

COMPUTATIONAL METHODS
FOR FAILURE PROBABILITY
OF STRUCTURAL SYSTEM

结构体系失效概率
计算方法及应用

宋笔锋 张永苍 著



国防工业出版社
National Defense Industry Press

责任编辑：张永生

zhangyongsheng100@163.com

杜 钧

责任校对：钱辉玲

封面设计：王晓军

xjwang@ndip.cn

上架建议：数 学

<http://www.ndip.cn>

ISBN 978-7-118-07836-7



9 787118 078367 >

定价：22.00元

结构体系失效概率 计算方法及应用

Computational Methods for Failure
Probability of Structural System

宋笔锋 张永苍 著

国防工业出版社

地址：北京市丰台区右安门内大街16号
电话：(010) 68411333
邮编：100054

结构体系失效概率 计算方法及应用

Computational Methods for Failure
Probability of Structural System

宋笔锋 张永苍 著

国防工业出版社

· 北京 ·

图书在版编目(CIP)数据

结构体系失效概率计算方法及应用/宋笔锋,
张永苍著. —北京:国防工业出版社, 2011. 12

ISBN 978-7-118-07836-7

I. ①结... II. ①宋... ②张... III. ①航空
器—结构体系—结构分析:失效分析—概率统计
计算法 IV. ①V214.1②TB114.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 235430 号

※

国防工业出版社 出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

天利华印刷装订有限公司印刷

新华书店经售

*

开本 880 × 1230 1/32 印张 5½ 字数 156 千字

2011 年 12 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—2000 册 定价 22.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店: (010)68428422

发行邮购: (010)68414474

发行传真: (010)68411535

发行业务: (010)68472764

前 言

任何学科或学科分支的发展都是人们对自然界的认识不断深化的结果,认识的不同阶段主要取决于人们当时的实践水平;反过来,认识水平的提高又可以指导人们提高实践水平。结构可靠性分析理论就是这样一个来源于基于安全系数法的结构设计实践,而又进一步推动人们设计更可靠、更安全结构的结构力学分支。

本书的主体实际上是作者在 2000 年获得全国百篇优秀博士学位论文《结构体系失效概率计算方法》。在形成该书的过程中增加了本人和课题组成员的其它最新和有价值的研究成果。

本书共分 10 章,其内容安排基于如下考虑:

第 1 章~第 6 章主要介绍结构失效概率计算方法研究的一些成果。其中,第 1 章~第 3 章是基于界限方法的区间估计和积分法的积分主域概念的。原理上,它们适合安全余量函数线性与非线性情况。第 4 章主要介绍针对安全余量函数线性和随机变量服从正态分布情况的积分方法。第 5 章和第 6 章主要针对安全余量函数非线性或者随机变量不服从正态分布的情况。这 6 章内容覆盖了结构失效概率计算问题的各种可能情况。

第 7 章和第 8 章主要研究了大型复杂结构、尤其是航空航天类大型多余度结构的结构体系可靠性分析模型的建立问题,它涉及多失效模式、多种不同类型的随机变量、考虑强度和刚度失效、安全余量函数线性和非线性等情况。

第 9 章所研究的重要度问题对深入了解结构体系的失效机理,针对性设计高可靠性大型复杂结构系统有帮助。

第 10 章是本书前面所有方法的工程实际应用,阅读这些算例对理

解掌握这些方法很有帮助,同时也是工程应用的范例。

本书第 1 章和第 8 章方法的成果主要是张永苍教授完成的,他现在在美国从事可靠性方面的工作,其余各章由宋笔锋完成。

在书稿形成的过程中,徐继南教授负责了作者发表在国际期刊的英文翻译工作,雷明敏博士负责了全文公式、图表和文字的校对,裴扬副教授负责了与出版社的联络及部分文字工作,在此,感谢他们对我们工作的支持。

作者

目 录

第 1 章 串联系统高阶可靠性界限方法	1
1.1 引言	1
1.2 串联系统高阶可靠性界限方法的推导	2
1.2.1 三阶界限	2
1.2.2 k 阶界限($3 < k < m$)	5
1.3 二阶和三阶共失效概率	6
1.4 结构系统的三阶界限计算实例	8
1.5 小结	11
参考文献	11
第 2 章 基于失效主域的结构失效概率数值积分法	12
2.1 引言	12
2.2 失效概率的积分公式	13
2.2.1 单一失效模式情况时的失效概率积分公式	13
2.2.2 多失效模式时结构系统失效概率积分公式	14
2.3 失效主域的概念	15
2.4 算例	17
2.5 小结	20
参考文献	20
第 3 章 失效模式排列次序对结构系统可靠性计算结果的影响及最优序	21
3.1 引言	21
3.2 理论和方法	23
3.2.1 图、权重图和树	23
3.2.2 O'Ditlevsen 最小上界	24

3.2.3	O'Ditlevsen 最大下界	24
3.2.4	三阶高精度方法的最大解	26
3.3	算例	27
3.4	小结	31
	参考文献	31
第4章	线性正态安全余量时的 M 空间数值积分法	32
4.1	M 空间数值积分方法的计算公式	32
4.1.1	二阶共失效概率的计算	32
4.1.2	三阶共失效概率的计算	34
4.1.3	体系失效概率的计算	36
4.2	高斯数值积分方法的计算公式	37
4.2.1	二阶共失效概率的计算	37
4.2.2	三阶共失效概率的计算	40
4.2.3	体系失效概率的计算	42
4.3	结合 M 空间数值积分的三阶高精度方法	43
4.4	算例及分析	45
	参考文献	48
第5章	非线性安全余量时基于和事件概率公式的重要抽样方法	49
5.1	重要抽样 (Importance Sampling) 方法	49
5.1.1	方法概述	49
5.1.2	Importance Sampling 函数	50
5.2	基于和事件概率公式的重要抽样法	53
5.2.1	和事件概率公式	53
5.2.2	体系失效概率的计算	54
5.2.3	一种改进的选取综合设计点的公式	57
5.3	算例及分析	57
	参考文献	64
第6章	非线性安全余量函数时结构失效概率计算的一种当量线性化方法	65
6.1	引言	65

6.2	非线性安全余量的线性化	66
6.3	算例	67
6.4	小结	69
	参考文献	69
第7章	结构可靠性分析模型与主要失效模式的枚举	70
7.1	结构的可靠性分析模型	70
7.1.1	可靠性分析单元与单元破坏准则	71
7.1.2	结构的失效模式及可靠性分析模型	74
7.2	结构主要失效模式的枚举	74
7.2.1	优化准则法	75
7.2.2	优化准则法的改进	76
7.3	算例及分析	82
	参考文献	89
第8章	一种计及刚度失效的结构可靠性分析方法	91
8.1	引言	91
8.2	在刚度限制下的结构系统载荷承载能力	91
8.2.1	广义元件的概念和增量载荷方法	92
8.2.2	强度失效和刚度失效	95
8.3	结构系统可靠性分析	95
8.4	算例	96
8.5	小结	100
	参考文献	101
第9章	重要度概念及其一些应用	102
9.1	引言	102
9.1.1	Birnbaum 结构重要度 ΔP_{si}	102
9.1.2	结构重要度 I_i^v	103
9.1.3	Fussell - Vesely 最小割集重要度 I_i^{*FV}	104
9.2	两种新的重要度及计算	105
9.2.1	概率随机变量重要度及计算	105
9.2.2	元件在失效模式中的序贯重要度	108

9.3 应用例子	109
参考文献.....	113
第 10 章 实例型数值算例	114
10.1 算例 1	114
10.2 算例 2	117
10.3 算例 3	119
10.4 算例 4	124
10.5 算例 5	127
参考文献.....	130
附表	131

第 1 章 串联系统高阶可靠性界限方法

本章从数学角度推导了串联系统的高阶可靠性界限方法,此方法基于所有的单阶失效模式失效概率、二阶共失效概率、三阶和更高阶共失效概率,能够提高可靠度计算精度。给出了正态分布情况下三阶可靠度界限方法计算结构系统可靠度的案例。结果表明此方法具有较高的精度和应用价值。

1.1 引言

对串联系统,通常有一些失效模式,其中任何一个发生都有可能导致全系统的失效。要精确地计算出大系统的失效概率是非常困难甚至是不可能的,除非在某些特殊情况下^[1-3],因此,就实际情况而言,系统失效概率值的估计不仅必要,而且相当重要。

起初,系统失效概率的估计是基于所有单阶失效模式的失效概率,因此被称为简单界限或单阶界限。单阶界限的计算简单容易,但上、下界间的间隔通常很大,因此,其应用也受到限制。1979 年, Ditlevsen 提出了系统可靠性窄边界法^[4],它基于所有单阶模式失效概率和所有二阶共失效概率,也就是二阶界限法。在二阶界限法中,因为考虑了二阶共失效概率,特别当 $\rho < 0.5$ 时低限和高限间的间隔比一阶界限法窄得多。这种相对高精度的优点使二阶界限法在结构系统可靠性分析中广泛应用。

随着计算技术的发展,对结构系统可靠性估计要求越来越高的精度。当 $\rho \geq 0.5$ 时,二阶界限法的间隔太宽,不能满足较高精度的需要。冯元生教授提出了一种计算系统可靠性的改进方法^[5],它把所有单阶失效模式以及所有二阶、三阶和更高阶共失效模式都考虑在内,系统失

效概率的估计得到改进。在本章中,对串联系统高阶可靠性界限法进行了数学推导,并用一些算例来估计了结构系统的可靠性。

1.2 串联系统高阶可靠性界限方法的推导

1.2.1 三阶界限

由 m 个失效模式构成的串联系统,系统失效可以表示成为下式:

$$E = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_m \quad (1.1)$$

式中, E 表示系统失效事件, E_i 表示第 i 个失效模式发生这个随机事件, $i=1,2,\cdots,m$ 。

系统失效事件 E 能分解为如下互斥事件的并:

$$E = E_1 \cup E_2 \bar{E}_1 \cup E_3 \bar{E}_1 \bar{E}_2 \cup \cdots \cup E_m \bar{E}_1 \bar{E}_2 \cdots \bar{E}_{m-1} \quad (1.2)$$

根据摩根法则,

$$\bar{E}_1 \bar{E}_2 \cdots \bar{E}_{i-2} = \overline{E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_{i-2}} \quad (1.3)$$

由于

$$\overline{E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_{i-2}} \cup (E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_{i-2}) = S \quad (1.4)$$

这里 S 表示全集。

因此,对于 $i=3,4,\cdots,m$,有

$$E_i \bar{E}_1 \bar{E}_2 \cdots \bar{E}_{i-1} = E_i \bar{E}_{i-1} (\overline{E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_{i-2}}) \quad (1.5)$$

并且,根据式(1.4),有

$$E_i \bar{E}_{i-1} (\overline{E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_{i-2}}) \cup E_i \bar{E}_{i-1} (E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_{i-2}) = E_i \bar{E}_{i-1} \quad (1.6)$$

因此,

$$P(E_i \bar{E}_1 \bar{E}_2 \cdots \bar{E}_{i-1}) = P(E_i \bar{E}_{i-1}) - P(E_i \bar{E}_{i-1} E_1 \cup E_i \bar{E}_{i-1} E_2 \cup \cdots \cup E_i \bar{E}_{i-1} E_{i-2}) \quad (1.7)$$

因为

$$P(E_i \bar{E}_{i-1} E_1 \cup E_i \bar{E}_{i-1} E_2 \cup \cdots \cup E_i \bar{E}_{i-1} E_{i-2})$$

$$\leq P(E_i \bar{E}_{i-1} E_1) + P(E_i \bar{E}_{i-1} E_2) + \cdots + P(E_i \bar{E}_{i-1} E_{i-2}) \quad (1.8)$$

$$P(E_i \bar{E}_{i-1} E_j) = P(E_i E_j) - P(E_i E_{i-1} E_j), j = 1, 2, \cdots, i-2 \quad (1.9)$$

$$P(E_i \bar{E}_{i-1}) = P(E_i) - P(E_i E_{i-1}) \quad (1.10)$$

将式(1.8) ~ 式(1.10)代入式(1.7)得出

$$P(E_i \bar{E}_1 \bar{E}_2 \cdots \bar{E}_{i-1}) \geq P(E_i) - \sum_{j=1}^{i-1} P(E_i E_j) + \sum_{j=1}^{i-2} P(E_i E_{i-1} E_j) \quad (1.11)$$

同样,

$$\begin{aligned} & P(E_i \bar{E}_1 \bar{E}_2 \cdots \bar{E}_{i-1}) \\ & \geq P(E_i) - \sum_{j=1}^{i-1} P(E_i E_j) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^{i-1} P(E_i E_r E_j), r = 1, 2, \cdots, i-2 \end{aligned} \quad (1.12)$$

考虑概率的非负特性,取最大值作为下限,有

$$\begin{aligned} P(E_i \bar{E}_1 \bar{E}_2 \cdots \bar{E}_{i-1}) & \geq \max \left\{ P(E_i) - \sum_{j=1}^{i-1} P(E_i E_j) \right. \\ & \quad \left. + \max_{r \in (1, 2, \cdots, i-1)} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^{i-1} P(E_i E_r E_j); 0 \right\} \end{aligned} \quad (1.13)$$

因此,结合公式(1.2),可以获得系统失效概率下限为

$$\begin{aligned} P(E) & = P(E_1) + P(E_2 \bar{E}_1) + P(E_3 \bar{E}_1 \bar{E}_2) + \cdots \\ & \quad + P(E_m \bar{E}_1 \bar{E}_2 \cdots \bar{E}_{m-1}) \\ & \geq P(E_1) + P(E_2) - P(E_2 E_1) \\ & \quad + \sum_{i=3}^m \max \left\{ P(E_i) - \sum_{j=1}^{i-1} P(E_i E_j) + \max_{r \in (1, 2, \cdots, i-1)} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^{i-1} P(E_i E_r E_j); 0 \right\} \end{aligned} \quad (1.14)$$

另一方面,对于 $i = 3, 4, \cdots, m$, 有

$$E_i \bar{E}_1 \bar{E}_2 \cdots \bar{E}_{i-1} \subseteq E_i \bar{E}_j \bar{E}_r, r = 2, 3, \cdots, i-1, j < r \quad (1.15)$$

$$\bar{E}_j \bar{E}_r \cup (E_j \cup E_r) = S \quad (1.16)$$

因此,

$$E_i \bar{E}_j \bar{E}_r \cup E_i (E_j \cup E_r) = E_i \quad (1.17)$$

所以

$$\begin{aligned} P(E_i \bar{E}_1 \bar{E}_2 \cdots \bar{E}_{i-1}) &\leq P(E_i \bar{E}_j \bar{E}_r) \\ &= P(E_i) - P(E_i E_r) - P(E_i E_j) + P(E_i E_r E_j), \\ r &= 2, 3, \cdots, i-1, j < r \end{aligned} \quad (1.18)$$

取最小值作为上限,有

$$\begin{aligned} &P(E_i \bar{E}_1 \bar{E}_2 \cdots \bar{E}_{i-1}) \\ &\leq P(E_i) - \max_{\substack{r \in (2, 3, \cdots, i-1) \\ j < r}} \{P(E_i E_r) + P(E_i E_j) - P(E_i E_r E_j)\} \end{aligned} \quad (1.19)$$

因此,结合式(1.2),结构系统的失效概率上限为

$$\begin{aligned} P(E) &\leq P(E_1) + P(E_2) - P(E_2 E_1) \\ &\quad + \sum_{i=3}^m [P(E_i) - \max_{\substack{r \in (2, 3, \cdots, i-1) \\ j < r}} \{P(E_i E_r) + P(E_i E_j) - P(E_i E_r E_j)\}] \end{aligned} \quad (1.20)$$

通过使用缩写形式 $P_f = P(E)$, $P_{ij} = P(E_i E_j)$, $P_{irj} = P(E_i E_r E_j)$, 一个串联系统的三阶失效概率界限可表示如下:

$$\left\{ \begin{aligned} P_f &\geq P(E_1 \cup E_2) + \\ &\quad \sum_{i=3}^m \max \left\{ P_i - \sum_{j=1}^{i-1} P_{ij} + \max_{r \in (1, 2, \cdots, i-1)} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^{i-1} P_{irj}, 0 \right\} \\ P_f &\leq P(E_1 \cup E_2) \\ &\quad + \sum_{i=3}^m [P_i - \max_{\substack{r \in (2, 3, \cdots, i-1) \\ j < r}} \{P_{ir} + P_{ij} - P_{irj}\}] \end{aligned} \right. \quad (1.21)$$

结构系统对应的三阶可靠度为

$$R_s = 1 - P_f \quad (1.22)$$

从式(1.21)可以看出,当 $m \leq 3$ 时,上下界限是相同的。例如,当 $m=3$ 时,令 $P_f = P(E)$, $P_{ij} = P(E_i E_j)$, $P_{irj} = P(E_i E_r E_j)$, 串联系统失效

概率的三阶界限为 $P_f = P_1 + P_2 + P_3 - P_{21} - P_{31} - P_{32} + P_{321}$ 。显然,这是个精确解。实际上,只有三个失效模式的系统的精确的失效概率需要计算所有一阶单失效模式失效概率、所有二阶共失效概率和所有的三阶共失效概率。这同时验证了式(1.21)的正确性。需要指出的是失效模式的排序可能影响上下限。

1.2.2 k 阶界限($3 < k < m$)

对于 $i = k, k+1, \dots, m$, 令

$$I_{k-2} = \{ \text{从 } 1, 2, \dots, i-1 \text{ 中任选的 } k-2 \text{ 个数} \} \quad (1.23)$$

$$I_{i-k+1} = \{ 1, 2, \dots, i-1 \text{ 中不属于 } I_{k-2} \text{ 的 } i-k+1 \text{ 个数} \} \quad (1.24)$$

那么,

$$E_i \bar{E}_1 \bar{E}_2 \cdots \bar{E}_{i-1} = E_i \left(\bigcap_{s=1}^{k-2} \bar{E}_{r_s} \right) \left(\bigcup_{s=1}^{i-k+1} E_{j_s} \right), \quad r_s \in I_{k-2}, j_s \in I_{i-k+1} \quad (1.25)$$

同三阶界限推导方法类似,可以得出

$$\begin{aligned} P(E_i \bar{E}_1 \bar{E}_2 \cdots \bar{E}_{i-1}) &\geq \max \{ P(E_i \bigcap_{s=1}^{k-2} \bar{E}_{r_s}) \\ &\quad - \max_{I_{k-2}} \sum_{s=1}^{i-k+1} P[E_i (\bigcap_{s=1}^{k-2} \bar{E}_{r_s}) E_{j_s}] ; 0 \} \end{aligned} \quad (1.26)$$

上式中 $\max_{I_{k-2}} \sum$ 表示选择 I_{k-2} 使得 $\sum$ 最大。

另一方面,

$$\bar{E}_1 \bar{E}_2 \cdots \bar{E}_{i-1} \subseteq \bigcap_{t=1}^{k-1} \bar{E}_{r_t} \quad (1.27)$$

上式中, $r_t \in I_{k-1} = \{ \text{从 } 1, 2, \dots, i-1 \text{ 中任选的 } k-1 \text{ 个数} \}$ 。

同理,

$$P(E_i \bar{E}_1 \bar{E}_2 \cdots \bar{E}_{i-1}) \leq \min_{I_{k-1}} P(E_i \bigcap_{t=1}^{k-1} \bar{E}_{r_t}) \quad (1.28)$$

上式中, $\min_{I_{k-1}} P$ 表示选择 I_{k-1} 使得 P 最小。

将式(1.26)和式(1.28)代入式(1.2)中,得出

$$P(E) \geq P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_{k-1}) + \sum_{i=k}^m \max \{ P(E_i \bigcap_{s=1}^{k-2} E_{r_s}) - \max_{l_{k-2}} \sum_{s=1}^{i-k+1} P[E_i (\bigcap_{s=1}^{k-2} \bar{E}_{r_s}) E_{j_s}] ; 0 \} \quad (1.29)$$

$$P(E) \leq P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_{k-1}) + \sum_{i=k}^m \min_{l_{k-1}} P(E_i \bigcap_{i=t}^{k-1} \bar{E}_{r_t}) \quad (1.30)$$

可以获得如下递归公式：

$$P(E_i \bar{E}_{r_1} \bar{E}_{r_2} \cdots \bar{E}_{r_{k-1}}) = P(E_i \bar{E}_{r_1} \bar{E}_{r_2} \cdots \bar{E}_{r_{k-2}}) - P(E_i \bar{E}_{r_1} \bar{E}_{r_2} \cdots \bar{E}_{r_{k-2}} E_{r_{k-1}}) \quad (1.31)$$

$$P(E_i \bar{E}_{r_1} \bar{E}_{r_2} \cdots \bar{E}_{r_{k-2}} E_{r_{k-1}}) = P(E_i \bar{E}_{r_1} \bar{E}_{r_2} \cdots \bar{E}_{r_{k-3}} E_{r_{k-1}}) - P(E_i \bar{E}_{r_1} \bar{E}_{r_2} \cdots \bar{E}_{r_{k-3}} E_{r_{k-2}} E_{r_{k-1}}) \quad (1.32)$$

式(1.29) ~ 式(1.32)即为 k 阶失效概率界限 ($3 < k < m$)。

1.3 二阶和三阶共失效概率

如果第 i 个失效模式的安全余量方程用 M_i 表示,那么,

$$M_i \begin{cases} < 0 & \text{失效模式发生} \\ \geq 0 & \text{失效模式不发生} \end{cases} \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

典型的失效概率 P_1, P_{12}, P_{123} 可以表示为

$$P_1 = P(M_1 < 0) \int_{-\infty}^0 f_1(m_1) dm_1 \quad (1.33)$$

$$P_{12} = P(M_1 < 0 \cap M_2 < 0) \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 f_{12}(m_1, m_2) dm_1 dm_2 \quad (1.34)$$

$$P_{123} = P(M_1 < 0 \cap M_2 < 0 \cap M_3 < 0) \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 f_{123}(m_1, m_2, m_3) dm_1 dm_2 dm_3 \quad (1.35)$$

上式中, f_1, f_{12}, f_{123} 分别表示 $M_1, (M_1, M_2), (M_1, M_2, M_3)$ 的概率密度函数。