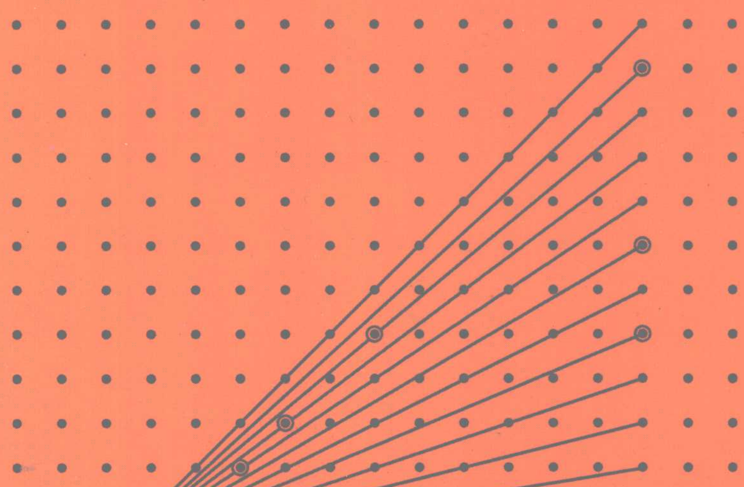
最新世界各国数学奥林匹克中的初等数论试题

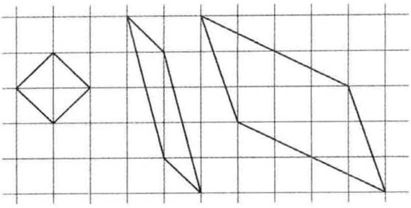
王连笑　著

上

The Lastest Elementary Number Theory in Mathematical Olympiads in The World



哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

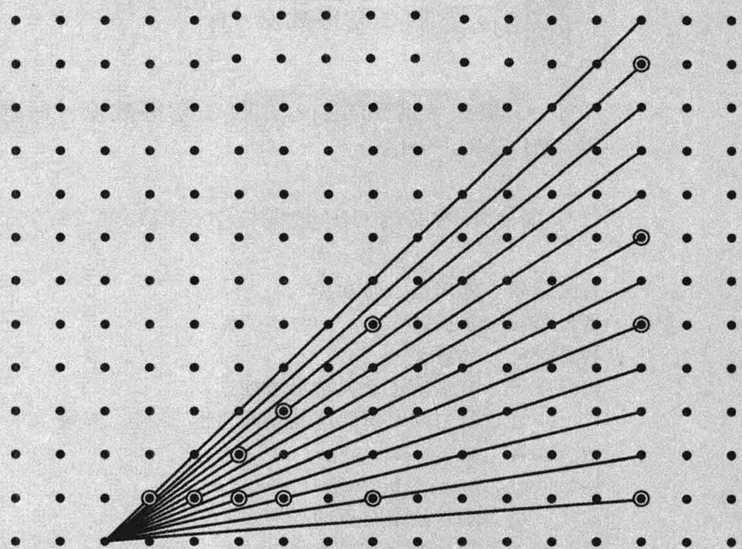


最新世界各国数学奥林匹克中的初等数论试题

王连笑 著

上

The Lastest Elementary Number Theory in Mathematical Olympiads in The World



哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书中记载了一些世界各国奥林匹克竞赛中涉及的数论问题,都是一些初等数论问题.全书涉及整除与同余,质数、合数与质因数分解,奇数、偶数和完全平方数,十进制和其他进制记数法,欧拉定理和孙子定理,高斯函数等方面的试题.涉及了数论知识的各个方面,全面而详细地对数论试题进行解析总结.

本书适用于高等院校数学与应用数学专业学生、数学爱好者、数学竞赛选手及教练员作为学习或教学的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

最新世界各国数学奥林匹克中的初等数论试题:全2册/王连笑著.
—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2011.11
ISBN 978-7-5603-3436-3

Ⅰ.①最… Ⅱ.①王… Ⅲ.①初等数论—试题
Ⅳ.①O156.1—44

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第255701号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　李长波
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张25.5　字数469千字
版　　次　2011年12月第1版　2011年12月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-3436-3
定　　价　138.00元(上、下)

⊙前言

莫扎特5岁开始作曲,35岁去世,留下的作品编号到第626号;舒伯特的创作生涯更短,他留下的第一首作品是14岁时作的一首钢琴四手联弹狂想曲,31岁去世,作品编号排到998号.

连笑编号为1的书是1978年12月出版的,是一本关于数论的小册子叫《从哥德巴赫猜想谈起》,那年他36岁.当时出版社还没有责任编辑一说,只是在封底上标有一个装帧设计的人叫刘丰杰.据连笑跟笔者说从那时起每年一本,记编号的话也该有33号了,本书应该是连笑的最后一本,这巧了也是数论,但这是个大部头.这一前一后都是关于数论的书,说明连笑对数论用情之深,因为它贯穿于连笑写作生涯的始终.

唐吉慧(上海青年书法家)在《旧时月色》(上海辞书出版社,上海:2011年8月p:62)中写了一个非常有趣的故事:说美国一位善心人去参观疯人院,见有个病号跨坐在一个木架上作骑马状,善心人为了逗他开心,趋前高声赞叹:"你骑的可真是一匹上好的马啊!"病号听了大声骂道:"马个屁! 这不是马,这是个癖好."善心人不解,问:"那有什么不同?"病号说:"不同,天大的不同! 骑马的人可以随时下马,骑上了癖好你一辈子也下不来!"

数学是使人上瘾的一门学科,在数学的众多分支中更以数论为最.从某种意义上说它类似于毒品,一旦沾上,终身难戒.像高斯一生多次返回二次互反律给出了多种证明.从连笑的求学经历看他的数论知识多半是自学得来,因为师专这样的学校并

不专门开设数论课(笔者也是师专毕业,所以经历类似),但连笑在初等数论领域钻得很深、很广,笔者手中有他当年译的波兰数学家辛采尔的《数论》手稿,工整至极,其自学能力之强堪比德国著名数学家黎曼(G. F. B. Riemann,1826—1866).

黎曼在数学史上占有极重要的地位,他开创了黎曼几何和复变函数,并且对数学分析、微分几何和微分方程都有重要贡献.在中学阶段由于其数学才能显著,校长干脆让黎曼到他的私人图书室(那里有很多高深的数学专著)自己找书看.有一次黎曼要求校长给他推荐一本难一点的书,为了试一试黎曼的潜力,校长建议他去读勒让德(A. Legendre)的多达 859 页的巨著《数论》.出乎校长的预料,一星期后,黎曼就把书还了回来,并说,非常高兴校长给了一本能让他读了一星期之久的书,但切不可以为黎曼只是大概浏览.两年后,黎曼请求学校以勒让德的《数论》作为他毕业考试的一部分,尽管两年来他从未再摸过这本书,却对所有的问题对答如流.(汤双.闲话希尔伯特问题(下)《读书》2011.6)

其实论天资连笑并非出众,他之所以在特别需要天分的数论领域耕作 30 余年,且成果颇丰,只有一个原因,那就是连笑在初等数论中找到了他的最爱.

乔布斯在斯坦福大学演讲时曾说:

我一直都坚信,唯一能让我勇往直前的是我热爱我所从事的事业.人们一定要找到自己的所爱,谈恋爱如此,找工作也该如此.工作将会占据你们人生的一大部分时间,要想悠然自得,唯一的出路就是要从事那些你自信是伟大的工作,而要想从事一项伟大的工作,唯一的办法就是热爱你的工作.

爱数学、爱数论、做数学题,特别是解数论题挤占了连笑全部的业余生活.

有一句赞美香槟酒的经典语录,是 Lily Bollinger 说的,是这样的:

快乐的时候,我喝香槟;难过的时候,我也喝香槟;孤独的时候,我喝香槟;有朋友的时候,我更要喝香槟;不饿的时候,我以香槟消磨时光,饿的时候我就喝香槟,除此之外,我从来不喝香槟,除非我渴了.

当我们将香槟换成数论题,用来形容连笑,真是再恰当不过了.在中国的中学数学界仅凭一己之力编写出如此鸿篇巨制的初等数论题解肯定是空前的,更可能也是绝后的.原辽宁教育出版社社长俞晓群先生最近写了一本书叫《前辈:从张元济到陈原》(上海书店出版社出版),在写到陈原时俞晓群不无伤感地说:在一个最讲究文化传承的行业里,从张元济、王云五,直到陈原,他们在百余年的出版实践中,接续着一个诺大民族的文化薪火.现在,他们人生的绝唱都已落幕.望着他们绝尘而去的背影,我们还能做些什么?

是的,当连笑这位前辈人生的绝唱落幕之际,如果不读他如此恢宏的巨著,我们还能做些什么呢?

刘培杰

2011 年 11 月 3 日

本书所用的数学符号

符　　号	意　　义
$b \mid a$	整数 a 能被整数 b 整除($b \neq 0$)
$b \nmid a$	整数 a 不能被整数 b 整除
$b^t \parallel a$	整数 a,b,t 满足 $b^t \mid a$ 且 $b^{t+1} \nmid a$($b \neq 0$)
$a \equiv b \pmod m$	整数 a,b 对模 m($m \neq 0$) 同余
(a,b)	整数 a,b 的最大公约(因)数
$[a,b]$	整数 a,b 的最小公倍数
$\varphi(m)$	欧拉函数:小于 m 且与 m 互质的正整数的个数
$\left(\frac{d}{p}\right)=\begin{cases}1, d \text{ 是模 } p \text{ 的二次剩余}, \\ -1, d \text{ 是模 } p \text{ 的二次非剩余}, \\ 0, p \mid d.\end{cases}$	勒让德(Legendre) 符号
$A=\overline{a_1 a_2 \cdots a_n}, a_1 \in \{1,2,\cdots,9\}$, $a_2,\cdots,a_n \in \{0,1,2,\cdots,9\}$	A 的十进制表示
$A=(\overline{a_1 a_2 \cdots a_n})_k=(a_1 a_2 \cdots a_n)_k$, $a_1 \in \{1,2,\cdots,k-1\}$ $a_2,\cdots,a_n \in \{0,1,2,\cdots,k-1\}$	A 的 k 进制表示
$[x]$	高斯函数:不超过实数 x 的最大整数
$\{x\}$	实数 x 的正的纯小数部分

目录

第1章

整除与同余

1　设有四个正整数,其中任何两数的平方和都可以被其余两个数的乘积整除.证明:其中至少有三个数彼此相等.

（俄罗斯数学奥林匹克,1999 年）

证　可以假设满足条件的四个数互质,这是因为若这 4 个正整数 a,b,c,d 不互质,则 $\frac{a}{(a,b,c,d)},\frac{b}{(a,b,c,d)},\frac{c}{(a,b,c,d)},\frac{d}{(a,b,c,d)}$,当 a,b,c,d 满足条件时,这 4 个数也满足条件,我们可以用 $\frac{a}{(a,b,c,d)},\frac{b}{(a,b,c,d)},\frac{c}{(a,b,c,d)},\frac{d}{(a,b,c,d)}$ 来代替原来的 4 个数.

为此,设正整数 a,b,c,d 满足条件,且 $(a,b,c,d)=1$.

设 p 是 a 的一个质约数,且 p 为奇质数,则由题设,若 b,c,d 不相等.

$$p\mid(b^2+c^2),\quad p\mid(c^2+d^2),\quad p\mid(d^2+b^2)$$

则

$$p\mid(b^2-d^2),\quad p\mid(b^2+d^2)$$

从而 $p\mid b,p\mid d$,同理 $p\mid c$,又 $p\mid a$.
与 $(a,b,c,d)=1$ 矛盾.

所以 b,c,d 至少有两个相等,设 $b=c$.

此时 $p\mid 2b^2,p\mid(b^2+d^2)$,则 $p\mid[2(b^2+d^2)-2b^2]=2d^2$.

若 $p\mid d,p\mid b$,则与 $(a,b,c,d)=1$ 矛盾.

所以 $p=2$.

此时可设 $a=2^m,b=c=2^n,d=2^t$. $m\leqslant n\leqslant t$

然而此时 $a^2+b^2=2^{2m}+2^{2n}=2^{2m}(1+2^{2n-2m})$ 显然不能被 $cd=2^{n+t}$ 整除.

所以至少有三个数相等.

2　整数 a,b,c 使得 $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$ 与 $\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}$ 均为整数,证明:$|a|=|b|=|c|$.

（莫斯科数学奥林匹克,1999 年）

证 1　假设结论不成立.

若 a,b,c 有公约数 d,则可讨论 $\frac{a}{d},\frac{b}{d},\frac{c}{d}$.因此可以约定 a,b,c 的公约数只有 ± 1.

由于结论不成立,则 a,b,c 中必有一个不等于 ± 1.不失一般性,设 $a\neq\pm 1$.

设 p 是 a 的一个质约数,则

$$abc\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)=a^2c+b^2a+c^2b$$

能够被 p 整除，由

$$p \mid a^2c+b^2a+c^2b$$

可得

$$p \mid c^2b$$

不妨设 $p \mid b$，则在约定之下，$p \nmid c$.

设 p^r 是可整除 a 的 p 的最高次幂，p^s 是可整除 b 的 p 的最高次幂，不妨设 $r \leqslant s$.

于是

$$p^{r+s} \mid abc\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\right)=a^2b+c^2a+b^2c$$

由 $r \leqslant s$ 有

$$p^{r+s} \mid b^2c, \quad p^{r+s} \mid a^2b$$

因此

$$p^{r+s} \mid c^2a$$

由于 $p \nmid c$，则 $p^{r+s} \mid a$，这与 p^r 是整除 a 的最高次幂矛盾. 故假设不成立，原命题正确.

证 2 注意到

$$\left(x-\frac{a}{b}\right)\left(x-\frac{b}{c}\right)\left(x-\frac{c}{a}\right)=x^3-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)x^2+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\right)x-1$$

是整系数多项式，

由 a,b,c 是整数，则 $\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a}$ 是该多项式的有理根.

由 $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a},\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}$ 及 1 都是整数，则 $\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a}$ 也都是整数，又因为

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}=1$$

则

$$\left|\frac{a}{b}\right|=\left|\frac{b}{c}\right|=\left|\frac{c}{a}\right|=1$$

即

$$|a|=|b|=|c|$$

3 证明：存在两个严格递增的整数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$，使得对于任意正整数 n，有 $a_n(a_n+1)$ 整除 b_n^2+1.

（第 40 届国际数学奥林匹克预选题，1999 年）

证 先证明一个引理.

引理 如果正整数 c,d 满足 $d^2 \mid c^2+1$，则存在正整数 b，使得

$$d^2(d^2+1) \mid b^2+1$$

引理的证明：由于

$$(c+d^2c-d^3)^2+1=[c+d^2(c-d)]^2+1=$$
$$c^2+1+2cd^2(c-d)+d^4(c-d)^2$$

所以 $d^2 \mid 2cd^2(c-d)+d^4(c-d)^2$，又 $d^2 \mid c^2+1$

则

$$d^2 \mid (c+d^2c-d^3)^2+1$$

又由于

$$(c+d^2c-d^3)^2+1=[c(d^2+1)-d^3]^2+1=$$
$$c^2(d^2+1)^2-2c(d^2+1)d^3+d^6+1=$$
$$(d^2+1)[c^2(d^2+1)-2cd^3+d^4-d^2+1]$$

所以

$$d^2+1 \mid (c+d^2c-d^3)^2+1$$

取 $b=c+d^2c-d^3$，则有

$$d^2 \mid b^2+1,\quad d^2+1 \mid b^2+1$$

于是由 $(d^2,d^2+1)=1$ 得

$$d^2(d^2+1) \mid b^2+1$$

引理证毕.

设 $d_n=2^{2n}+1, c_n=2^{nd_n}$，则

$$c_n^2+1=(2^{nd})^2+1=(c^{2n})^{d_n}+1=(d_n-1)^{d_n}+1$$

因为 d_n 是奇数，所以

$$d_n \mid (d_n-1)^{d_n}+1$$

即

$$d_n^2 \mid c_n^2+1$$

由引理，存在 b_n 使 $d_n^2(d_n^2+1) \mid b_n^2+1$.

设 $a_n=d_n^2$，则

$$a_n(a_n+1) \mid b_n^2+1$$

因为

$$a_n=d_n^2=(2^{2n}+1)^2$$
$$b_n=c_n+d_n^2c_n-d_n^3=2^{nd_n}+(2^{2n}+1)^2\cdot 2^{nd_n}-(2^{2n}+1)^3$$

则数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都是严格递增的. 由上面的证明，$\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 就是满足条件的两个整数列.

4 设 a,b,c,d 都是正整数，且满足 $ad-bc>1$. 试证 a,b,c,d 四个

数中至少有一个数不能被 $ad-bc$ 整除.

(世界城市数学竞赛,2000 年)

证 用反证法.

假设 a,b,c,d 都能被 $ad-bc$ 整除,则存在整数 p,q,r,s,有

$$\begin{cases}a=p(ad-bc)\\ b=q(ad-bc)\\ c=r(ad-bc)\\ d=s(ad-bc)\end{cases}$$

$$ad-bc=(ps-qr)(ad-bc)^2$$

因为 $ad-bc>1$,则

$$(ps-qr)(ad-bc)=1$$

$$ps-qr=\frac{1}{ad-bc}<1$$

又由 $ad-bc>1>0$,则

$$(ps-qr)(ad-bc)^2>0$$

$$ps-qr>0$$

于是

$$0<ps-qr<1$$

与 $ps-qr$ 为整数矛盾.

所以 a,b,c,d 中至少有一个不能被 $ad-bc$ 整除.

5 设 $\{a_n\}$ 为一个整数数列,对任意正整数 n,均有 $(n-1)a_{n+1}=(n+1)a_n-2(n-1)$,若 $2\ 000 \mid a_{1\,999}$,求最小的正整数 n,使得 $2\ 000 \mid a_n$.

(保加利亚数学奥林匹克,2000 年)

证 令 $n=1$,则 $a_1=0$.

设 $b_n=\frac{a_n}{n-1}$,则 $\frac{b_{n+1}}{n+1}=\frac{b_n}{n}-\frac{2}{n(n+1)}(n=2,3,\cdots)$,

故
$$\frac{b_n}{n}-\frac{b_{n-1}}{n-1}=-2\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{b_{n-1}}{n-1}-\frac{b_{n-2}}{n-2}=-2\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)$$

$$\vdots$$

$$\frac{b_3}{3}-\frac{b_2}{2}=-2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$$

各式相加得

$$\frac{b_n}{n}-\frac{b_2}{2}=-2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)$$

所以

$$b_n=\left(\frac{a_2}{2}-1\right)n+2$$

于是

$$a_n=(n-1)\left[\left(\frac{a_2}{2}-1\right)n+2\right]$$

故

$$a_{1\,999}=1\,998\cdot\left[\left(\frac{a_2}{2}-1\right)\cdot 1\,999+2\right]$$

由 $2\,000\mid a_{1\,999}$ 得

$$1\,000\mid 999\left[\left(\frac{a_2}{2}-1\right)\cdot 1\,999+2\right]$$

因为$(1\,000,999)=1$,所以 $1\,000\mid\left(\frac{a_2}{2}-1\right)\cdot 1\,999+2$

于是 a_2 为偶数,可设 $a_2=2m$,则

$$1\,000\mid(m-1)\cdot 1\,999+2$$

所以 $1\,000\mid-(m-1)+2$,即 $1\,000\mid m-3$

再令 $m-3=1\,000t$

则

$$a_n=(n-1)[(1\,000t+2)n+2]=n(n-1)\cdot 1\,000t+2n(n-1)+2(n-1)$$

因为 $2\,000\mid a_n$,所以 $2\,000\mid 2n(n-1)+2(n-1)$

故 $1\,000\mid n^2-1$,则 n 为奇数,可设 $n=2k+1$

则 $250\mid k(k+1)$,而$(k,k+1)=1$,

所以 $5^3\mid k$ 或 $5^3\mid k+1$,取 $k=124$,所以 $n\geqslant 249$.最小的正整数 $n=249$.

6 $\triangle ABC$ 的边长 $a,b,c(a\leqslant b\leqslant c)$ 同时满足下列三个条件:

(1)a,b,c 均为整数;

(2)a,b,c 组成等比数列;

(3)a 与 c 中至少有一个等于 100.

求出三元数组(a,b,c) 的所有可能的解.

(上海市高中数学竞赛,1999 年)

解 由题设,$a\leqslant b\leqslant c,a+b>c,b^2=ac,a,c$ 中至少有一个等于 100.

(1) 若 $a=100$,则 $b^2=100c$.所以 $10\mid b$.

又 $100+b>c=\dfrac{b^2}{100}$,则有

$$b^2-100b-100^2<0$$

解得

$$100 \leqslant b < 50(\sqrt{5}+1) < 162$$

于是由 $10 \mid b$ 得 $b=100,110,120,130,140,150,160.$

相应的 $c=100,121,144,169,196,225,256.$

(2) 若 $c=100$,则 $b^2=100a$,所以 $10 \mid b$.

又 $a+b>c=100$,即

$$\frac{b^2}{100}+b>100$$

有

$$b^2+100-100^2>0$$

解得

$$62<50(\sqrt{5}-1)<b \leqslant 100$$

于是由 $10 \mid b$ 得 $b=70,80,90,100.$

相应的 $a=49,64,81,100.$

由(1),(2),满足条件的三元数组(a,b,c)共有 10 组:

(49,70,100),(64,80,100),(81,90,100),(100,100,100),(100,110,121),(100,120,144),(100,130,169),(100,140,196),(100,150,225),(100,160,256).

7 设关于 x 的二次方程

$$(k^2-6k+8)x^2+(2k^2-6k-4)x+k^2=4$$

的两根都是整数,求满足条件的所有实数 k 的值.

(中国初中数学联合竞赛,2000 年)

解 原方程可化为

$$(k-4)(k-2)x^2+(2k^2-6k-4)x+(k-2)(k+2)=0$$

$$[(k-4)x+(k-2)][(k-2)x+(k+2)]=0$$

因为已知方程为二次方程,所以 $k-4 \neq 0, k-2 \neq 0$

于是方程的根为

$$x_1=-\frac{k-2}{k-4}=-1-\frac{2}{k-4}, \quad x_2=-\frac{k+2}{k-2}=-1-\frac{4}{k-2}$$

$$k-4=-\frac{2}{x_1+1}, \quad k-2=-\frac{4}{x_2+1}$$

消去 k 得

$$4-\frac{2}{x_1+1}=2-\frac{4}{x_2+1}$$

$$x_1x_2+3x_1+2=0$$

$$x_1(x_2+3)=-2$$

因为 x_1,x_2 都是整数,则有

$$\begin{cases}x_1=-2\\x_2+3=1\end{cases}\quad\begin{cases}x_1=1\\x_2+3=-2\end{cases}\quad\begin{cases}x_1=2\\x_2+3=-1\end{cases}\quad\begin{cases}x_1=-1\\x_2+3=2\end{cases}$$

因为 $x_1\neq-1$,所以第四组方程不成立.

于是

$$\begin{cases}x_1=-2\\x_2=-2\end{cases}\quad\begin{cases}x_1=1\\x_2=-5\end{cases}\quad\begin{cases}x_1=2\\x_2=-4\end{cases}$$

相应的 k 值为

$$k=6,3,\frac{10}{3}$$

8 设 a,b,c,d 为四个正整数,它们的最小公倍数为 $a+b+c+d$. 试证:此四数之乘积 $abcd$ 可被 3 或 5 整除.

(世界城市数学竞赛,2000 年)

证 1 设 $G=(a,b,c,d)$,则 $a=Ga_1,b=Gb_1,c=Gc_1,d=Gd_1$,其中 $(a_1,b_1,c_1,d_1)=1$. 设 L 为 a,b,c,d 的最小公倍数.

则 $L=a+b+c+d$,设 $L_1=a_1+b_1+c_1+d_1$

显然 $[a_1,b_1,c_1,d_1]=\left[\frac{a}{G},\frac{b}{G},\frac{c}{G},\frac{d}{G}\right]=\frac{L}{G}=\frac{a+b+c+d}{G}=L_1$

即 $L_1=a_1+b_1+c_1+d_1$ 是 a_1,b_1,c_1,d_1 的最小公倍数.

因此,本题可以仅考虑 a,b,c,d 最大公约数为 1 的情形.

不失一般性,设 $a\geqslant b\geqslant c\geqslant d$.

则

$$a<a+b+c+d\leqslant 4a$$

于是

$$L\in\{2a,3a,4a\}$$

当 $L=3a$ 时,$3\mid L$,问题得证.

当 $L=4a$ 时,有 $a=b=c=d=1$. 此时它们的最小公倍数 $L=1$,与 $L=a+b+c+d=4$ 矛盾;

当 $L=2a$ 时,有 $b<a=b+c+d\leqslant 3b$,于是

$$2b<2a=L\leqslant 6b$$

$$L\in\{3b,4b,5b,6b\}$$

若 $L=3b,5b,6b$ 时,问题得证.

若 $L=4b$,即 $a+b+c+d=4b$,于是 $c+d=b$. 即

$$c < c + d = b \leqslant 2c$$

即

$$4c < L \leqslant 8c$$
$$L \in \{5c, 6c, 7c, 8c\}$$

当 $L = 5c, 6c$ 时,问题得证.

当 $L=8c$ 时,即 $b=2c=c+d$,有 $c=d$,此时 a,b,c,d 的最小公倍数是 $4d$(因为 $b=2d, c=d, a=4d$).与 $L=a+b+c+d=8d$ 矛盾.

当 $L=7c$ 时,$L=4b=4c+4d=7c$,有 $4d=3c$,则 $3 \mid d$,从而得证.

证 2 设 $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d$.最小公倍数为 L,

假设 $abcd$ 不能被 3 整除,也不能被 5 整除,于是 a,b,c,d 的可能值为

$$\left\{\frac{L}{2}, \frac{L}{4}, \frac{L}{7}, \frac{L}{8}, \cdots\right\}$$

若 $a \leqslant \frac{L}{4}$,则 $L = a+b+c+d \leqslant 4a \leqslant 4 \times \frac{L}{4} = L$,于是只能有

$$a = b = c = d = \frac{L}{4}$$

其最小公倍数为$\frac{L}{4}$,矛盾.

所以 $a = \frac{L}{2}$.

若 $b = \frac{L}{2}$,则 $L = a+b+c+d = a+b, c+d=0, c=d=0$,矛盾.

若 $b \leqslant \frac{L}{7}$,则有 $L \leqslant \frac{L}{2} + 3 \times \frac{L}{7} = \frac{13}{14}L < L$,矛盾.

所以 $b = \frac{L}{4}$,此时 $c+d = \frac{L}{4}$.

若 $c = \frac{L}{4}$,则 $d=0$ 矛盾.

令 $d \leqslant \frac{L}{8}$,则有 $L \leqslant \frac{L}{2} + \frac{L}{4} + 2 \times \frac{L}{8} = L$,即

$$a = 2b = 4c = 4d = \frac{L}{2}$$

这与 a,b,c,d 最小公倍数为 L 矛盾.

所以 $c = \frac{L}{7}, d = \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right)L = \frac{3}{28}L$.但$\frac{3}{28}L \nmid L$.

因此,$abcd$ 必可被 3 或 5 整除.

9 是否存在整体互质的 3 个互不相同的大于 1 的正整数 a,b,c,使