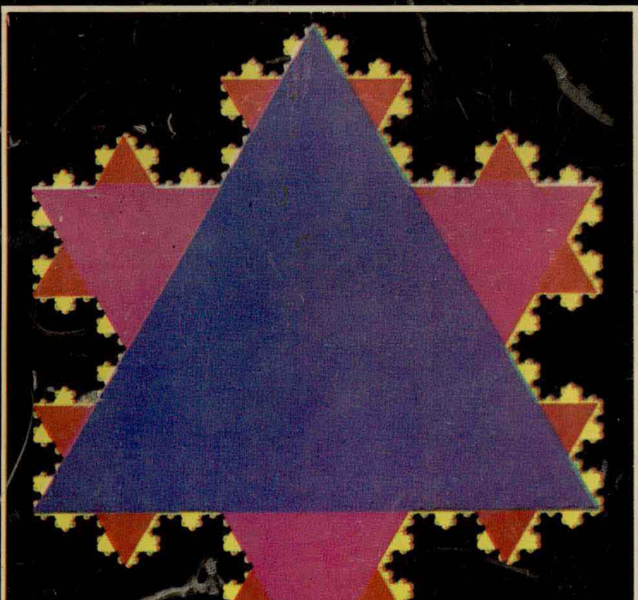
·中学生思维训练·

数学问题与模式探求

邱　森等　编著



华东理工大学出版社

数学问题与模式探求

邱　森　等编著

华东理工大学出版社

（沪）新登字 208 号

数学问题与模式探求

邱　森　等编著

华东理工大学出版社出版发行

上海市梅陇路 130 号

邮政编码　200237　　电话 64104306

新华书店上海发行所发行经销

上海展望印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32　印张 8 字数 178 千字

1996 年 6 月第 1 版　1996 年 6 月第 1 次印刷

印数 1—5000 册

ISBN 7-5628-0660-8/G · 112　定价 9.80 元

前　　言

当前数学课程教材改革旨在将应试教育转变为素质教育。在数学教学中，如何提高学生的素质呢？传统的数学教学，使学生以机械的、模仿的方式进行学习，尽管有时也能使学生如何掌握不少的数学知识，但却可能仍然不了解数学的本质。尽管有的学生在各种考试和低层次技巧上表现不错，但从长远的学习和高层次的思维来看，一般效果仍是不好的。因为真正重要的事情不是记住一些数学技巧，技巧不常用，很快就会忘记。如何改变这种效率不高的教学模式呢？

首先，我们必须把现代的数学观反映到数学教学中来。现代数学的发展使人们认识到数学是一门研究模式的科学。学习数学时，不仅需要学习各种数学知识，进行各种计算或演绎，还需要学习探求模式，它涉及模式的观察、猜测的检验以及结果的估计。这样，使学生不仅能记住一些数学概念、公式和方法，还能培养出长期起作用的洞察力、理解力以及探索和发现的能力，逐步看清数学知识的本质。现代数学的另一个特征，是它的应用范围正在大大地扩展，但是这一变化在传统的数学课程中反映很少。我们必须充分重视将实际问题数学化以及建立数学模型能力的培养，使学生亲身体验什么是实践中用的数学，激励学生学习数学的兴趣，也为他们能在21世纪运用数学作好准备。

第二，认知心理学的现代发展促成了教育思想的革命性变革。对于学生在数学学习过程中真实思维活动的深入了解

和分析，使人们认识到只有当学生通过自己的思考建立起自己的数学理解力时才能真正地学好数学。学生学习数学不是简单地记住教师所教的内容，而是让学生通过吸收并与原来知识相融合的过程来建立新的认知结构，这是一种主动的建构过程，也是一种再创造的过程。因此，数学教学必须由传授知识的权威模式向以“激励学习”为特色的学生实践为主的教学转变。教师要抵制一言堂的诱惑，使课堂成为学生生动活泼的学习场所，在课堂教学中应有学生自己活动的时间。在学生活动中，鼓励学生自己进行探索，自己解决各种各样的数学问题(包括非常规的问题)，培养学生掌握独立探求新知识的方法，以获得不断深造的能力和创造能力。

第三，在当今的信息时代，人们需要随时接受新观念，适应新变化，发现新模式，解决新问题。这就需要培养学生具有进取心、自信心，具有提出问题和处理问题的能力，在解决问题遇到困难和挫折时，又具有抗挫能力、调控能力和最后完成任务的坚持性。此外，还要培养学生同他人一起工作的能力。本书可以为提高学生的上述素质，提供良好的学习环境。本书通过大量的例题来说明如何建立数学模型，将实际问题数学化，如何寻求模式，在问题解决后，进一步研讨它的发展和推广。这些例题都设置情景，提出问题，可供高级中学选修课或学生数学活动使用。使用时，既要提倡学生真正的独立思考，使得学生中间种种独特的想法得以开拓和发展，又要引导学生之间和师生之间进行名副其实的交流。教学中可以采用学生自己负责的各种形式开展讨论，互相报告，甚至分小组进行学习，使学生逐步具有与集体合作的品质，学会认真听取别人的意见，以及与他人合作解决问题的能力。在交流过程中，教师要帮助学生表达自己的数学想法，使他们学会能在各种

想法和办法的冲突中作出令人信服的论证。当然,学生进行这种活动要耗费师生更多的时间和精力,但这对于提高学生整体性素质来说是十分必要的。本书通俗易懂,并有一定的趣味性,也可作为高中学生的数学课外读物。

本书所收集的例题和练习是由上海教育学院数学系94(秋)中学数学教学研究班的师生根据自己的教学实践编写或改编的,选题的标准是:

(1) 具有较强的探索性,不过于追求技巧难度,使大多数学生都能主动参与。

(2) 具有一定的实际背景,有较强的应用性。

(3) 具有一定的启示意义,有利于学生掌握基本的数学思想和数学方法。

(4) 具有"开放性",即具有多种不同的解法或有多种可能的解答。

(5) 具有一定的发展余地,学生由此可以引出新的方法,新的问题和进一步思考。

本书主编邱森,参加编写的还有(以姓氏笔画为序)丁伟强、刘定明、吴洁、陈冠一、张云、周宇、竺建伟、赵军山、薛建国。

在本书的写作过程中,特别是在94(秋)中学数学教学研究班的教学过程中,编者得到了上海市教委副主任兼上海教育学院院长张民生和上海教育学院副院长鲍修德等同志的热情指导和帮助,也得到了各学员所在的学校领导的巨大支持,借此机会表示诚挚的谢意。

本书承蒙华东理工大学出版社同志的热情支持,作者特表衷心感谢。

目前,我们在关于发展学生数学模式探求能力的研究和

实践尚处初始阶段，缺点、错误在所难免，诚望专家和读者批评赐教。

编　者

一九九六年四月

于上海教育学院

目　录

绪　论

数学——探求模式

什么是数学？数学是研究现实世界的空间形式与数量关系的科学。在数学中，我们研究客观世界中量性的规律性，也就是说，研究（量化）模式，所以数学也是研究模式的科学，它涉及模式的观察，猜测的检验以及结果的估计。例如，人们对勾股定理的认识过程就经过一个探求模式的过程。在我国最早详细记载勾股定理的首推《周髀算经》，它大约写于公元前235年至公元前145年之间。书的开篇就以商高回答周公问题的形式提出："数之法出于圆方，圆出于方，方出于矩，矩出于九九八十一，故折矩以为勾广三、股修四、径隅五。既方其外，半之一矩，环而共盘得三、四、五，两矩共长二十有五是谓积矩。故禹之所以治天下者此数之所由生也。"他所说的是，一条线段分成3∶4∶5所构成的三角形是直角三角形，这样的三角形内接于圆且弦为直径，同时还有等式$3^2+4^2=5^2$成立（见图1）。这说明商高通过观察个别直角三角形勾、股、弦之间的量值关系，已经发现了勾股定理的特殊情况。《周髀算经》又在"陈子曰"下说："若求斜至日者，以日下为勾，日高为股，勾、股各自乘，并而开方除之，得斜至日。"这就是说，

斜至日（弦）$=\sqrt{勾^2+股^2}$　　　　（见图 2）

上式就是勾股定理的一般形式。它说明陈子已通过观察特殊的一些直角三角形的勾、股、弦之间的量值关系，发现了一般规律，从而提出了上述的勾股定理。

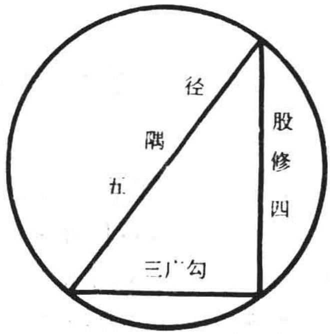


图 1

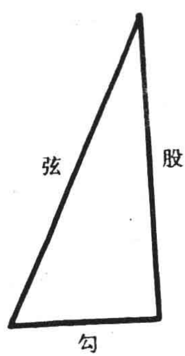


图 2

在数学上，对于某个数学问题通过观察一些特殊情形，从

中发现规律而提出的一般性猜测，必须进行验证才能确认它成立。对勾股定理的证明，世界上有许许多多方法，在我国是以赵爽（公元 3 世纪三国东吴人）在《周髀算经》注中所撰写的《勾股圆方图注》为最早。赵爽画了一张他所谓的“弦图”（图 3），其中每一个直角三角形称为“朱实”，中间的一个小正方形叫“中黄实”，以弦为边的正方形 $ABEF$ 叫“弦实”。由于四个朱实加上一个黄实就等于弦实，所以有下式成立：

$$4\times\frac{1}{2}ab+(b-a)^2=c^2,$$

即

$$a^2+b^2=c^2。$$

这样，赵爽就用割补法证明了勾股定理。

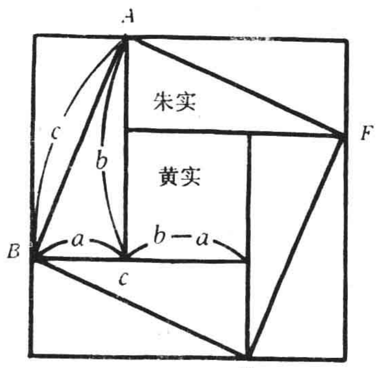


图 3

除了边长分别为 3、4 和 5 的直角三角形外，是否还有其他的三边长都是整数的直角三角形呢？

公元三世纪魏晋时期，我国古代数学家刘徽进一步研究了三条边长都是整数的直角三角形。他发现，还有许多直角三角形，它们的边长也都是整数，例如，5、12、13；7、24、25；8、15、17；20、21、29；…。

若以 x 、y、z 分别表示勾、股、弦，那么用代数的语言来说，以上各组数都是不定方程

$$x^2+y^2=z^2$$

的整数解。满足这个不定方程的整数解（x、y、z）就叫做勾股数。

刘徽不仅举出了不少勾股数，而且用出入相补原理证明了勾股数的一般形式是

$$2mn\ ,\ n^2-m^2,\ n^2+m^2,$$

其中 n，m（$n>m$）是任意整数（在古希腊差不多与刘徽同时的数学家刁番都也独立地证明了这一结果）。这就解决了不定方程 $x^2+y^2=z^2$ 的整数解问题。然而，人类对模式的探求永远也不会中止，1637 年，法国数学家费尔马对上述问题，也就是将一个平方数分为两个平方数的问题，发生了兴趣。他进一步地探求，能否将一个三次方幂分为两个三次方幂之和，将一个四次方幂分为两个四次方幂之和，或者更一般地将一个 n 次方幂分为两个 n 次方幂之和？他在刁番都著作《算术》拉丁文译本的空白处写了一段简短的笔记，给出一个否定的结论："不可能把一个正整数的三次方幂分成两个三次方幂的和，一个四次方幂分成两个四次方幂的和；或者一般地说，不能把任意一个次数大于 2 的正整数的方幂分成两个同次方幂的和。"接着他又写道："我发现了这个论断的证明，但是书上的空白太窄了，写不下。"这就是著名的费尔马猜想。这个猜想可以用不定方程表示：设 $n>2$，不定方程

$$x^n+y^n=z^n$$

除了 $x\ y\ z=0$ 外没有其他整数解。费尔马关于这一猜想的证明（如果真有的话）从未被人找到过。三百多年来，许多数学家都曾为求得其证明而努力。人们开始只能对于许多给定的 n 来证明费尔马猜想成立，贝西（1605—1675）利用费尔马的提示给出了 $n=4$ 的证明，后来瑞士数学家欧拉（1707—1783）又证明了 $n=3$ 的情形，1857 年德国数学家库默尔（1810—1893）创立了理想数理论，证明了对于小于 100 的奇素数，费尔马猜想成立。他所建立的理想数理论为代数数论奠定了基础，成了许多数学分支的重要工具。对费尔马猜想的最终证明虽然难度极大，但是，人们相信，随着现代数学理论的发展，这个堡垒必将会被攻破。

1993 年夏季，美国数学家威尔斯（A wiles）从椭圆曲线的方向来证明费尔马猜想，论文发表以后，人们发现了在他的证明中有一个小漏洞。1994 年 9 月威尔斯和另一位数学家泰勒（R Taylor）弥补了这个漏洞，最终完成了费尔马猜想的证明，数学家们梦寐以求的目标终于达到了。

由上面的例子可以看到探求模式的过程一般要经历发现问题、分析问题和解决问题的一种创造性过程。因此，在学习数学时，不仅要学习定义和定理等基础知识，当然，它们是十分重要而有用的，而且还要学习探求模式时数学所提供的有特色的思维方式，以提高创造力（包括发散性思维能力，集中性思维能力和人的个性品质等）和调控能力（包括问题解决时解题策略的选择，整个过程的组织和思路的调整等），从而提高发现问题、分析问题和解决问题的能力。在当今的信息时代，应用这些数学思维方式的经验所构成的能力已成为一种日益重要的智力，它使人们能吸收新的想法，适应各

种变化，对模棱两可的事件能发现模式并能解决非常规的问题。

在学习探求模式的过程中，我们也必须注意到，人们探求模式的最终目的还是为了应用。早在《周髀算经》中曾记载陈子利用勾股定理求出从地面一点到太阳的距离。据传说古埃及人在建筑宏伟的金字塔时也用过勾股定理。当今随着社会的发展，生产力的提高，科技的进步，数学的应用更是日益广泛，不断深入。因此，我们在学习数学知识的同时还要学习运用数学知识，在解决各种现实生活问题的过程中，进一步发现数学的魅力，进一步体会数学的意义、思想和方法。

第 1 题　检验台最佳位置

n 台机器位于一直线上（图 1－1），它们所生产的零件必须送到一个检验台上，经检验合格后，才能送往下一道工序继续加工。已知移动零件所需的费用与所移动的距离成正比，问检验台放在哪里可使移动零件所花费的总费用最省？

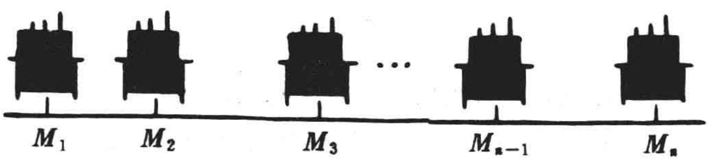


图 1－1

为了求解，我们首先必须理解题意。设用直线上的点 M_i 表示第 i 台机器的位置，点 A 表示检验台的位置，因为将零件移到检验台所需的费用与所移动的距离成正比，所以我们的问题就是要在直线上确定 A 点的位置使检验台到各机器的距离之和

$$M_1A+M_2A+\cdots+M_nA$$

最小。

如何解题呢？一下子无法着手。于是，我们先设计一个解题计划。我们设想，先考察 $n=2$，3，4 等特殊情形，再从中寻求其一般规律，即探求其模式。

现在考察一些特殊情形：

（1）如果只有 2 台机器，则易知线段 M_1M_2 上任何一点

都是检验台的最佳位置（图 1—2）。

图 1—2

（2）如果有 3 台机器，则也易知检验台应放在中间的机器 M_2 的位置处（图 1—3）。

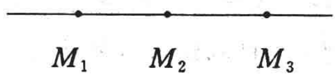


图 1—3

（3）如果有 4 台机器，则对两端的机器 M_1 和 M_4 来说，线段 M_1M_4 上任何一点都是最佳位置；对中间的 2 台机器 M_2 和 M_3 来说，线段 M_2M_3 上任何一点都是最佳位置。因此，对 4 台机器来说，线段 M_2M_3（$=M_1M_4\cap M_2M_3$）上的任何点都是最佳位置（图 1—4）。

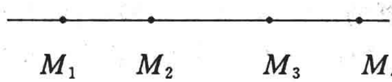


图 1—4

对于 5 台或 6 台机器，问题也都容易解决。我们容易证明：一般地，如果机器的台数是奇数，则最中间那台机器的位置就是检验台的最佳位置；如果台数是偶数，则处在最中间的两台机器之间的任何点都是最佳位置。

注意，在上述问题中必须假设各机器的工作效率都是相同的。如果各机器的效率是不同的，例如，在图 1—5 中，机器 M_1 的效率是机器 M_2 的 2 倍，机器 M_3 的效率是机器 M_2