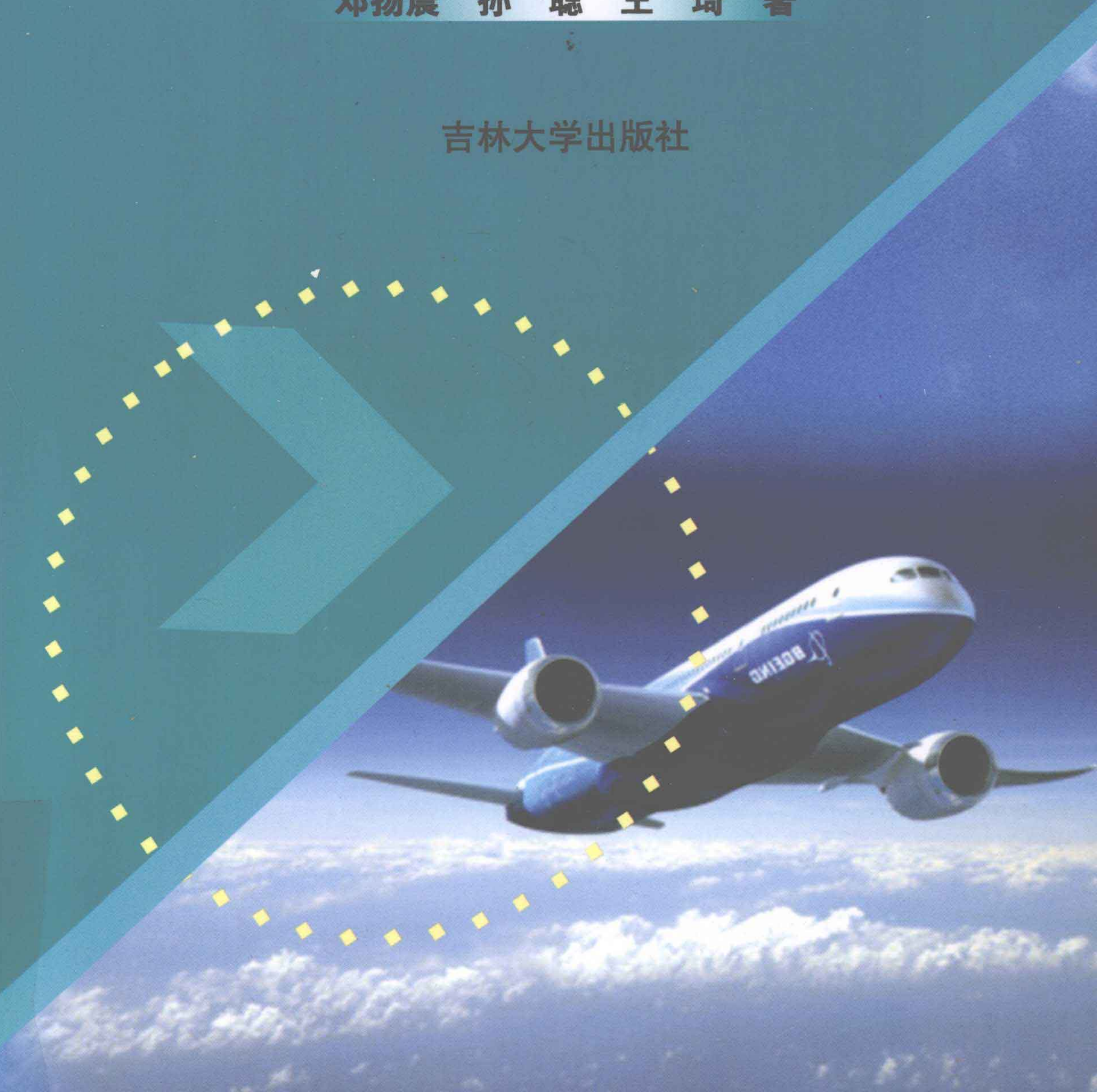
飞机设计中的工程优化方法与建模

邓扬晨 孙 聪 王 琦 著

吉林大学出版社



航空制造技术系列

飞机设计中的工程优化方法与建模

邓扬晨　孙　聪　王　琦　著

吉林大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

飞机设计中的工程优化方法与建模/邓扬晨,孙聪,王琦著.—长春:吉林大学出版社,2009.4
航空制造技术系列
ISBN 978-7-5601-4251-7

Ⅰ.飞… Ⅱ.①邓…②孙…③王… Ⅲ.飞机—最优设计 Ⅳ.V221

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 041326 号

书　名:飞机设计中的工程优化方法与建模
作　者:邓扬晨　孙聪　王琦　著

责任编辑、责任校对:邵宇彤
吉林大学出版社出版、发行
开本:787x1092　毫米　1/16
印张:15.625　　字数:350 千字
ISBN 978-7-5601-4251-7

封面设计:创意广告
长春市东文印刷厂　印刷
2009 年 5 月　第 1 版
2009 年 5 月　第 1 次印刷
定价:25.00 元

社址:长春市明德路 421 号　邮编:130021
发行部电话:0431-88499826
网址:http://www.jlup.com.cn
E-mail:jlup@mail.jlu.edu.cn

本书的研究工作曾得到以下基金的资助：

①中国博士后科学基金(2002032222)

②航空科学基金(03B53003)

③辽宁省首届航空专项基金(20044007)

本书的出版得到沈阳航空工业学院的资助.

在此表示感谢.

目　　录

1 绪　论

自从英国学者给出泰勒展开公式，近三百年来，函数逼近与插值的研究就没有间断.早期的研究主要集中在一元和二元函数上，而多变量近似函数研究则是近 40 年才引起人们关注，这主要是由于大系统的数值仿真与优化的研究，牵引出多变量近似函数，特别是只有 20 多年发展历史的多学科设计优化，使得多变量近似函数问题的研究逐渐成为这个领域的一个中心问题.近年来，结构优化算法中近似函数的质量和近似范围以及保凸性和非单调性等特征变成近似函数研究中的一些重要问题.

国家自然科学基金数学学科的专题之一“大规模、高复杂性问题的建模、优化与决策”和力学学科的专题之一“耦合系统的多学科优化设计理论与数值方法”均体现出多变量近似函数的研究将是专题的核心技术.其实，早在二十年前，多学科设计优化问题在美国就已经初步形成，并已经在许多国家引起了广泛的关注，在航空航天等领域率先得到了一定的应用.

当前，优化设计方法和建模在飞机设计中得到了深入的研究和广泛的应用.优化设计一般来说是针对具体的工程问题来建立其优化模型，同时采用比较有效的寻优方法，通过迭代的方式获得既满足约束条件又使目标函数达到最优的策略.一直以来，结构优化主要包含三个层次：尺寸优化、形状和几何优化、拓扑优化.目前，拓扑优化设计已经成为航空、航天、车辆工程等领域创新产品设计与应用的重点.

1.1 结构优化的发展与现状

结构优化经历了半个世纪的发展，已经成为计算力学中最活跃的分支之一[1]，从各种角度评述结构优化研究进展的报导与评论也非常多[2]-[27]，有兴趣的读者可从书中提供的文献作进一步的深入了解.

结构优化早期有影响的工作是由 Maxwell[28]和 Michell[29]做出的，他们提出了在一种载荷情况下，仅有应力约束的桁架结构布局优化理论.尽管他们的基本理论对工程使用价值不大，但是在理论上却有很好的指导意义.飞机结构部件级的优化始于二战期间，其优化方法是基于“破坏模式同时发生”的假设.该方法用非线性方程组来代替优化模型；几何上用多边形的顶点代替最优点.最早的这项工作是由 Cox 等[30]和 Zahorski[31]完成的.在 50 年代，“结构指数”是一个十分重要的概念，“结构指数”曲线[32]给飞机结构优化带来了很大发展并成为当时有用的设计方法和工具.四十年以后，Haftka[33]就是借鉴上述思路提出了著名的响应面概念.1955 年 Klein[34]首先意识到许多结构优化问题可以表述为数学规划问题，并认识到不等式约束的重要性.1958 年 Heyman 等[35]成功地研究了多种载荷情况下的钢架优化问题.同年，Pearson[36]在研究桁架塑性破坏条件下的最小重量设计时，提出了现代优化设计步骤的雏形.以上的工作为现代结构优化设计理论与方法的发展奠定了基础.

1960 年 Schmit[37]首先提出了新的结构优化概念——结构综合，这标志着现代结构优化思想的形成与确立. 该文献的主要贡献有四个方面：

（1）把数学规划技术与有限元素法相结合，从而形成一般意义下的结构优化.

（2）再一次强调不等式约束在结构优化中的重要性.

（3）基于其工作背景经验，首次提出了变量的上、下限约束.

（4）指出满应力准则法所设计的结构不一定是最轻的，从而间接地说明：当时广泛流行的“同时发生破坏模式”法在理论上存在潜在的缺陷，进而推动了数学规划在结构优化中的应用.

在研究稳定性的优化工作中，Schmit 等[38]发现结构优化存在局部最优解的现象. 随着解题规模、计算工作量的增加，其低效率问题暴露出来，在这种背景下，结构优化出现了另一个分支——优化准则法.

优化准则法分为直观准则法和理性准则法[39]. 前者是基于人们的直觉和经验给出的一些法则，例如满应力准则和满应变能准则等；后者是基于广义拉格朗日条件，即 1951 年由美国的二学者提出的 Kuhn-Tucker 条件[40]作为优化准则. 其中，Kuhn-Tucker 条件的理论基础是 1938 年由 Farkas 提出的 Farkas 定理[41].

1968 年 Prager[42]和 Venkayya[43]各自提出了优化准则法. 准则法的主要特点是把寻找结构最优解转化为寻求结构满足某一准则的解. 它经过一些年的研究取得了很大的进展[44~60]，导出了应力、位移、稳定性、频率、屈曲、颤振等约束下结构的最佳准则，编制了基于有限元结构分析和这些准则的大型优化程序[61~65]. 这些程序可以处理多种约束下各向同性和各向异性材料的结构优化问题，重要的一点是它们的计算量对变量的维数不象规划法那样敏感，有些算法[66]求解效率很高，计算规模非常大，设计变量数目可达一百万. 虽然优化准则法的计算效率高，然而在建立迭代公式中所引入的一些假设通常与所研究的问题有关，因此方法的通用性受到一定的限制；还有，每次迭代要求选取主动约束集，而准则法本身没有提供识别临界约束的手段；最后，也是十分重要的一点，它所建立的递推公式缺乏严格的数学论证，没有收敛性的理论证明，通常是利用数值算例来验证. 也许正是基于上述的原因，人们没有放弃对以数学规划为手段的结构优化方法的研究.

那时，结构优化中的规划法和准则法是属于同时发展. 20 世纪 70 年代，结构优化领域普遍存在三个方面的问题[6]：

（1）所考虑的独立设计变量太.

（2）优化过程中所考虑的状态约束太多.

（3）迭代过程中所使用的结构分析次数太多.

针对上述问题，1974 年 Schmit 等[67]提出了近似概念，它由三个方面组成：

（1）设计变量链化.

（2）约束暂时删除.

（3）利用泰勒展开将隐式约束显式化，从而降低结构分析次数.

近似概念的提出具有深远意义[4]，它结束了 20 世纪 60 年代结构优化 “悲喜交加的时期”[68]，同时，结构优化中的规划法出现两个分支： 一个是原来意义上的规划法； 另一个是基于近似概念的规划法——将原结构优化问题转化为一系列近似优化问题， 通过求解近似问题来逼近原问题的解. 当结构设计最佳化问题被视为数学规划问题时，它具有以下几个特点[69]：

（1）考虑结构系统设计而不是个别元件设计是可能的；在适合定量之处，诸如结构连结件重量那样的量，允许采用统计数据来确定.

（2）不需要预先假定最佳设计的状态特征，更确切地说，它们是作为设计过程的结果而显示出来的.

（3）可以防止在各种载荷情况下有多种的破坏形式.

（4）可以处理由于制造的考虑和所使用的分析方法限制而引起的对设计变量的约束.

（5）可处理包括应力、位移、屈曲、动力和热效应等广泛的结构特征约束.

（6）此方法并不一定与最小重量相联系，可以应用于结构重量以外的其它目标函数.

围绕上述问题及相关专题，众多学者展开了广泛的算法研究. 1975 年 Kelly[70]提出了基于几何规划的对偶公式，结合近似函数构造出一种算法，并指出近似函数应该是值得研究的一个方向. Noor 等[71、72]利用泰勒展开和简缩基法进行了结构再分析的研究. 1976 年 Cassis 等[73]结合近似概念建立了扩展的内罚函数法. 为解决优化过程中出现的设计点在可行域之外问题，Haftka 等[74]提出了二次扩展的内罚函数法. Schmit 等[75]将近似概念与数学规划和有限元相结合， 编出 ACCESS 1 结构优化软件. 1978 年 Schmit 等[76]在研究含屈曲约束的最小重量问题时，结合近似概念提出了多级优化方法，并成功地应用到复合材料夹筋板的优化设计中[77]. 1979 年 Verderplaats[78]利用近似函数代替气动力分析进行了翼型的优化设计. 1981 年 Kirsch[79]利用近似概念和多级优化方法相结合进行了几何优化的研究. 同年，其利用近似技术[80]比较系统地进行了结构重分析的研究. 1988 年 Verderplaats 等[81、82]将节点力作为中间函数，进行几何优化的研究，取得了很好的效果. 1990 年周明等[83]提出了二级近似概念. 1994 年 Naqib 等[84]提出一种能够降低刚阵求逆次数的近似算法. 在研究阻尼结构的频率问题，Thomas 等[85]提出一种考虑约束非线性关系的近似方法，数值算例表明：它具有很快的收敛速度. 1996 年 Kirsch[86]提出了一种组合二项式简缩基近似技术，数值算例表明：它具有很大的近似范围，属于全局近似技术. 1997 年 Garcelon 等[87]采用组合近似技术进行了翼面结构损伤容限的优化设计研究. 1998 年 Balabanov 等[88]利用响应面技术（一种近似手段），获得了具有比传统的飞机结构重量方程精度更高的效果. 许素强等[89]提出了一种高效的自适应两点近似函数并进行了应用的探索[90]. 1999 年 Kirsch[91]利用 Gram-Schmidt 正交化技术，提出了具有变量解耦特征的组合近似方法，数值算例表明：该方法既有很高的计算效率，又有很大的近似范围. 2000 年程耿东等[92]利用混合变量[93]的线性组合和增加修正项的方法来构造基于两点的近似函数. 在文献[92]方法的基础上，2001 年该作者提出了基于三点的近似函数.

最近几年，优化准则法的应用研究[94]仍在进行. 但是，人们认识到准则法和规划法的结合与统一却是在 20 世纪 70 年代末和 80 年代初[20]. 最出色的工作是由 Fleury[95]在 1979 年完成的. 对偶法在结构优化的应用导致准则法和规划法的统一[96]. 对偶法的理论基础为 KuhnTucker 条件，这是因为对偶变量正好为广义拉格朗日乘子. 一般地，对于结构优化问题，和独立设计变量相比，严格临界或潜在临界的状态约束通常少很多，因而对偶问题要比原问题的规模小得多，这一点首先被 Fleury[97]所意识到. 随后 Fleury 与 Schmit[98]合作将对偶法与近似概念相结合，并编制了 ACCESS 3 结构优化软件. 在文献[98]方法的基础上，该作者[99]加入了新的梯度投影法到 ACCESS 3 中，并进行了离散-连续变量的结构优化研究. Lootsma [100]针对非线性优化问题，将原问题和对偶问题的解法进行了对比，研究表明：对于变量是可分离或者耦合程度低的优化问题，对偶方法具有极大的优势. 1983 年

Fleury 等[101]提出了广义优化准则法来求解组合件的优化问题，文中的近似函数可看作是倒变量展开的进一步延伸，它亦是以后广为流行的中间变量法和自适应近似函数法的基础. 1985 年 Braibant 等[102]将对偶法[97]与混合近似[103]结合用于结构形状优化研究. 1988 年 Kirsch 等[104]利用内力近似的手段来提高优化过程中的近似精度，通过四种方式的数值比较，发现改善的二项式近似效果最佳. 1994 年 Vanderplaats 等[105]利用对偶理论与近似概念相结合进行了几何优化的研究. 正是由于对偶法对变量维数的不敏感性，使得它在结构优化中引起了广泛的关注与兴趣 [106—114].

另外，如何有效地求得约束函数（或中间函数）对设计变量（或中间变量）的灵敏度也是近些年来开展深入研究的方向[26]. 除了近似概念可以提高优化效率，近似敏度、解析或半解析敏度也都是提高优化效率的有效措施. Scotti[115]利用不完全的两点信息来构造近似敏度公式. Chattopadhyay 等[116、117]将多集分解优化法与半解析敏度法相结合，进行了近场和远场的流场分析与综合. Shyy 等[118]将半解析敏度与低阶、高阶有限单元相结合，利用 Conlin 软件进行了结构的形状优化. Haftka 等[119]对当时的敏度分析做了比较全面地综述. Renaud 等[120]将自动差分用于健壮优化[121、122]中，使得优化效率得到了极大的提高.

目前多数优化算法是通过采用适当的运动限（Move-Limits）才得以保证算法的数值收敛性[123]. Wujek[124]对近期的运动限和信赖域（Trust Region）的研究进展做了比较详细的评述. Hyams 等[125]对七种运动限做了比较详细的研究. Haftka 等[126]曾指出：一般地，在优化迭代过程中，运动限是逐渐缩小的. 在这一指导思想下，Pourazady 等[127]提出一种以指数形式递减的运动限. Thomas 等[128]提出一种基于经验的启发式的运动限. 其实，事先对优化问题的运动限加以合理估计却不是一件易事. Bloebaum 等[129]认为：在优化过程中，对优化结果影响不大的变量，应该施加严格的运动限，反之亦然. 他们采用了有效系数[130]来实现这一做法. 还有些学者[131—134]从事信赖域的研究工作. 信赖域的概念是为研究保证牛顿类型算法的全局收敛性而提出的[124]. 除了算法收敛问题，确定可行点也是一个专门的问题，Elwakeil 等[135]对该问题进行了深入研究，指出还没有哪种算法能够保证：从任意一点（可行域之外）开始迭代，一定能够找到一个可行点（可行域之内）.

1.2 飞机多学科设计优化的发展与现状

尽管多学科设计优化的思想出现很早，由于技术手段上的原因直到 20 世纪 80 年代末期才形成一个新的学科领域，并首先在航空航天领域兴起. 这是由于航空和航天系统变得日益复杂，并且，飞机设计本身就是多学科设计优化研究和应用的平台，这使得该领域的专家和学者最先意识到：开展多学科设计优化在需求上的迫切性和技术上的可能性. 十多年前， 有文章[136]专门阐述该学科研究的意义、定义、研究内容以及未来发展方向与趋势；近年来，一些学者对多学科设计优化近几年的研究和发展做过比较全面的综述[137—146].

传统的飞机设计技术采用串行设计模式，将各学科之间的相互关联人为地分开（例如：总体、气动、隐身、结构强度、动力、航电、飞控等），使得一个耦合系统变成了由彼此相互独立的若干子系统来组合；基于多学科设计优化的飞机设计技术则采用并行设计模式，它综合考虑各学科之间的相互关系，认为各子系统之间的耦合度是一个不容忽视的重要因素，这与并行工程思想是一致的.

目前多学科设计优化研究的两项主要内容[145]是面向设计的多学科分析和多学科设计

优化算法.而近似技术与方法则是两项工作中的公共部分，这主要基于以下三个原因：

（1）对任何一个中等规模的优化问题而言，直接使用设计空间搜索（例如：有限元素法，流场差分法）来计算目标函数与约束函数的信息所需的运算量太大，以致无法承受.

（2）不同的学科分析模块常常装在不同部门的计算机上，甚至装在不同的地方，利用设计空间搜索程序进行信息传递则变得十分不方便.

（3）有一些学科的响应量，作为设计变量的函数，会产生噪音及偏差.如果不用光滑的近似函数去代替，而采用效率低的非敏度的优化方法，反而降低了设计空间搜索方法的效果.

因此近似技术与方法的研究仍然是多学科设计优化领域研究热点之一和当务之急.

多学科设计优化算法在飞机设计中已经有许多应用[146].Grossman 等[147]利用嵌入式分析设计法[147、148]对滑翔机机翼进行气动、结构、性能一体化分析与设计.Korte 等[149]用上述相同方法对推进系统、气动、结构一体化进行了设计研究.上述研究表明：

（1）飞机设计中各学科之间存在明显的耦合关系.

（2）考虑这些耦合因素，能够明显提高飞机设计质量.但是该方法的一个不足是需要的系统分析次数太多.为解决这些问题，往往要采用近似技术，例如：代理模型（Surrogate Model）.如可变复杂性模型方法[147]已应用于高速民机的多学科优化设计之中[150].

响应面法作为多学科优化设计的近似方法越来越受到重视[141].Venter 等[151]利用高阶多项式所构造的响应面，获得很好的近似精度和较大的近似范围.随着变量的增加，响应面的近似质量一般要下降，计算量也要增加.针对这一问题，Balalanov 等[152]提出了合理设计变量法来加以解决，通过对飞机翼面结构重量的评估和对飞机翼面流场升力、阻力系数的估算，验证了算法的有效性.Papila 等[153]利用响应面技术对高速民机的重量方程进行了替代计算，使得噪声和模型误差均有较大程度的降低.

在多学科设计优化中减小计算量的有效方法之一是采用敏度分析技术.为了解决耦合系统灵敏度分析问题，Sobieszczan-Sobieski[154]提出了全局敏度方程.基于全局敏度方程的优化方法已经被许多研究人员[139]、[155~157]用于飞机一体化设计之中.Hajela 等[139]探索了通用航空飞机的气动、性能、结构、控制一体化设计的方法.方卫国等[157]探索了亚音速喷气教练机总体方案优化设计的方法.

并行子空间优化、协作优化以及神经网络等方法是目前多学科设计优化领域中研究和应用比较多的方法.Eason 等[158]采用并行子空间优化算法开发了 SYSOPT 优化软件，并将其应用于飞机概念设计之中.Wujek 等[159]利用改进的并行子空间优化算法[160、161]进行了通用航空飞机的方案初步设计.Stelmack 等[162]利用类似于并行子空间设计算法[163]来解决含有离散、连续混合变量的起落架刹车装置的设计.余庆雄等[164]也采用类似算法进行了电动无人飞机一体化设计.Braun 等[165]利用协作优化算法[166]进行了空间飞行器的优化设计.Sobieszczan-Sobieski 等[167]利用类似算法进行了飞机气动、结构、性能一体化设计.Lin 等[168]利用田口分析法（Taguchi Method）[169]、模糊推理法[170]以及神经网络映射法[171]进行了飞机结构、动力一体化设计.Seeley 等[172]将具有高阶的近似函数与并行处理技术相结合，进行了复合材料层板动力特性的优化设计.

1.3 结构优化中近似函数的发展与现状

多数的结构优化问题都是通过迭代来完成的，对于大型的优化问题，通常最主要的困难是计算量太大. 降低结构分析次数的有效途径之一是结构重分析技术[173]. 一般它由三类方法组成[174]：直接方法[175—180]、迭代方法[181—183] 和近似方法[71、72]、[184、185]. 近似概念[67]的提出，推动了近似方法的系统研究[186]. 结构优化中近似概念的运用，是基于下述三点原因[186]：

（1）问题的规模通常很大.

（2）每次设计分析的计算量通常很大.

（3）优化过程中设计分析的次数通常很多. 因而近似函数的研究逐渐成为近似方法研究的中心问题之一[110].

一般地，近似函数的构造是从四个不同方面入手[91]：

（1）局部单点近似（Local Single-Point Approximation）.

（2）一定范围两点近似（Middle Range Two-Point Approximation）.

（3）全局多点近似（Global Multi-point Approximation）.

（4）组合近似（Combined Approximation）.

因此可以说，高质量的近似函数在结构优化、多学科设计优化中占有十分重要的地位. 下面简要给出众多学者在该领域的研究成果：（这里仅给出函数形式）

（1）目前广为使用的设计变量泰勒一阶展开技术[187]：

$$\bar{g}(X)=g(X^{(0)})+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g(X^{(0)})}{\partial x_i}\cdot(x_i-x_i^{(0)}) \tag{1-1}$$

这里 $X^{(0)}=(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})^T$ 为近似函数 $\bar{g}(X)$ 的展开点；$g(X^{(0)})$ 和 $\frac{\partial g(X^{(0)})}{\partial x_i},i=1,\cdots,n$ 分别为展开点的函数值和一阶敏度值. 以下情况类似.

（2）同样被广泛应用的倒设计变量泰勒一阶展开技术[188]：

$$\bar{g}(X)=g(X^{(0)})+\sum_{i=1}^{n}(x_i^{(0)})^2\cdot\frac{\partial g(X^{(0)})}{\partial x_i}\cdot\left(\frac{1}{x_i}-\frac{1}{x_i^{(0)}}\right) \tag{1-2}$$

（3）改进的倒设计变量近似[189、190]：当设计变量的分量很小以至趋向零时，（1-2）式的近似误差很大，为克服这一不足，文献[189]提出了如下的修正公式.

$$\bar{g}(X)=g(X^{(0)})+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g(X^{(0)})}{\partial x_i}\cdot(x_i-x_i^{(0)})\cdot\left(\frac{x_{mi}+x_i^{(0)}}{x_{mi}+x_i}\right) \tag{1-3}$$

这里 $x_{mi}(i=1,\cdots,n)$ 是由经验知识来确定的调节参数. 其中，文献[190]首先提出了两点近似概念，并由另一点的敏度信息来确定（1-3）式中 $x_{mi}(i=1,\cdots,n)$ 的值，这是两点近似概念最早的应用.

（4）广义指数法[191]：

$$\phi_k=\begin{cases}\frac{1}{p-1}\cdot t_k^{1-p} & p\neq 1\\ -\ln(t_k) & p=1\end{cases}\qquad k=1,\cdots,m \tag{1-4a}$$

（1-4a）式反映中间变量$t_k(X)$的一种仿射变换关系.

$$t_k(X)=t_k^{(0)}+\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot f_{ik}\qquad k=1,\cdots,m \tag{1-4b}$$

（1-4b）式反映设计变量的一种链化关系（Variable-Linking）. $t_k^{(0)}$为参考参数，f_{ik}为变量链化系数.

$$\begin{cases}\bar{g}(X)=g(X^{(0)})+\dfrac{1}{p-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left\{\dfrac{\partial g(X^{(0)})}{\partial x_i}\cdot\sum_{k=1}^{m}[t_k^{1-p}(X)-t_k^{1-p}(X^{(0)})]\Big/\dfrac{\partial\phi_k}{\partial x_i}\right\} & p\neq 1\\ \bar{g}(X)=g(X^{(0)})-\sum_{i=1}^{n}\left\{\dfrac{\partial g(X^{(0)})}{\partial x_i}\cdot\sum_{k=1}^{m}\ln\left[\dfrac{t_k(X)}{t_k(X^{(0)})}\right]\Big/\dfrac{\partial\phi_k}{\partial x_i}\right\} & p=1\end{cases} \tag{1-4c}$$

$$\frac{\partial\phi_k}{\partial x_i}=-t_k^{-p}\cdot f_{ik} \tag{1-4d}$$

其中，参数p是基于经验知识来选取的.

（5）混合变量法[103]：

$$\bar{g}(X)=g(X^{(0)})+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g(X^{(0)})}{\partial x_i}\cdot G_i\cdot(x_i-x_i^{(0)}) \tag{1-5a}$$

$$G_i=\begin{cases}1 & \dfrac{\partial g(X^{(0)})}{\partial x_i}\geq 0\\ x_i^{(0)}\Big/x_i & \text{其它}\end{cases} \tag{1-5b}$$

该方法的优点是所构造的近似函数为凸函数.

（6）倒变量的二阶展开法[126]：

$$\begin{aligned}\bar{g}(X)=g(X^{(0)})&+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g(X^{(0)})}{\partial x_i}\cdot(x_i-x_i^{(0)})\cdot\left(\frac{x_i^{(0)}}{x_i}\right)\cdot\left(2-\frac{x_i^{(0)}}{x_i}\right)\\&+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 g(X^{(0)})}{\partial x_i\partial x_j}\cdot(x_i-x_i^{(0)})\cdot(x_j-x_j^{(0)})\cdot\left(\frac{x_j^{(0)}}{x_j}\right)\end{aligned} \tag{1-6}$$

其中，除零阶和一阶信息为已知外，二阶敏度亦为已知信息.

（7）拟多项式(Posynomial)法[70]：

$$\bar{g}(X)=g(X^{(0)})+\sum_{i=1}^{n}c_i\cdot x_i^{d_i} \tag{1-7}$$

其未知参数$g(X^{(0)})$、c_i和$d_i(i=1,\cdots,n)$利用一点的函数值、一阶和二阶敏度值来确定.

（8）两点投影法[190]：它是一种埃尔米特多项式形式的近似函数，其中，两点的函数值和一阶敏度值为已知信息.

$$P=X^{(1)}+\xi\cdot(X^{(2)}-X^{(1)}) \tag{1-8a}$$

$$\xi = \frac{(X - X^{(1)})^T (X^{(2)} - X^{(1)})}{\left\| X^{(2)} - X^{(1)} \right\|^2} \tag{1-8b}$$

$$\overline{g}_P(X) = g_P(P) + \sum_{i=1}^{n} \left[(1-\xi) \cdot \frac{\partial g(X^{(1)})}{\partial x_i} + \xi \cdot \frac{\partial g(X^{(2)})}{\partial x_i} \right] \cdot (x_i - p_i) \tag{1-8c}$$

$$g_P(P) = N_1(\xi) \cdot g(X^{(1)}) + N_2(\xi) \cdot d_1 + N_3(\xi) \cdot g(X^{(2)}) + N_4(\xi) \cdot d_2 \tag{1-8d}$$

$$\left. \begin{aligned} N_1(\xi) &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\ N_2(\xi) &= \xi - 2\xi^2 + \xi^3 \\ N_3(\xi) &= 3\xi^2 - 2\xi^3 \\ N_4(\xi) &= -\xi^2 + \xi^3 \end{aligned} \right\} \tag{1-8e}$$

$$d_i = (X - X^{(1)})^T \cdot \nabla g(X^{(i)}) \qquad i = 1,2 \tag{1-8f}$$

（9）两点乘积项近似法[192]：

$$g(X) = c\prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i} \tag{1-9a}$$

$$\begin{aligned} E(X) = \frac{1}{2} \Bigg\{ & \left[g(X^{(2)} - c\prod_{i=1}^{n} (x_i^{(2)})^{a_i} \right]^2 + \left[g(X^{(1)} - c\prod_{i=1}^{n} (x_i^{(1)})^{a_i} \right]^2 \\ & + \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial g(X^{(2)})}{\partial x_j} - c\prod_{i=1}^{n} (x_i^{(2)})^{a_i} \cdot \ln(x_j) \right] \Bigg\} \end{aligned} \tag{1-9b}$$

通过对（1-9b）式最小化和利用最小二乘法来确定（1-9a）式中的未知参数.其中，两点的函数值和一阶敏度值为已知信息.

（10）两点指数法——TPEA 法[193]和 TPEA-Change 法[194]：

$$\overline{g}(X) = g(X^{(2)}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i^{(2)})^{1-p_i}}{p_i} \cdot \frac{\partial g(X^{(2)})}{\partial x_i} \cdot \left[x_i^{p_i} - (x_i^{(2)})^{p_i} \right] \tag{1-10a}$$

$$p_i = 1 + \frac{\ln\left[\dfrac{\partial g(X^{(1)})}{\partial x_i} \Big/ \dfrac{\partial g(X^{(2)})}{\partial x_i} \right]}{\ln\left(\dfrac{x_i^{(1)}}{x_i^{(2)}} \right)} \qquad i = 1, \cdots, n \tag{1-10b}$$

$$-1 \le p_i \le 1 \qquad i = 1, \cdots, n \tag{1-10c}$$

尽管两点信息为已知，但是 $g(X^{(0)})$ 这一条件没有被利用.由（1-10a）式、（1-10b）式和（1-10c）式组合的近似函数最早出现在文献[193]；去掉（1-10c）式的限制，所形成的近似函数最先出现在文献[194].

（11）两点有理分式法[195、196]：

$$\overline{g}(X)=g(X^{(2)})+\frac{\nabla^T g(X^{(2)})\cdot(X-X^{(2)})}{1+\beta^T\cdot(X-X^{(2)})} \tag{1-11a}$$

$$\beta=\begin{cases}(0,\cdots,0)^T & c_0\cdot c_1\le 0\\ \left[\sqrt{c_0/c_1}\cdot\nabla g(X^{(0)})-\nabla g(X^{(1)})\right]\Big/c_0 & c_0\cdot c_1>0\end{cases} \tag{1-11b}$$

$$\begin{cases}c_0=\nabla^T g(X^{(1)})\cdot(X^{(1)}-X^{(2)})\\ c_1=\nabla^T g(X^{(2)})\cdot(X^{(1)}-X^{(2)})\end{cases} \tag{1-11c}$$

尽管两点信息全部利用. 但是该近似函数没有保证$\overline{g}(X^{(1)})=g(X^{(1)})$这一条件.

（12）两点自适应非线性近似法——TANA 法[197]：

$$\overline{g}(X)=g(X^{(2)})+\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i^{(2)})^{1-r}}{r}\cdot\frac{\partial g(X^{(2)})}{\partial x_i}\cdot\left[x_i^r-(x_i^{(2)})^r\right] \tag{1-12a}$$

$$\overline{g}(X^{(1)})=g(X^{(2)})+\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i^{(2)})^{1-r}}{r}\cdot\frac{\partial g(X^{(2)})}{\partial x_i}\cdot\left[(x_i^{(1)})^r-(x_i^{(2)})^r\right] \tag{1-12b}$$

r 按（1-12b）式求解，其解法采用文献[198]中附录 B 的方法. 由于只利用了一点的敏度信息，因此，该近似函数无法保证另一点的敏度条件.

（13）两点自适应非线性近似法 1——TANA 1 法[194、199]：

$$\overline{g}(X)=g(X^{(1)})+\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i^{(1)})^{1-p_i}}{p_i}\cdot\frac{\partial g(X^{(1)})}{\partial x_i}\cdot\left[x_i^{p_i}-(x_i^{(1)})^{p_i}\right]+\varepsilon_1 \tag{1-13a}$$

$$\varepsilon_1=\overline{g}(X^{(2)})-\left[g(X^{(1)})+\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i^{(1)})^{1-p_i}}{p_i}\cdot\frac{\partial g(X^{(1)})}{\partial x_i}\cdot\left[x_i^{p_i}-(x_i^{(1)})^{p_i}\right]\right] \tag{1-13b}$$

$p_i(i=1,\cdots,n)$ 的求解按文献[193]中的方法进行.

（14）两点自适应非线性近似法 2——TANA 2 法[194、199]：

$$\begin{aligned}\overline{g}(X)=g(X^{(2)})&+\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i^{(2)})^{1-p_i}}{p_i}\cdot\frac{\partial g(X^{(2)})}{\partial x_i}\cdot\left[x_i^{p_i}-(x_i^{(2)})^{p_i}\right]\\&+\frac{1}{2}\varepsilon_2\sum_{i=1}^{n}\left[x_i^{p_i}-(x_i^{(2)})^{p_i}\right]^2\end{aligned} \tag{1-14a}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial g(X^{(1)})}{\partial x_1}=\left(\dfrac{x_1^{(1)}}{x_1^{(2)}}\right)^{p_1-1}\cdot\dfrac{\partial g(X^{(2)})}{\partial x_1}+\varepsilon_2\left[(x_1^{(1)})^{p_1}-(x_1^{(2)})^{p_1}\right]\cdot(x_1^{(1)})^{p_1-1}\cdot p_1\\ \vdots\\ \dfrac{\partial g(X^{(1)})}{\partial x_n}=\left(\dfrac{x_n^{(1)}}{x_n^{(2)}}\right)^{p_n-1}\cdot\dfrac{\partial g(X^{(2)})}{\partial x_n}+\varepsilon_2\left[(x_n^{(1)})^{p_n}-(x_n^{(2)})^{p_n}\right]\cdot(x_n^{(1)})^{p_n-1}\cdot p_n\\ g(X^{(1)})=g(X^{(2)})+\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i^{(2)})^{1-p_i}}{p_i}\cdot\frac{\partial g(X^{(2)})}{\partial x_i}\cdot\left[x_i^{p_i}-(x_i^{(2)})^{p_i}\right]\\ \qquad+\dfrac{1}{2}\varepsilon_2\sum\left[x_i^{p_i}-(x_i^{(2)})^{p_i}\right]^2\end{cases} \tag{1-14b}$$

尽管它完全满足两点信息条件，但是，它的系数求解计算量比较大，关于这一点，许素强等[89]有专门的论述.

（15）两点自适应非线性近似法3——TANA 3法[89、90]：

$$\bar{g}(X)=g(X^{(2)})+\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i^{(2)})^{1-p_i}}{p_i}\cdot\frac{\partial g(X^{(2)})}{\partial x_i}\cdot\left[x_i^{p_i}-(x_i^{(2)})^{p_i}\right]+\frac{1}{2}\varepsilon(X)\cdot\sum_{i=1}^{n}\left[x_i^{p_i}-(x_i^{(2)})^{p_i}\right]^2 \tag{1-15a}$$

$$\varepsilon(X)=\frac{H}{\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{n}\left[x_i^{p_i}-(x_i^{(j)})^{p_i}\right]^2} \tag{1-15b}$$

$$H=2\left[g(X^{(1)})-g(X^{(2)})-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i^{(2)})^{1-p_i}}{p_i}\cdot\frac{\partial g(X^{(2)})}{\partial x_i}\cdot\left[(x_i^{(1)})^{p_i}-(x_i^{(2)})^{p_i}\right]\right] \tag{1-15c}$$

$p_i(i=1,\cdots,n)$ 的求解按（1-10b）式进行. 在完全满足两点信息条件下，该近似函数的所有系数是按解析封闭解的形式给出的，因此，其计算量要比TANA 2法小很多.

（16）一种两点组合法[200]：

$$\bar{g}(X)=r+\sum_{i=1}^{n}\left[p_i(U_i-x_i)^{s_i}+q_i(x_i-L_i)^{s_i}\right] \tag{1-16a}$$

$$p_i=\begin{cases}-\dfrac{1}{s_i\cdot(U_i-x_i^{(1)})^{s_i-1}}\cdot\dfrac{\partial g(X^{(1)})}{\partial x_i} & \dfrac{\partial g(X^{(1)})}{\partial x_i}>0\\ 0 & \dfrac{\partial g(X^{(1)})}{\partial x_i}\le 0\end{cases} \tag{1-16b}$$

$$q_i=\begin{cases}-\dfrac{1}{s_i\cdot(x_i^{(1)}-L_i)^{s_i-1}}\cdot\dfrac{\partial g(X^{(1)})}{\partial x_i} & \dfrac{\partial g(X^{(1)})}{\partial x_i}<0\\ 0 & \dfrac{\partial g(X^{(1)})}{\partial x_i}\ge 0\end{cases} \tag{1-16c}$$

$$r=g\left(X^{(1)}\right)+\sum_{i=1}^{n}\frac{D_i}{s_i}\cdot\frac{\partial g(X^{(1)})}{\partial x_i} \tag{1-16d}$$

$$D_i=\begin{cases}U_i-x_i^{(1)} & \dfrac{\partial g(X^{(1)})}{\partial x_i}>0\\ 0 & \dfrac{\partial g(X^{(1)})}{\partial x_i}=0\\ x_i^{(1)}-L_i & \dfrac{\partial g(X^{(1)})}{\partial x_i}<0\end{cases} \tag{1-16e}$$

该近似函数中的有关参数利用前一点的一阶敏度和当前点的二阶敏度来确定.

（17）两点有理分式组合法[39]：

$$\bar{g}(X)=g(X^{(2)})+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i(x_i-x_i^{(2)})}{x_i+\dfrac{x_i^{(1)}+x_i^{(2)}}{2}}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i(x_i-x_i^{(2)})}{x_i+\dfrac{x_i^{(1)}+x_i^{(2)}}{2}}\right)^2+\frac{1}{2}c\sum_{i=1}^{n}\left[x_i-(x_i^{(2)})\right]^2 \quad (1\text{-}17a)$$

$$\begin{cases} a_i=\dfrac{3x_i^{(2)}+x_i^{(1)}}{2}\cdot\dfrac{\partial g(X^{(2)})}{\partial x_i} \\ b_i=\dfrac{(3x_i^{(1)}+x_i^{(2)})^2 d_i}{4\left(x_i^{(1)}-x_i^{(2)}\right)}\left[\dfrac{\partial g(X^{(1)})}{\partial x_i}-\dfrac{1}{d_i^2}\cdot\dfrac{\partial g(X^{(2)})}{\partial x_i}\right]-c(x_i^{(1)}-x_i^{(2)}) \\ c=\dfrac{g(X^{(1)})-g(X^{(2)})-\dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\dfrac{x_i^{(1)}-x_i^{(2)}}{d_i}\cdot\dfrac{\partial g(X^{(2)})}{\partial x_i}-\dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}d_i(x_i^{(1)}-x_i^{(2)})\cdot\dfrac{\partial g(X^{(1)})}{\partial x_i}}{2} \\ d_i=\dfrac{3x_i^{(1)}+x_i^{(2)}}{x_i^{(1)}+3x_i^{(2)}} \qquad (i=1,\cdots,n) \end{cases} \quad (1\text{-}17b)$$

该近似函数利用两点的函数值和一阶敏度值来确定相关的系数.

（18）两点混合变量法[201]：

$$\bar{g}(X)=\alpha+\sum_{i=1}^{n}\beta_i\cdot x_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i}{x_i} \quad (1\text{-}18)$$

该近似函数利用一点的函数值和另外两个点一阶敏度值来确定（$2n$+1）个未知系数.

（19）改进的两点混合变量法[92]：

$$\bar{g}(X)=g(X^{(0)})+\sum_{i=1}^{n}\left[\alpha_i(x_i-x_i^{(0)})+\beta_i\left(x_i^{(0)}-\frac{(x_i^{(0)})^2}{x_i}\right)\right]+\varepsilon \quad (1\text{-}19a)$$

$$\begin{cases} \beta_i=\dfrac{\dfrac{\partial g(X^{(0)})}{\partial x_i}-\dfrac{\partial g(X^{(1)})}{\partial x_i}}{1-\left(\dfrac{x_i^{(0)}}{x_i^{(1)}}\right)^2} \qquad i=1,\cdots,n \\ \alpha_i=\dfrac{\partial g(X^{(0)})}{\partial x_i}-\beta_i \end{cases} \quad (1\text{-}19b)$$

$$\varepsilon=g(X^{(1)})-g(X^{(0)})-\sum_{i=1}^{n}\left[\alpha_i(x_i-x_i^{(0)})+\beta_i\left(x_i^{(0)}-\frac{(x_i^{(0)})^2}{x_i}\right)\right] \quad (1\text{-}19c)$$

该近似函数也是利用一点的函数值和另外两个点一阶敏度值来确定其未知系数.

（20）三点投影法[190]：

$$\bar{g}(X)=g(X^{(0)})+(X-X^{(0)})^T\cdot\nabla g(X^{(0)}) \quad (1\text{-}20a)$$

$$g_0(s,t)=g(X^{(3)})+\frac{\partial g(X^{(3)})}{\partial s}(s-s_3)+\frac{\partial g(X^{(3)})}{\partial t}(t-t_3)+\frac{1}{2}a_{11}(s-s_3)^2+a_{12}(s-s_3)(t-t_3)+\frac{1}{2}(t-t_3)^2 \quad (1\text{-}20b)$$