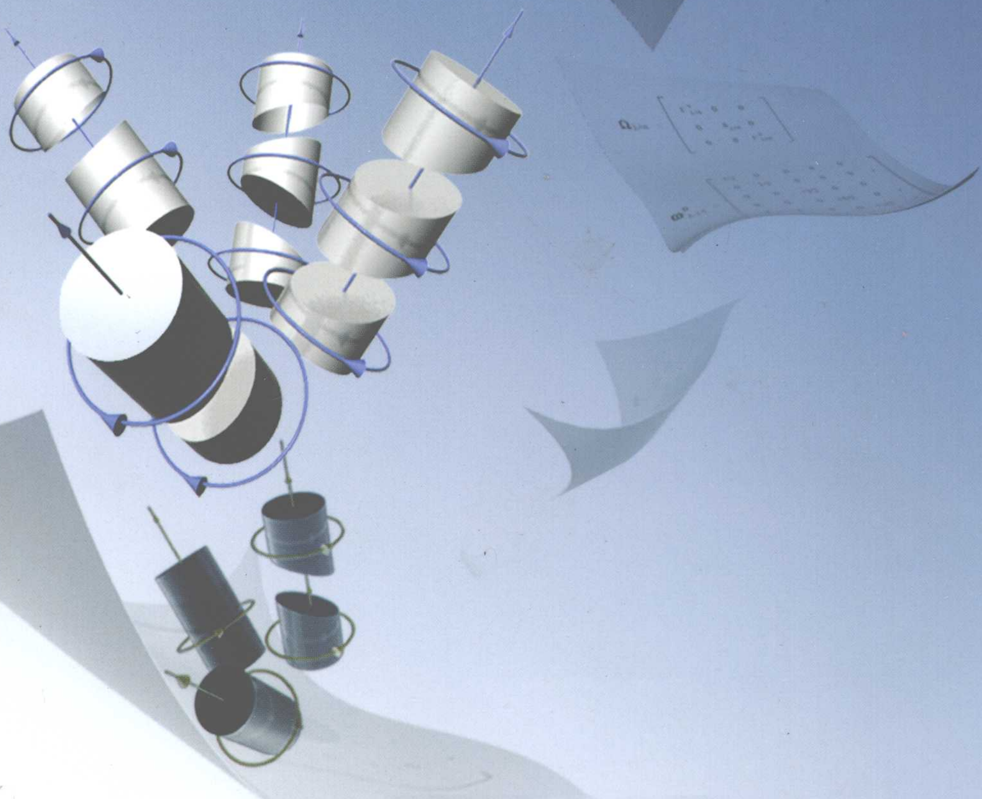
# 第三种粒子

任绍绪 著



上海电子出版有限公司

# 第三种粒子(A)

任绍绪　著





上海电子出版有限公司

# The Third Kind Of Particles (A)

## Advanced Non-Euclidean Quantum Mechanics(2)

ShaoXu Ren

Shanghai Electronic Publishing Co., Ltd.

**图书在版编目(CIP)数据**

第三种粒子(A)/任绍绪著. —上海：上海电子出版有限公司，2011.9
ISBN 978-7-900500-91-5

Ⅰ.①第... Ⅱ.①任... Ⅲ.物理—量子力学—学术专著 Ⅳ.O413.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 099357 号

**书　　名　第三种粒子(A)**
作　　者　任绍绪
责任编辑　何　菲
封面设计　陈　珺
出版发行　上海电子出版有限公司
地　　址　上海市钦州南路 81 号(200235)
经　　销　各地新华书店
印　　刷　上海展强印刷有限公司
开　　本　787×1092　1/16
印　　张　5.5
字　　数　135 千字
版　　次　2011 年 9 月第 1 版　2011 年 9 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-900500-91-5
定　　价　118.00 元(A/B 册)

# 有关这本书的话

为什么要去研究角动量？　那是因为角动量的物理学量纲单位是普朗克常数$\hbar$。20世纪的第一年，一位叫普朗克的德国人用$2\pi\hbar$开创了近代量子力学的前身。 自旋角动量是基本粒子的基因，蕴藏着丰富的世界密码。

是否存在自旋角动量为$\hbar/3$, $\hbar/4$, $\hbar/5$, $\hbar/6$, ······的粒子？　我们不得而知。

人们目前知道的是：宇宙中的基本粒子按照自旋不同分类, 有两种粒子。它们是玻色粒子和费米粒子。世界上所有的粒子都是由玻色子和费米子组成的：

玻色子的自旋数值$n\hbar$是普朗克常数的整数倍数,取值$0\hbar,1\hbar,2\hbar,3\hbar,\ldots$。玻色是印度人, 开启能够描述整数倍普朗克常数自旋粒子体系的著名玻色-爱因斯坦统计学定律。

费米子的自旋数值$n\hbar$是普朗克常数的半整数倍数,取值$\hbar/2,3\hbar/2,5\hbar/2,\ldots$。费米是意大利人,开启描述半整数倍普朗克常数自旋粒子体系的著名费米-狄拉克统计学定律。

那么是否存在着既不是玻色自旋粒子又不是费米自旋粒子， 所谓的第三种自旋粒子呢？比如它们的自旋数值是$\hbar/3,\hbar/4,\hbar/5,\hbar/6,\ldots$？　我们不得而知。

信念到底能够驱使着人们向前走多远，则有待人类天性好奇心的诱惑力量、心灵深处支撑探索世界的生命原始动因。

那么是否存在着描述所谓的第三种粒子自旋角动量的潜在理论基础呢？这是本书所关切的。选择这个课题意味着轻率和沉重，因为它充满着沮丧与冒险······

判断新观念的价值， 则是要承受数学力量的神秘主义与人们经验传承意识之间发生的冲突，正视它们带来的煎熬。煎熬是慢性的，往往伴随着探索者的生命。

好奇心不知倦意地逐使着，我们坐在书桌电脑前，不安分地凭空画图造句，诠释世界，把事情搞大了······

第三种粒子是未知的宇宙粒子。第三种粒子与非欧几里德量子力学息息相关。

如果有人问，什么是非欧几里德量子力学？尽管答案会因人而异，实数和虚数的幽灵，有限和无限的影子，时时刻刻都在忽隐忽现地闪烁，不停。

中学生们，几乎都不会忘记代数课学习的一元两次方程的求解公式， 当式子中的开根号运算“b平方减去4ac”为负数时,方程此时没有实数解。是虚数的引入，化解了方程无解的数学危机。他们领略到虚数是很有用处的。实数和虚数共同组成复数。

平面几何是中学时代另一门难以让人忘记的自然学科，它是从欧几里德几何演变而来， 最初是研究日常生活中有限大小的几何图形性质。 我们都很熟悉利用几何元素点,线的几个基本公理，通过合理的逻辑推导，去证明较复杂的几何命题。

而当欧氏元素平行线的渐进行为的探讨,从学术深院内的石板延伸至世界地理无限远处的地平面时，产生了是否这些直线间，最终会仍然保持平行还是形成相交现象的分歧，被迫冒出了非欧几里德几何学。所以对中学生，我会讲：

牛顿力学，经典物理学依附于欧几里德几何空间；现代物理学不少创新革命思想往往与非欧几里德几何空间有着千丝万缕的联系。

公转对应于轨道角动量，自转对应于自旋角动量。 欧氏量子力学空间是平坦的空间。在欧氏空间，人们使用"实数算符"研究物理量、轨道角动量和自旋角动量的性质。

而非欧氏量子力学空间是弯曲的，轨道角动量和自旋角动量发生了数学变形，"实数算符"已不能继续保证自洽地完成轨道角动量和自旋角动量的逻辑推理过程，不能够得出符合客观物理世界规律的正确计算结论。 为了维护和谐，由此而生了"胚胎算符" 或者 "非厄米算符"。

"胚胎算符"是由"实数算符" 和 "虚数算符" 共同组成，如同复数由实数和虚数共同组成。虚数,"虚数算符"在量子力学发展中扮演着重要角色。给个粗糙的比喻：
欧几里德量子力学是研究，实数1的平方等于正数1的量子力学；非欧几里德量子力学是在前者基础上，添加了虚数i的平方等于负数1成分的复数量子力学。

量子力学是大学理科同学们主修的物理学四大力学之一的学科，量子力学又是其中最富于有活力，最有趣的学科。所以对大学生，我会讲：

物理量在经典牛顿力学中是普通的常数变量，所有物理量之间满足乘法交换律。这个代数运算规则在量子力学中不成立了，物理量都换成了运算符号，即算符。算符之间的运算一般是不满足乘法交换律的。
物理学中的观察量都是实数值。在欧几里德量子力学中,绝大多数物理量算符都是厄米算符。厄米算符能够给出实数物理量数值。描述粒子轨道角动量的算符，自旋角动量的算符都是厄米算符。教授们在课堂传授的量子力学是 "厄米量子力学"，是以欧几里德数学空间为框架建立的量子力学。

厄米算符能给出实数值，但这仅仅是充分条件，能给出实数值的算符不一定就是厄米算符。于是必要条件在暗示着我们，非厄米算符也有可能给出实数值。作者在"高等非欧几里德量子力学"一书，介绍了一个被称谓胚胎轨道角动量$\mathbb{L}_3$的非厄米算符。$\mathbb{L}_3$的本征值,内禀固有轨道角动量$2m_0\hbar$以及算符$\mathbb{L}_3$的两个旋量基态本征波函数$\phi_0^{+2m_0}$，$\phi_0^{-2m_0}$是该书的精华。

这个算符在欧几里德数学空间是非厄米微商算符，然而在非欧几里德数学空间，胚胎轨道角动量$\mathbb{L}_3$能够提供实数值。在满足波函数周期循环守恒的条件下，这些实数值竟然可以取非整数数值，这是个重要的突破。
粒子作圆周运动时，粒子的轨道角动量竟然可以不是普朗克常数的整数倍！这个现象在正统量子力学中是不可令人想象的。尽管这个结论不被传统量子力学的理论所包容，我们却沾沾自喜。这个结果恰恰是我们所期望的。我们有时热衷于制造麻烦，对抗传统，为的是颠覆固步自封的守旧，催生新颖思维的诞生。

欧几里德量子力学提供的量子数是普朗克常数的整数倍，或者是半整数倍。非欧几里德量子力学则是要打破世袭等级制度，开辟新天地，漫游实数轴上那些与非整数倍，非半整数倍的普朗克常数牵连的多彩物理世界。

在非欧几里德数学空间，如果非厄米算符具有实数本征值，则称这个非厄米算符是“正定的”。正定算符是欧氏空间的厄米算符在非欧氏空间的升级版。胚胎轨道角动量$\mathbb{L}_3$是正定算符，是成全"第三种粒子"完稿的敲门砖！

通常踌躇满志的硕士研究生，乃至迈入学问金字塔尖的博士生们，最关切的莫过于自己学科领域细节间的脉络链接，框架构思的掌握。所以对研究生，我会讲：

最珍贵的幸运是，作者创造了胚胎轨道角动量 $\mathbb{L}_j$ {第一章(9),(10),(11)}；
最漫长的艰辛是，找到了算符$\mathbb{L}_3$的旋量基态家族 $\Delta_m^{-2m_0}$ 成员Ej的归一化波函数 $\Phi_j$，$|m, n\rangle_-$ {第三章(106),(124)}；

最轻易的满足是，将胚胎轨道角动量$\mathbb{L}_+$，$\mathbb{L}_-$，$\mathbb{L}_3$，$\mathbb{L}^2$ 投影到线性空间 $_-\langle \mu, n\|$，$|m, n\rangle_-$，{第四章(39),(40),(41),(42)}。

在欧几里德量子力学，玻色自旋粒子和费米自旋粒子使用有限维厄米矩阵表示；
而在非欧几里德量子力学， 玻色自旋粒子，费米自旋粒子以及第三类粒子都是使用无限维矩阵表示的。其中角动量的第一分量，第二分量是非厄米无限维矩阵，而第三分量矩阵依然保持厄米性质，是对角无限维矩阵。
自旋轨道角动量引入非厄米无限维矩阵表示， 能送给我们非整数，非半整数的自旋数值。

我们恪守这样的背景原则：能够成全第三种粒子自旋角动量的外貌透视图应该由非常完美而简单的数学符号们勾画而成。一旦呈现任何破坏画卷中数学和谐的企图的迹象，宁愿割爱，中断先前构思想象,抛弃已有计算推演，重返原点,寻求新路。

科学不是工程，一项工程往往很复杂，需要专家鉴定考证。工程把关是行家们的特权；而科学思想的鉴赏则完全不同，往往不太容易受到学历层次限制。科学价值是公认的，是无法被腐败的。

爱好者可以象专家一样，都有机会成为科学价值的鉴赏玩家。只要记住：如果你能将美好的想象用一些简洁的数学符号，或者一些明了的数理公式表达出来，只要看了让人养眼，则多半是上成色的。简单就是和谐！就是完美。科学价值的判断与艺术审美的欣赏是紧密相连的。

“第三种粒子”以整体主义方式识别宇宙微观世界中粒子的不同旋转画面：这些算符的数理逻辑运算,带来舒适,简朴有序的理解途径。为欣赏旋转画面深度细节的精妙之处，提供令人信服的可靠考证。对深陷于科学遥远边界的探索者们，我想说：

“第三种粒子”的出现，会影响量子力学中角动量的三个分量平方之间的权重分布，会出现第三分量平方大于三个分量平方之和(第一分量平方, 加第二分量平方, 加第三分量平方)的离奇几何现象。

而在正统量子力学理论体系，玻色粒子或者费米粒子的自旋角动量的第三分量平方是小于三个分量平方之和(零自旋粒子情况下，等于)。第三种粒子生存于非欧几里得几何空间。

“第三种粒子”的出现，可能会简化对分数量子霍尔效应的理解；可能会冒出光怪陆离的第三种粒子体系统计现象；可能会激起对超光速运动的想象；可能会重新审视基本粒子标准模型中夸克自旋,颜色,味道的理解；可能与暗物质的存在有关……

一流的物理学见解多半是富于生命力的黄金构思，会激起普通学者的关注，乃至于非专业的物理学爱好者们加入讨论。人人跃跃欲试，大家都有机会，尝试去做做第一流的工作，感受开拓者遍地黄金的狂喜心情，这是“第三种粒子”的第一祈愿。

创新思维往往带有主观心理愿望的成分，思考者很难尝试做到立题与结论的先后一致。 而我们居然一次，又一次如愿以偿地达到了，而且接应不暇。

“第三种粒子” 似乎再一次见证了数学神秘主义的力量始终伴随着自然科学的发展。有时候简直不敢用运气来解释了。

无畏无惧的无神论者认为数学是人们理解客观外界规律的一种抽象化的数字符号的逻辑推理，而数学力量的神秘主义只不过是人们经验累积的思维幻觉产物；

敬畏神灵的虔诚信徒，迷信数学力量的神秘主义，视数学逻辑推理归结于造物主授予世人与宇宙进行对话的思维方式，是一次从天而降的偶然语法安排。

延续不断的各色宗教争执，在这颗星球的蓝色大气层下一直没有停止过,尽管人类向外太空间深处的移民步伐已经在加快。

“ What you are is God’s gift to you,
What you make of yourself is your gift to God ”

这段箴言大致可以翻译成：“你的存在是上天赐予你的礼物，你的作为是你回馈给上天的礼物。” 该是如此这样理解吧。

天下万物之道如此， 我们的探索动机如此，争执结局的分晓自然更是如此。

或许，根本就不存在哪一方遭到排斥的理由，一切都是在证明造物主存在的光辉与万能。

“第三种粒子”又是一部物理量、普朗克常数的童话故事。依据普朗克常数的不同境遇，避世绝俗地在编造各色物理卡通粒子人物， 这给我们带来了不受约束的创作热情和自我欣赏的尽情享受，已经足够了。 大凡持续的美好时光，在人的一生中，总不会持久太长，如果有在，便也有非在。

在创造精力得以释放，想象价值得以赞叹，一阵又惊又喜的激动感趋于平缓之后，“第三种粒子”此刻该做的是，赶紧将非厄米自旋角动量的内容整理成文说清楚，让自己和别人都一目了然。

我们私自解读世界和谐与世俗现状之成因， 绝非心存离经叛道异教徒之邪念。恰恰相反，我们是坦然的，无需诚恐诚惶，无需担心介意。我们内心所欲的一切，行为所做的一切都是在证明造物主存在的光辉与万能。

在启蒙的第一道曙光沐浴下，诞生了生命意识的自我感觉，我们明白这是上天赐予的；来自世俗生活的我们，享用了这么多美好的生命时光，我们明白这是上天在庇护着。

黄昏的奇幻霞光在慢慢地褪去，散落在绚丽多彩的天际，时间是不能储存的，唯独放缓脚步,欣赏人间的沿途风情。或许这样可以观察到他人看不到的景物，体验到他人品尝不到的经历。

称颂万物无常的回归，回味与上天的心灵对话。“第三种粒子”是拣择回馈上天的礼物，默念赞美上天厚恩待我的仰望。 这是“第三种粒子” 的另一祈愿。

论文是专题，目的是创新，忌畏浮躁；书成体系，故事讲述者，强调条理。

论文难，著书更难。倒不如以算稿的形式，综合论文，著书为一体。侧重逻辑过程，淡薄结论是非的文笔似乎更容易透视作者的构思路径。

尽可能的详细构思想象和耐心推导过程交给读者是本书的宗旨和特色，这在通常学术专著，甚至于流行教科书中都是不常见的。

现在的人都知晓 “细节决定成败” 的道理。 想做大事情， 千万不要低估平庸的“源程序”。不求体大思精，既然是圈子内首次阐述第三种自旋粒子概念的专著，书页似乎有需要写得 “实在点”，少点玄乎，好让读者一气呵成，领悟精髓。

本书由作者未曾发表论文汇集而成，自成一家学术方言。文字修辞陈述逻辑安排，尤其数学符号复杂繁琐，对于完成算稿性专著的排版输入，绝非一件轻松的力气活。

书终于完稿了：路怎么一步步走，学问怎么一步步做， 不仅成为作者的感悟，而且也希望成为读者的体会，

任 绍 绪

2011年5月5日， 立夏前日 于上海康平书院

# 目录 (A)



# Contents (A)

# 目 录(B)

# 第零章　两个物理量与一个数学级数之间的故事

我想谈谈两个物理量与一个数学级数之间的故事。两个物理量是角动量和能量。一个数学级数是由等差数列组成的级数。

满足数学乘法相减循环运算关系式：

$$\mathsf{L}_j\mathsf{L}_k - \mathsf{L}_k\mathsf{L}_j = i\hbar\ \mathsf{L}_l \qquad j,k,l = 1,2,3\ \text{循环} \tag{0}$$

的任何运算算符，我们都称之为角动量算符。以上三维矢量运算符号$L_1, L_2, L_3$是角动量算符，或者简称角动量。称数学关系式(0)为角动量对易关系。任何物理现象一旦表现具有满足关系式(0)的规律，就说它们是角动量。简洁起见，有时取$\hbar=1$。

角动量算符在数学和物理学的理论研究和工程技术实际应用中占有相当地位。

数学矩阵是由许多一维数组排列而成的集合。传统量子力学中粒子自旋角动量是用有限大小的矩阵，即有限维矩阵表示的。物理信息储存在角动量的三个矩阵分量$L_1,L_2,L_3$之中。三个矩阵分量都是厄米算符，因为厄米算符能够提供实数观察量。

实际上人们观察得到的物理信息，是从第三分量$L_3$获得的。通常这些信息分布在表示第三分量$L_3$的矩阵主对角线(或者简称第零级对角线)上。只要看到第零级对角线上矩阵元的数值，就可以直接读出实际物理观察量。这些观察量的学术称谓叫矩阵$L_3$的本征值。

由于角动量的三个分量$L_1, L_2, L_3$之间存在着对易关系(0)，而矩阵的数学运算规则只能够将这三个矩阵中的一个矩阵(实际上人们已经提前选择分量$L_3$为对角矩阵)做成对角阵，因此第一分量$L_1$, 第二分量$L_2$虽然也是厄米矩阵，却无法和第三分量$L_3$同时对角化，进而无法同时直接观察到它们的本征值，无法同时直接感觉到它们的存在和影响作用。

无法直接观察到第一分量$L_1$, 第二分量$L_2$的存在！ 并非意味着日长天久慢慢地遗忘第一分量$L_1$, 第二分量$L_2$的存在。要知道还有许多物理信息隐含在第一分量$L_1$, 第二分量$L_2$之中。

此外，传统量子力学角动量的矩阵表示是有限维的，角动量算符三个分量$L_1$, $L_2$, $L_3$都是厄米矩阵。这些概念是根深蒂固的。

寻觅第三种自旋粒子的潜在理论，作者经历了一番折腾。《第三种粒子(A)》内容部分，第1章至第6章简洁质朴的陈述显示：唯有调节第一分量$L_1$, 第二分量$L_2$的矩阵结构内涵，将它们排列成非厄米矩阵，而且是无限维矩阵(有时半无限维矩阵)才能够拼贴出第三种自旋粒子，

能量$E$和角动量$\hbar$ ($h=2\pi\hbar$)

$$E = \hbar\omega = h\nu \qquad (1)$$

物理学世界中还有一位举足轻重的成员,能量。能量是做事情的本事，能量无所不在，无所不能。能量具备沟通联系不同领域之间物理现象规律的功能，是物理社会的通用国际交往语言。在《第三种粒子(A)》内容部分，第7章将揭示能量与自旋角动量之间还存在另一缕鲜为人知的因缘。

在能量表现形式的所有书写中，使用(1)，使用角动量表示能量的语句，可能是最佳的。因为这生动地体现着现代物理学发展对于两者不可缺少地位的认同，能量始终与角动量相辅相成，出现在科学史中：

a) 德国人普朗克在1900年使用$\hbar$创立了量子论(2)。$\hbar=h/2\pi$是普朗克常数。$\hbar$的物理学量纲单位是角动量，角动量描述物体旋转的能力，$\hbar$的能力大约$1.054 \times 10^{-27}$尔格-秒，生活中这是个相当不起眼，渺小的数值。

$$E_n = n\hbar\omega, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \qquad (2)$$

$E_n$解释一个谐振子可能具有的能量或者是电磁场在空腔内振动时可能具有的模式。$\omega=2\pi\nu$，$\omega$是圆周旋转频率，$\nu$是直线来回振动频率，神奇的无理数$2\pi$将两种不同周期运动物理现象$\omega$和$\nu$联系在一起。物理学量纲单位指出，能量是频率与角动量的乘积(1)，$E=\hbar\omega=h\nu$，在这个意义上，能量与角动量是互通，相互包容的。

b) 量子力学发展中第一个有份量的微分方程，是1926年的薛定谔方程。薛定谔是奥匈帝国人。这个方程给出谐振子的能量是：

$$E_n = (n + \tfrac{1}{2})\hbar\omega, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \qquad (3)$$

(3)与(2)的唯一的差别在于级数的首项不同，级数(2)的首项是$0\hbar\omega$，级数(3)的首项是$\frac{1}{2}\hbar\omega$。式子(3)显示一个能量谐振子的最小值不是普朗克规定的$0\hbar\omega$(2), 而是级数(3)的首项, $\frac{1}{2}\hbar\omega$。！ 千万不要小看在数学表达式上的这点差异，这是量子论和量子力学的根本区别，青出于蓝而胜于蓝，后者远远高明前者。

公式(2)和公式(3)是人类在认识客观外部世界的漫漫历程中，第一次意识到能量极有可能是以一份,一份的方式储存在宇宙之中，一份,一份$\hbar\omega$容量大小的能量正在由星云,星系，由分子,原子发射,传播,接收着。

薛定谔方程真是一个好东西，通过它，微观世界许多扑朔迷离的物理现象得到解释；现实生活中许多精巧的科学仪器和强大的技术工程得以想象，设计制作出造福人类。遗憾的是近一个世纪以来，使用薛定谔微分方程讨论物理问题，给出的解析解少之又少。而恰恰只有解析解才能提供清晰的数学级数脉络。

c) 在这之前的1925年德国人海森堡，玻恩和约尔丹认为谐振子的能量不通过求解微分方程也可以获得辐射谐振子(2)相同结果。他们认为在微观世界，不少物理量之间的代数运算是不遵守乘法交换律的，即AB≠BA。用数学的语言词汇就是A，B之间是不可对易的。

在一阵忙碌之后他们才知道，数学家们早早建立的矩阵概念的运算是不满足乘法交换律的。于是水到渠成，物理学家们发现了使用矩阵表示的谐振子能量公式(4)。

$$E = \hbar\omega\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & +9/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & 0 & +7/2 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & 0 & 0 & +5/2 & 0 & 0 \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & +3/2 & 0 \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & +1/2 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

矩阵(4)中沿着对角线方向，从右下往左上依次排列的矩阵元数值等价于级数公式(3)的结果。薛定谔和海森堡分别创立了量子波动力学和量子矩阵力学。级数(3)和矩阵(4)显示这两种力学的等价性。不妨称级数(3)为薛定谔能级级数，称矩阵(4)为海森堡振子矩阵。

海森堡振子矩阵(4)实在是太有用处，太有名气了，以至于几乎每种版本的量子力学教科书中，无论是经典的，还是实用的，多少都会予以相当的篇幅予以介绍,引用和讨论。海森堡振子矩阵(4)是半无限维矩阵，今后我们要证明在“第三种粒子”的理论框架内，(4)只是费米性谐振子无限维表示的一部分。

d) 公式(3),(4)首项为 $\frac{1}{2}$ ,等差是1, 的半无穷递增级数。一目了然。正统的能量谐振子(3),(4)的每相邻两个能级的落差是一个正负整数普朗克常数$\hbar$(乘以频率$\omega$)。我们称这种谐振子为<u>整数能量谐振子</u>。整数能量谐振子表明自然界中谐振子吸收能量时，相邻能级的每一次的容量都是普朗克常数$\hbar$(乘以频率$\omega$)的一个整数倍。

<u>奇怪的是</u>，这种级数项间，等差是整数1的现象，甚至在我们发展的新概念物理中，玻色谱系粒子(第3章(10),第4章(8))，费米谱系粒子(第2章(5))，还是第三种自旋粒子(第1章(4)以及第一代混沌自旋粒子(第6章(5))的自旋角动量第三分量表示以及与它们对应的的能量谐振子公式(第7章(52),(34),(18))之中居然也是成立的。

这三种自旋粒子以及第一代混沌自旋粒子的每相邻两个振子能级的落差也是一个正负整数普朗克常数$\hbar$(乘以频率$\omega$)。由此可见整数能量谐振子理论基石的坚挺厚实。现代辐射原理是以整数能量谐振子理论建立的。

等差数列级数 $\frac{1}{2}$，$\frac{3}{2}$，$\frac{5}{2}$，$\frac{7}{2}$，……和角动量$\hbar$，能量$E$

级数的项数有长有短，有无穷级数，有有限级数；矩阵的维数有大有小，有无限维矩阵，有有限维矩阵；如果将级数的排列与矩阵的本征值的排列做对偶比较，对于那些使用矩阵表示的角动量，能量，我们可能会重新理解它们的存在方式。

量子世界出现的物理量多半是离散而具有一定分布规律的数字，级数表示显然是最佳人选。因此波动力学和矩阵力学在处理物理问题时，常常都要和级数打交道。

寻求级数解，波动力学通过求解微分方程。需要通过微积分解析法确定物理世界的边界条件，数学运算的幂级数渐进递推公式等等一大堆拖泥带水的繁杂工艺。微分方程似乎慢慢地在淡出量子力学，方程的作用多半出现在大学生物理课，初等量子力学入门，量子力学思想发展史座谈会。

相形之下，矩阵力学则相当讨巧。学术讨论，科研计算尤为流行。尤其计算机在处理量子力学数据时，矩阵运算远比求解微分方程要规范简单。

设法将讨论的物理构思梳理成矩阵图表，然后将这个矩阵变换成对角矩阵，大功告成，此时呈现在主对角线元素的数值就是结果。如果物理结果显示矩阵元素表示呈级数分布，物理结果一般多为可信。有时候，主对角线元素显示的级数排列相当得漂亮，而且特别地赏心悦目，经验告诉我们，此刻水面下必定有大鱼在游弋，譬如出现在前面的能量谐振子(4)。本书第1章素描勾画的第三种粒子角动量轮廓、(1),(2), (4)也应该说是有点级数灵气的。 你只要具备行列式，矩阵运算规则等线性代数一些常识，就可以临阵磨刀，尽快迈入科学研究前沿。同学们，学者们宁可使用矩阵，而尽量回避微分方程，这好像已是一个不争的规律。

天下千事万物总也有例外。一个唯一的成功例外是狄拉克电子微分方程。英国人将矩阵和微分方程结合在一起，而且还和爱因斯坦的相对论挂上了钩，创立了货真价实的相对论量子力学方程(5)，可谓将量子力学发挥到极致，这还是1928年的故事。今后世上再次出现这样激动人心的大师级物理思想精神，难！

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - c\vec{\alpha}\cdot\vec{P} - mc^2\beta\right)\Psi = 0 \tag{5}$$

狄拉克方程的矩阵$\vec{\alpha}$是4乘4维矩阵，矩阵$\vec{\alpha}$中含有与电子的自旋有关的两维矩阵$S_{3,+1/2}$

$$S_{3,+1/2} = \hbar\begin{bmatrix} +1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix}, \tag{6}$$

电子是费米型自旋粒子，矩阵$S_{3,+1/2}$用来描述电子自旋第三分量。$S_{3,+1/2}$的对角线矩阵元出现的正负半整数,$+\frac{1}{2}$,$-\frac{1}{2}$表示电子旋转时唯一可能具有的两种数值大小。与能量谐振子(4)比较，自旋角动量$S_{3,+1/2}$(6)是位小个子矩阵，只有两维空间。却是物理学中最具有活力，最具有数学价值的2乘2维矩阵。

矩阵$S_{3,+1/2}$(6)的两个对角元素$+\frac{1}{2}$与$-\frac{1}{2}$之间的数值相差整数1，可以看成等差是整数1的级数。只不过是只有两项的有穷级数。主对角线相邻两个矩阵元数值差是正负整数1的结论在(4),(6)都成立。

如果将数列$+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}$(7)看成是如下无穷级数(8)，或半无穷级数(9),(10)的一部分

$$\widetilde{S}_n = \underline{+\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}} \tag{7}$$

$$S_n = \ldots,+\tfrac{7}{2},+\tfrac{5}{2},+\tfrac{3}{2},\underline{+\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}},-\tfrac{3}{2},-\tfrac{5}{2},-\tfrac{7}{2},\ldots\ldots \tag{8}$$

$$S_n = \ldots,+\tfrac{7}{2},+\tfrac{5}{2},+\tfrac{3}{2},\underline{+\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}} \tag{9}$$

$$S_n = \underline{+\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}},-\tfrac{3}{2},-\tfrac{5}{2},-\tfrac{7}{2},\ldots\ldots \tag{10}$$

那么模仿谐振子能量(4)中本征值的级数排列，相应地我们可以反过来将已知级数(8),或者级数(9),(10)看成是一个未知无限维对角矩阵$\Omega_{3,+1/2}$第2章式子(5)的，或者某个半无限维对角矩阵,《第三种粒子(B)》第八章(51),(66)的主对角线上所有本征值的有序排列。后来发现这个未知的无限维对角矩阵$\Omega_{3,+1/2}$，竟然原来就是“第三种粒子”费米谱系中的二分之一自旋粒子角动量第三分量。

人人都能很随便地写出一个自认为漂亮的级数表达式，并认为这个矩阵就是所要求的某种自旋角动量的第三分量$\mathbf{L}_3$。但是，仅从矩阵$\mathbf{L}_3$，你是绝对无法正确地找出第一分量$\mathbf{L}_1$, 第二分量$\mathbf{L}_2$的矩阵结构！缺少第一分量$\mathbf{L}_1$, 第二分量$\mathbf{L}_2$的陪衬相辅，随意选定的某种算符$\mathbf{L}_3$， 依靠什么学业文凭，认定它就是角动量算符？证明它就是合格的角动量的第三分量呢？没有自旋角动量第一分量, 无限维非厄米矩阵$\Omega_{1,+1/2}$(第2章(3))和第二分量,$\Omega_{2,+1/2}$(第2章(4))，何来漂亮的自旋角动量第三分量,无限维对角厄米矩阵$\Omega_{3,+1/2}$(第2章(5))？

第2章二分之一自旋粒子$\Omega_{j,+1/2}$(3),(4),(5)中各级对角线矩阵元的无限等差级数的分布耐人寻味，第7章二分之一自旋能量谐振子矩阵(19),(20),(34)中各级对角线矩阵元的无限等差级数的分布更加耐人寻味；第7章整数能量谐振子起源的说法等价于第1章至第6章自旋角动量第三分量的语言，这两个物理量之间存在等价互换的对偶观念。

不过相比较，找寻第1章三分之一自旋角动量第一分量,$\Omega_{1,+1/3}$(1-1),第二分量,$\Omega_{2,+1/3}$(1-2)的艰辛远远大于寻找第7章三分之一能量谐振子的坐标算符**Q**(7-1),动量算符**P**(7-2)；后者可以比较容易地从《第三种粒子(B)》第十三章,第十六章，借助产生算符，湮灭算符之间的海森堡关系式求出；而寻觅前者(《第三种粒子(B)》第一章至第五章，第七章至第十章)的探索，当初可谓是毫无前车之鉴，一筹莫展,好不容易：

从《高等非欧几里德量子力学》的胚胎轨道角动量$\mathbb{L}_3$求得了基态家族$\Delta_m^{-2m_0}$成员EJ的归一化波函数$\Phi_j$，好不容易。波函数$\Phi_j$(106),(124)(《B》第三章)是无穷级数；从《B》第四章表格(135),(136),(137)，至《B》第九章混沌自旋粒子矩阵(23),(24),