+\sqrt{6})(5\sqrt{2}-2\sqrt{3})=(5+\sqrt{6})[5\sqrt{2}-(\sqrt{2})^2\sqrt{3}]$

$=(5+\sqrt{6})[\sqrt{2}(5-\sqrt{6})]=\sqrt{2}(25-6)$

$=19\sqrt{2}$;

(4) $\dfrac{a\sqrt{a}-b\sqrt{a}}{a+\sqrt{ab}}=\dfrac{(a-b)\sqrt{a}}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$;

(5) $\dfrac{x+2xy+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$.

根据题目的结构特点，创造乘法公式运用的条件，简化运算，注意体会(3)、(4)中提公因式，创造应用平方差公式条件的做法. 其中 $a-b$ 分解为 $\boxed{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}$ 是常用方法，但要注意 a、b 须非负.

例 3 若$\dfrac{1}{3-\sqrt{7}}$的整数部分是 a，小数部分是 b，求 $a^2+(1+\sqrt{7})ab$ 的值.

思路分析： 先将$\dfrac{1}{3-\sqrt{7}}$化简，才可以确定其整数部分与小数部分，而确定小数部分的关键是确定整数部分.

要判断一个实数的整数部分与小数部分，应先判断已知实数的取值范围，从而确定其整数部分，再由小数部分=原数－整数部分，确定其小数部分.

解： $\dfrac{1}{3-\sqrt{7}}=\dfrac{3+\sqrt{7}}{(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})}=\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}$.

$\because \sqrt{4}<\sqrt{7}<\sqrt{9}$，$\therefore 2<\sqrt{7}<3$. $\therefore 5<3+\sqrt{7}<6$. $\therefore 2<\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}<3$.

即 $2<\dfrac{1}{3-\sqrt{7}}<3$. 则$\dfrac{1}{3-\sqrt{7}}$的整数部分 $a=2$，小数部分 $b=\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}-2$，

即 $b=\dfrac{\sqrt{7}-1}{2}$. $\therefore a^2+(1+\sqrt{7})ab=2^2+(1+\sqrt{7})\times2\times\dfrac{\sqrt{7}-1}{2}=10$.

例 4 已知 $x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，求：

(1) x^3+2x^2+2007；(2) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$的值.

思路分析： 直接代入计算显然很繁杂，不可取. 需要将条件式与待求式都进行变形，化简，然后整体代入.

注意体会本例中整体代入的思想. 第(1)题方法一是"凑零"法，反复利用 $x^2+x-1=0$ 化简；方法二是"降次"法，反复利用 $x^2=1-x$ 逐步降次. 第(2)题是将条件等式与待求式均用 $x-\dfrac{1}{x}$ 表达，再将 $x-\dfrac{1}{x}$ 的值整体代入解决问题的.

解： $\because x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，$\therefore 2x+1=\sqrt{5}$.

两边平方，化简得 $x^2+x-1=0$.

(1) 方法一：$x^3+2x^2+2007=x(x^2+x-1)+x^2+x+2007$

$=x^2+x+2007=(x^2+x-1)+2008$

$=2008$.

方法二：$\because x^2+x-1=0$，$\therefore x^2=1-x$. $\therefore x^3=x\cdot x^2=x(1-x)=x-x^2$.

故 $x^3+2x^2+2007=x-x^2+2x^2+2007$

$=x^2+x+2007$

$=1-x+x+2007$

$=2008$.

解决本题的关键是发掘隐含条件：$\sqrt{a}$、$\sqrt{b}$和$\sqrt{2009}$是同类二次根式.从而将问题转化为不定方程的整数解的问题.

本题综合了观察、探究、分析的各种能力，要求较高.

(2) $\because x^2+x-1=0$，而$x\neq0$，$\therefore x-\dfrac{1}{x}=-1$.

故 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2=3$.

例 5 已知$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{2009}$，且$b>a>0$，试求整数对$(a,b)$的个数.

思路分析： 根据条件等式$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{2009}$可知，$\sqrt{a}$、$\sqrt{b}$、$\sqrt{2009}$化为最简二次根式后，被开方数应该相同，即它们是同类二次根式. 把$\sqrt{2009}$化为最简二次根式后，根据$b>a>0$，且a、b为整数，即可确定a、b的值.

解： $\because 2009=41\times7^2$，$\therefore \sqrt{2009}=7\sqrt{41}$.

依题意，可设$\sqrt{a}=m\sqrt{41}$，$b=n\sqrt{41}$，则由$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{2009}$得

$m\sqrt{41}+n\sqrt{41}=7\sqrt{41}$. 即$m+n=7$.

又$\because b>a>0$，$\therefore n>m>0$. 故有$\begin{cases}m=1,\\n=6;\end{cases}$ $\begin{cases}m=2,\\n=5;\end{cases}$ $\begin{cases}m=3,\\n=4.\end{cases}$

则满足要求的整数对为(41，1476)，(164，1025)，(369，656)，即满足要求的整数对有 3 对.

学法指津

1. 二次根式的加减运算的关键是把二次根式化为最简二次根式，这是二次根式进行加减运算的前提. 注意与二次根式的乘除法的区别(二次根式乘除法运算前不要求先化简).
2. 二次根式的加减可与整式的加减类比学习.
3. 二次根式的运算中，多项式乘法法则和乘法公式及运算律仍然可以适用.
4. 本节常见的思维误区是：①把不该合并的二次根式进行合并，如$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}$等；②混淆运算法则，如$4\sqrt{3}-\sqrt{3}=4$等.

能力训练

have a try 小试牛刀

1. (2008 年重庆市中考题) 计算$\sqrt{8}-\sqrt{2}$的结果是(　　).

(A) 6　　(B) $\sqrt{6}$　　(C) 2　　(D) $\sqrt{2}$

2. (2008 年山东临沂市中考题) 计算$\sqrt{8}-\sqrt{32}+\sqrt{\dfrac{9}{2}}$的结果是(　　).

(A) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　(B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　(C) $\sqrt{2}$　　(D) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

3. 小明的作业本上有以下四题：

① $\sqrt{8}-\sqrt{3}=\sqrt{8-3}$；② $\sqrt{4}+\sqrt{9}=\sqrt{4+9}$；③ $3\sqrt{2}-\sqrt{2}=2\sqrt{2}$；④ $\sqrt{3a}-\sqrt{2a}=\sqrt{a}$.

其中做错的题有(　　)道.

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

4. (2007 年浙江绍兴市中考题) 下列计算正确的是(　　).