数量经济学系列丛书

数理金融

资产定价的原理与模型（第2版）

郭多祚　主编
佟孟华　副主编

QUANTITATIVE ECONOMICS

清华大学出版社

数量经济学系列丛书

数理金融

资产定价的原理与模型（第2版）

郭多祚　主编
佟孟华　副主编

清华大学出版社
北京

内容简介

本书以资产定价为主线，讲述了两种资产定价方法：无套利定价和均衡定价；讲述了各种资产定价的模型：债券定价模型，以股票为代表的风险资产的定价模型、金融衍生产品定价模型、期权定价模型，并按难易程度，首先讲述单期定价模型，然后讲述跨期定价模型。本书还介绍了 MM 理论以及行为金融学。

本书适用于经济、管理类专业的本科生、硕士生教学，也适用于理工科专业学生的选修课，还可供从事金融工作的人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

数理金融：资产定价的原理与模型/郭多祚主编. --2 版. --北京：清华大学出版社，2012.3
(数量经济学系列丛书)
ISBN 978-7-302-28716-2

Ⅰ. ①数…　Ⅱ. ①郭…　Ⅲ. ①金融市场—资产评估　Ⅳ. ①F830.9

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 088193 号

责任编辑：张　伟
封面设计：傅瑞学
责任校对：王凤芝
责任印制：张雪娇

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
课 件 下 载：http://www.tup.com.cn，010-62770177-4903
印 刷 者：北京富博印刷有限公司
装 订 者：北京市密云县京文制本装订厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　**印　　张**：17.75　**插　　页**：1　**字　　数**：410 千字
版　　次：2006 年 8 月第 1 版　　2012 年 3 月第 2 版　　**印　　次**：2012 年 3 月第 1 次印刷
印　　数：1～4000
定　　价：33.00 元

产品编号：044487-01

第 2 版前言

本书自 2006 年出版以来，被许多院校选用作为教材，并提出了许多宝贵的意见和建议。因此，在原书的基础上进行了修改，出版本书的第 2 版。

在第 2 版中，修改了第 1 版的印刷错误，为了便于对本书内容的理解，对原书中部分内容的讲解进行了细化，增加了一些例题。为使内容更加完整，增写了部分章节。

为了便于本科生教学，第 2 版编写了习题。一般来说，本书的前 5 章可适应于本科生教学，其中的部分内容在教学中可不讲解或让学生阅读，例如 3.6、5.6.3 和 5.6.4，第 2 版在这几节前面加上了星号。

以本书为教材的数理金融课程在 2009 年被评为辽宁省精品课，并且制作了课件，可供使用本教材的教师进行交流、使用。

本书是国家级教学团队——“经济计量分析类课程”教学团队系列教材之一。

第 2 版的出版得到了清华大学出版社的大力支持，在此表示衷心感谢！

编　者

2011 年 12 月

东北财经大学 师道斋

第 1 版前言

数理金融学(mathematical finance)是 20 世纪后期发展起来的新学科。数理金融学的特点是以数学为工具对金融学的核心问题进行分析和研究。资产定价问题是金融学的三个基本研究内容之一,它与数学密切相关。数学工具的运用使金融学成为一门真正的科学。现代金融学产生于"两次华尔街革命"。第一次华尔街革命是指 1952 年马科维茨(H. M. Marcowitz)投资组合选择理论的问世。此后,马科维茨的学生夏普(W. F. Sharpe)在马科维茨理论的基础上,提出了资本资产定价模型(capital asset pricing model,CAPM)。他们两人的成果获得了 1990 年诺贝尔经济学奖。他们的工作是利用数学工具,在严格假设的基础上,利用数学推理论证解决了风险资产的定价问题,是将数学方法应用于金融学的成功范例,也是划时代的开创性工作。第二次华尔街革命是指 1973 年布莱克(F. Black)和斯科尔斯(M. S. Scholes)期权定价公式的提出。这一成果荣获 1997 年诺贝尔经济学奖。他们也是利用数学工具解决了重要的金融衍生产品期权的定价问题。两次华尔街革命标志着现代金融学的诞生,同时也产生了一门新的学科:数理金融学。

随着金融市场的发展及各种金融创新不断出现,各种金融衍生产品层出不穷,这又给数理金融学的发展提出了更高的要求,同时也为数理金融学的发展提供了广阔的空间。数理金融学成为金融工程学的理论基础。现代金融学离不开数学,因此无论是从事金融理论研究还是金融市场决策有关的实务工作都需要学习数理金融理论,掌握利用数学工具分析金融问题的方法。数理金融学能使经济和管理专业的学生掌握定量分析的方法和技术。同时,对于数学和理工科专业的学生来说,通过学习数理金融学也使他们所掌握的数理工具大有用武之地。

本书以资产定价的原理和模型为主线,主要介绍资产定价的无套利定价和均衡定价原理,以及以此为依据的债券定价、风险资产定价和衍生产品定价模型。本书从易到难先介绍单期模型,然后介绍多期模型。

本书共分 9 章。第 1 章介绍期望效用函数理论、投资者的风险类型及其风险度量以及单期无套利模型和均衡定价模型,是学习金融经济学和数理金融学的基础知识。第 2 章主要研究金融学研究的主要内容之一:货币的时间价值。这也是各种投资决策的基础,同时也是债券定价的理论依据。这章的末尾研究了债券价格波动分析与测度。第 3 章介绍了马科维茨的投资组合选择理论和资本资产定价模型,主要以股票为例讨论了风险资产的定价问题。第 4 章主要研究以多因子线性模型为依据,以无套利分析为出发点,考虑多因素共同影响资产价格的条件下的风险资产的定价问题。第 5 章主要介绍金融衍生产品期权及其定价问题。这章的核心是复制技术与无套利原则在资产定价中的应用,以及市场的有效性及股票价格变动模式,并以此为依据解决期权的定价问题。它也是各种未定权益定价的基础。第 6 章的多期无套利定价模型是单期无套利定价原理的推广,

讲授的是多期无套利定价原理,它是各种随机现金流定价的基础。第7章介绍MM理论,它是无套利原理的一个重要应用,另外还讨论了公司资本结构问题。第8章是把资本资产定价模型推广到连续时间动态模型,讨论了考虑投资和消费情况下的动态的投资组合选择和基于消费的资本资产定价模型。这8章以资产定价的原理和模型为主线,介绍了现代金融理论的成功之处,以及可供借鉴的各种分析金融问题和解决金融问题的方法。但是任何理论都不是完美无缺的,第9章从现代金融理论存在的缺陷为突破口,介绍了行为金融理论。行为金融理论虽然现在还不成熟,但是2002年诺贝尔经济学奖授予了美国普林斯顿大学Peniel Kahneman和乔治梅森大学Vernon L. Smith教授,也使得行为金融学和用实验方法研究金融问题得到了人们的重视。这章主要概括地介绍行为金融学,以扩大读者的视野。

本书的特点是以数理金融学中的资产定价理论作为核心内容,从单期模型由浅入深推广到多期模型。与通常的金融经济学相比,更侧重于数学方法的运用。与金融数学类的书相比,本书介绍了金融学问题的提出和问题的解决过程。本书可作为经济管理类本科生教材,可重点学习第1~5章和第7章,其他各章可供参考。对于研究生,可讲授第6章和第8、9章。对于理工科相关专业,可作为选修课教材。也可供金融理论研究和实务工作者参考。

本书的第2、6、7章由佟孟华编写,第3、4章由徐占东编写。郭多祚编写其余各章并负责全书的整体构思。

由于作者水平有限,书中难免出现缺陷和错误,欢迎专家学者以及各院校的师生批评指正。

编 者

2006年5月

目　　录

第1章 期望效用函数理论与单期定价模型

众所周知，在经济学中效用函数是偏好的定量描述，也是投资人决策的依据。金融学是在不确定性的环境中进行决策，金融资产的价格和投资收益都是随机变量，我们如何确定它的效用，是必须解决的重要问题。

期望效用函数理论是 von Nenmann 和 Morgenstern 创立的。期望效用函数是对不确定性的环境中各种可能出现的结果，定义效用函数值，即 von Nenmann-Morgenstern 效用函数，然后将此效用函数按描述不确定性的概率分布取期望值。本章首先介绍期望效用函数理论，然后在此基础上研究投资者的风险偏好以及风险度量，最后介绍单期定价模型。

1.1 序数效用函数

期望效用函数是基数效用函数。为研究基数效用函数，我们首先介绍序数效用函数。序数效用函数只要求效用函数值与偏好关系一致，即如果消费者认为商品 x 比商品 y 更受偏好，我们定义的序数效用函数就要求 x 的效用函数值比 y 的效用函数值大。

假设商品选择集 B 是 n 维欧氏空间$\mathbb{R}^n$ 中的凸集。我们首先引入偏好关系概念。

1.1.1 偏好关系

设 B 是 n 维欧氏空间$\mathbb{R}^n$ 中的凸集，在 B 中引入一个二元关系记为“$\succeq$”，如果它具有：

(1)（反身性）若 $\boldsymbol{x}\in B$，则 $\boldsymbol{x}\succeq\boldsymbol{x}$；

(2)（可比较性）若 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in B$，则 $\boldsymbol{x}\succeq\boldsymbol{y}$ 或者 $\boldsymbol{y}\succeq\boldsymbol{x}$；

(3)（传递性）若 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in B$，如果 $\boldsymbol{x}\succeq\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{y}\succeq\boldsymbol{z}$，则 $\boldsymbol{x}\succeq\boldsymbol{z}$。

我们称“$\succeq$”是一个偏好关系。

上述的二元关系可以理解如下：若 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in \mathrm{B}$，$\boldsymbol{x}\succeq\boldsymbol{y}$，则认为 $\boldsymbol{x}$ 比 $\boldsymbol{y}$ 好，或者 $\boldsymbol{x}$ 不比 $\boldsymbol{y}$ 差。若 $\boldsymbol{x}\succeq\boldsymbol{y}$ 与 $\boldsymbol{y}\succeq\boldsymbol{x}$ 同时成立，则 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 偏好无差异，记作 $\boldsymbol{x}\sim\boldsymbol{y}$。若 $\boldsymbol{x}\succeq\boldsymbol{y}$ 但 $\boldsymbol{y}\succeq\boldsymbol{x}$ 不成立，则 $\boldsymbol{x}$ 严格地比 $\boldsymbol{y}$ 好，记作 $\boldsymbol{x}\succ\boldsymbol{y}$。

1.1.2 字典序

我们给出一个偏好关系的例子，设选择集

$$B_2=\{(x,y)\mid x\in[0,\infty),y\in[0,\infty)\}$$

容易验证 B_2 是$\mathbb{R}^2$ 中的凸集，在 B_2 上，定义二元关系$\succeq$如下所述：

若$(x_1,y_1)\in B_2$，$(x_2,y_2)\in B_2$，如果 $x_1>x_2$，或者 $x_1=x_2$，$y_1\geqslant y_2$，定义$(x_1,y_1)\succeq(x_2,y_2)$。

下面验证上述的二元关系是一偏好的关系：

① 若$(x,y)\in B_2$，因为$x=x,y=y$，按定义$(x,y)\succeq(x,y)$，即反身性成立。

② 若$(x_1,y_1)\in B_2,(x_2,y_2)\in B_2$，如果$x_1>x_2$，按定义得$(x_1,y_1)\succeq(x_2,y_2)$，反之，如果$x_1<x_2$，则$(x_2,y_2)\succeq(x_1,y_1)$，如果$x_1=x_2,y_1\geqslant y_2$，按定义则$(x_1,y_1)\succeq(x_2,y_2)$，如果$x_1=x_2,y_1\leqslant y_2$，则$(x_2,y_2)\succeq(x_1,y_1)$，即可比较性成立。

③ 设$(x_1,y_1)\in B_2,(x_2,y_2)\in B_2,(x_3,y_3)\in B_2$，若$(x_1,y_1)\succeq(x_2,y_2)\succeq(x_3,y_3)$，显然$x_1\geqslant x_3$，如果$x_1>x_3$，按定义得$(x_1,y_1)\succeq(x_3,y_3)$，如果$x_1=x_3$，此时$x_1=x_2=x_3$，因为$(x_1,y_1)\succeq(x_2,y_2)$，所以$y_1\geqslant y_2$，又$(x_2,y_2)\succeq(x_3,y_3)$，故$y_2\geqslant y_3$，于是$y_1\geqslant y_3$，从而$(x_1,y_1)\succeq(x_3,y_3)$，即传递性成立。

1.1.3 效用函数

设B是具有偏好关系“$\succeq$”的选择集，$U:B\to R_+$的单值函数，如果$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in B$，$U(\boldsymbol{x})\geqslant U(\boldsymbol{y})$当且仅当$\boldsymbol{x}\succeq\boldsymbol{y}$，则称$U$为效用函数。这里$R_+$是全体非负实数构成的集合。显然，效用函数是偏好关系的一个定量描述，效用函数数值的大小与偏好关系相一致，这样我们就可以按函数的大小作为选择的依据。为了在具有偏好关系的商品选择集B上定义与偏好关系一致的效用函数，需要B上的偏好关系具有三条性质。

1.1.4 偏好关系的三条重要性质

性质 1(序保持性) 对任意$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in B$，$\boldsymbol{x}\succ\boldsymbol{y}$及$\alpha,\beta\in[0,1]$

$$\alpha\boldsymbol{x}+(1-\alpha)\boldsymbol{y}\succ\beta\boldsymbol{x}+(1-\beta)\boldsymbol{y}$$

当且仅当$\alpha>\beta$。

性质 2(中值性) 对任意$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in B$，如果$\boldsymbol{x}\succ\boldsymbol{y}\succ\boldsymbol{z}$，那么存在惟一的$\alpha\in(0,1)$使$\alpha\boldsymbol{x}+(1-\alpha)\boldsymbol{z}\sim\boldsymbol{y}$。

性质 3(有界性) 存在$\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*\in B$，使对任意$\boldsymbol{z}\in B$，有$\boldsymbol{x}^*\preceq\boldsymbol{z}\preceq\boldsymbol{y}^*$。

性质 3 是为了证明效用函数存在定理更方便，性质 1 和性质 2 是重要的，并不是所有偏好关系都具备这三条性质。

字典序具有性质 1 但不具有性质 2。

证明 首先证明字典序具有性质 1。

必要性 若$(x_1,y_1)\in B_2,(x_2,y_2)\in B_2,(x_1,y_1)\succ(x_2,y_2),\alpha,\beta\in(0,1)$，则根据向量运算法则

$$\begin{aligned}\alpha(x_1,y_1)+(1-\alpha)(x_2,y_2)&=(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2,\alpha y_1+(1-\alpha)y_2)\\&=(\alpha(x_1-x_2)+x_2,\alpha(y_1-y_2)+y_2)\\\beta(x_1,y_1)+(1-\beta)(x_2,y_2)&=(\beta x_1+(1-\beta)x_2,\beta y_1+(1-\beta)y_2)\\&=(\beta(x_1-x_2)+x_2,\beta(y_1-y_2)+y_2)\end{aligned}$$

若$\alpha(x_1,y_1)+(1-\alpha)(x_2,y_2)\succ\beta(x_1,y_1)+(1-\beta)(x_2,y_2)$，则必有$\alpha>\beta$。因为若$\alpha=\beta$，必有

$$\alpha(x_1,y_1)+(1-\alpha)(x_2,y_2)\sim\beta(x_1,y_1)+(1-\beta)(x_2,y_2)$$

若$\alpha<\beta$，由于$x_1\geqslant x_2$，则有

$$\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 = \alpha(x_1 - x_2) + x_2 \leqslant \beta(x_1 - x_2) + x_2$$
$$\alpha y_1 + (1-\alpha)y_2 = \alpha(y_1 - y_2) + y_2 \leqslant \beta(y_1 - y_2) + y_2$$

因此

$$\alpha(x_1, y_1) + (1-\alpha)(x_2, y_2) \preceq \beta(x_1, y_1) + (1-\beta)(x_2, y_2)$$

矛盾，故必有 $\alpha > \beta$。

充分性　设 $\alpha > \beta$。

根据字典序的定义，可能有以下两种情况：$x_1 > x_2$，或 $x_1 = x_2, y_1 > y_2$。分别证明如下。

(1) 若 $x_1 > x_2$，则 $\alpha(x_1 - x_2) + x_2 > \beta(x_1 - x_2) + x_2$ 结论成立。

(2) 若 $x_1 = x_2, y_1 > y_2$，则有

$$\alpha(x_1 - x_2) + x_2 = \beta(x_1 - x_2) + x_2,$$
$$\alpha(y_1 - y_2) + y_2 > \beta(y_1 - y_2) + y_2$$

故

$$\alpha(x_1, y_1) + (1-\alpha)(x_2, y_2) \succ \beta(x_1, y_1) + (1-\beta)(x_2, y_2)$$

下面证明字典序不具有性质 2。

取 $(x_1, y_1) \in B_2, (x_2, y_2) \in B_2, (x_3, y_3) \in B_2$，且 $x_1 > x_2 = x_3, y_2 > y_3$，根据字典序定义，此时 $(x_1, y_1) \succ (x_2, y_2) \succ (x_3, y_3)$，对任意 $\alpha \in (0,1)$，我们有

$$\begin{aligned}\alpha(x_1, y_1) + (1-\alpha)(x_3, y_3) &= \alpha(x_1, y_1) + (1-\alpha)(x_2, y_3)\\ &= [\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, \alpha y_1 + (1-\alpha)y_3]\end{aligned}$$

因为 $0 < \alpha < 1, x_1 > x_2$，有

$$\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 = \alpha(x_1 - x_2) + x_2 > x_2$$

所以 $\alpha(x_1, y_1) + (1-\alpha)(x_3, y_3) \succ (x_2, y_2)$，因此不存在 $\alpha \in (0,1)$ 使得

$$\alpha(x_1, y_1) + (1-\alpha)(x_3, y_3) \sim (x_2, y_2)$$

这说明字典序不具有性质 2。

1.1.5 序数效用函数存在定理

定理 1.1　设选择集 B 上的偏好关系"$\succeq$"具有 1.1.4 节中的性质 1～性质 3，则存在效用函数 $U: B \to R_+$ 使得

(1) $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}$ 当且仅当 $U(\boldsymbol{x}) > U(\boldsymbol{y})$；

(2) $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y}$ 当且仅当 $U(\boldsymbol{x}) = U(\boldsymbol{y})$。

证明　由性质 3，存在 $\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^* \in B$ 使对任意 $\boldsymbol{x} \in B$，有 $\boldsymbol{x}^* \succeq \boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}^*$。

如果 $\boldsymbol{x}^* \sim \boldsymbol{y}^*$，此时对任意 $\boldsymbol{x} \in B$，有 $\boldsymbol{x}^* \sim \boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y}^*$，我们定义 $U(\boldsymbol{x}) = c$（常数）。此时，定理显然成立。

若 $\boldsymbol{x}^* \succ \boldsymbol{y}^*$，对任意的 $\boldsymbol{x} \in B$，因为 B 存在偏好关系，只有 3 种情况，分别定义效用函数如下：

情况 1：当 $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{x}^*$ 时，定义 $U(\boldsymbol{x}) = 1$；

情况 2：当 $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y}^*$ 时，定义 $U(\boldsymbol{x}) = 0$；

情况 3：当 $\boldsymbol{x}^* \succ \boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}^*$ 时，性质 2 存在惟一的 $\alpha \in (0,1)$ 使 $\boldsymbol{x} \sim \alpha \boldsymbol{x}^* + (1-\alpha)\boldsymbol{y}^*$，此时

我们定义 $U(x)=\alpha$。

这样,我们完成了效用函数的构造性定义。

(1) 首先证明 $x \succ y$ 当且仅当 $U(x)>U(y)$。

必要性　设 $x \succ y$

① 如果 $x \sim x^* \succ y \succ y^*$,此时 $U(x)=1$,由于 $x^* \succ y \succ y^*$,则存在惟一 $\alpha \in (0,1)$ 使 $y \sim \alpha x^*+(1-\alpha)y^*$,按定义,$U(y)=\alpha<1$,所以 $U(x)>U(y)$。

当 $x^* \succ x \succ y \sim y^*$,此时,按定义 $U(y)=0$,由于 $x^* \succ x \succ y^*$,则存在惟一 $\alpha \in (0,1)$ 使 $\alpha x^*+(1-\alpha)y^* \sim x$,此时 $U(x)=\alpha>0$,即 $U(x)>U(y)$ 成立。

② 如果 $x^* \succ x \succ y \succ y^*$,则存在 α_1,α_2,使

$\alpha_1 x^*+(1-\alpha_1)y^* \sim x$,按定义 $U(x)=\alpha_1$,

$\alpha_2 x^*+(1-\alpha_2)y^* \sim y$,按定义 $U(y)=\alpha_2$,

由性质1,由于 $x \succ y$,必有 $\alpha_1>\alpha_2$,故 $U(x)>U(y)$。

充分性　假设已知 $x,y \in B$,且 $U(x)>U(y)$,证 $x \succ y$。

若 $U(x)=1$,$U(y)=\alpha_2 \in (0,1)$,此时 $x \sim 1x^*+(1-1)y^*$,$y \sim \alpha_2 x^*+(1-\alpha_2)y^*$,由于 $\alpha_2<1$,由性质保序性,$x \succ y$。

当 $U(x)=1$,$U(y)=0$ 时,按定义 $x \sim x^* \succ y^* \sim y$,故 $x \succ y$。

若 $U(x)=\alpha_1 \in (0,1)$,$U(y)=0$,此时

$y \sim y^*=0x^*+(1-0)y^*$,$x \sim \alpha_1 x^*+(1-\alpha_1)y^*$,由于 $\alpha_1>0$,故 $x \succ y$。

若 $1>U(x)>U(y)>0$,此时令 $\alpha_1=U(x)$,$\alpha_2=U(y)$,由 U 的定义,$x \sim \alpha_1 x^*+(1-\alpha_1)y^*$,$y \sim \alpha_2 x^*+(1-\alpha_2)y^*$。因为 $\alpha_1=U(x)>U(y)=\alpha_2$,由性质1,必有 $x \succ y$。

(2) 证明 $x \sim y$ 当且仅当 $U(x)=U(y)$。

必要性　任取 $x,y \in B$,设 $x \sim y$,证 $U(x)=U(y)$,若不然,$U(x) \neq U(y)$。不妨设 $U(x)>U(y)$,有结论1,此时 $x \succ y$,这与 $x \sim y$ 矛盾。

充分性　若 $U(x)=U(y)$,而 $x \sim y$ 不成立,此时有两种可能:$x \succ y$,或者 $y \succ x$。由结论1,必有 $U(x) \neq U(y)$,矛盾,所以 $x \sim y$。证毕。

设 U 是效用函数,函数 $G:R \to R$ 是正值严格单调增加函数,容易证明复合函数 $G \circ U:B \to R$ 也是效用函数。

注1　由效用函数的构造定义,可见序数效用函数不是惟一的,但是都具有如下性质,$U(x)>U(y)$ 的充要条件是 $x \succ y$;$U(x)=U(y)$ 的充要条件 $x \sim y$,即效用函数与偏好关系是一致的,效用的大小是两个选择比较而言的,效用函数的取值大小并不重要。

注2　1.1.4节中的性质1和性质2,对于序数效用函数的存在性起着十分关键的作用,前面我们已经证明了字典序具有性质1,但不具有性质2我们可以证明在字典序 B_2 上,不存在序数效用函数。

若不然,如果存在 B_2 上的效用函数 U,使得 $(x_1,y_1) \succ (x_2,y_2)$,如果 $U(x_1,y_1)>U(x_2,y_2)$,任取 $x \in [0,1]$,显然 $(x,1) \succ (x,0)$,于是 $U(x,1)>U(x,0)$。

设 $U(x,0)=\alpha_x$,$U(x,1)=\beta_x$,则 (α_x,β_x) 是一开区间。如果 $x>y$,根据字典序定义

$$(x,1) \succ (x,0) \succ (y,1) \succ (y,0)$$

于是 $\beta_x>\alpha_x>\beta_y>\alpha_y$。故 (α_y,β_y) 与 (α_x,β_x) 是互不相交的开区间,令 $T:x \to (\alpha_x,\beta_x)$,则 T