

1981-1985

全国硕士学位研究生入学考试  
数学试题精选详解

(下)

数  
级  
微分方程  
线性代数

吉林科学技术出版社

1 9 8 1—1 9 8 5

全国硕士学位研究生入学考试  
数学试题精选详解

(下)

吉林大学高等数学教研室 编

吉林科学技术出版社

**1981—1985**  
**全国硕士学位研究生入学考试**  
**数学试题精选详解**  
**(下)**

吉林大学高等数学教研室 编

\*

吉林科学技术出版社出版 吉林省新华书店发行  
长春市第九印刷厂印刷

\*

787×1092毫米16开本 16.75印张 411,000字

1986年8月第1版 1986年8月第1次印刷

印数: 1—3,540册

统一书号: 13376.49

定价: 3·50元

# 目 录

|                       |         |
|-----------------------|---------|
| 第八部分 级 数 .....        | ( 1 )   |
| 1 数值级数.....           | ( 1 )   |
| 2 幂 级 数.....          | ( 22 )  |
| 3 傅立叶(Fourier)级数..... | ( 70 )  |
| 第九部分 常微分方程 .....      | ( 95 )  |
| 1 一阶方程和可降阶的二阶方程.....  | ( 95 )  |
| 2 二阶线性方程.....         | ( 110 ) |
| 3 高阶方程式和方程组.....      | ( 135 ) |
| 4 常微分方程的应用.....       | ( 149 ) |
| 第十部分 线性代数 .....       | ( 172 ) |
| 1 行列式和向量的相关性.....     | ( 172 ) |
| 2 线性方程组.....          | ( 187 ) |
| 3 矩 阵.....            | ( 193 ) |
| 4 矩阵的相似对角形和二次型.....   | ( 218 ) |
| 5 线性空间和其它杂题.....      | ( 245 ) |

## 第八部分 级数

### 1 数值级数

#### 1 证明级数

$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \cdots$  收敛并求其和。

(北京邮电学院 1979年)

解 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$  的前  $n$  项的部分和

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+1}\right) \end{aligned}$$

于是  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+1}\right) = \frac{1}{3}$

由级数收敛的定义即知级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$  收敛, 其和为  $\frac{1}{3}$ 。

#### 2 已知某级数的部分和为

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \frac{5}{2^5} + \frac{8}{2^6} + \frac{13}{2^7} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{a_n}{2^n}$$

(1) 求证此级数收敛; (2) 求此级数的和。

(武汉测绘学院 1980年)

解 (1) 此级数的分子所构成的数列为

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \cdots, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \cdots$$

是优选法中常用的一个数列, 通常称菲波那契数列, 它的通项为

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

考虑 
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}}{\left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n}$$

$$= \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^n}{1 - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^n}$$

因为  $\left| \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right| < 1$ , 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^n = 0$ .

于是  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

设  $u_n = \frac{a_n}{2^n}$ , 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{2a_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} < 1$$

故所给级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛.

(2) 由下列递推公式:

$$u_n = \frac{a_n}{2^n} = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2^n} = \frac{1}{2} \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{1}{4} \frac{a_{n-2}}{2^{n-2}} = \frac{1}{2} u_{n-1} + \frac{1}{4} u_{n-2}$$

$$\text{得 } u_3 = \frac{1}{2} u_2 + \frac{1}{4} u_1, \quad u_4 = \frac{1}{2} u_3 + \frac{1}{4} u_2, \quad \dots, \quad u_n = \frac{1}{2} u_{n-1} + \frac{1}{4} u_{n-2}$$

将上述各等式两端分别相加, 得

$$S_n - u_1 - u_2 = \frac{1}{2}(S_{n-1} - u_1) + \frac{1}{4} S_{n-2} \quad (1)$$

$$\text{其中 } S_n = \sum_{k=1}^n u_k.$$

前已证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  存在. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ , 则当  $n \rightarrow +\infty$  时, 由 (1) 式, 有

$$S - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} S - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} S$$

所以,  $S = 2$ .

3 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$  收敛吗? 若收敛, 试求其和.

(华中工学院 1982年)

解 利用正项级数的比值判别法易知题给级数收敛. 现按定义来证明所给级数收敛, 并求和, 设

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n-1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n}$$

$$\text{则 } 2S_n = \frac{2}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \dots + \frac{n-1}{2^{n-2}} + \frac{n}{2^{n-1}}.$$

后式减前式, 得

$$S_n = 1 + \left( \frac{2}{2} - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{3}{2^2} - \frac{2}{2^2} \right) + \dots + \left( \frac{n}{2^{n-1}} - \frac{n-1}{2^{n-1}} \right) - \frac{n}{2^n}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n}$$

从而  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2$ . 故级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$  收敛, 且其和为 2.

4 证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+5}{3^n}$  收敛, 并求其和. (山东矿业学院 1982年)

证 用正项级数的达朗贝尔判别法易知所给级数是收敛的. 下面用收敛定义证明并求和.

$$\text{设 } S_n = \sum_{k=1}^n \frac{3k+5}{3^k} = \frac{3 \cdot 1 + 5}{3} + \frac{3 \cdot 2 + 5}{3^2} + \frac{3 \cdot 3 + 5}{3^3} + \dots + \frac{3(n-1) + 5}{3^{n-1}} + \frac{3n+5}{3^n}$$

$$\frac{1}{3} S_n = \frac{3 \cdot 1 + 5}{3^2} + \frac{3 \cdot 2 + 5}{3^3} + \dots + \frac{3(n-1) + 5}{3^{n-1}} + \frac{3n+5}{3^{n+1}}$$

两式相减, 得

$$\frac{2}{3} S_n = \frac{3 \cdot 1 + 5}{3} + 3 \left( \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}} \right) - \frac{3n+5}{3^{n+1}}$$

$$\text{即 } S_n = 4 + \frac{3}{2} \cdot 3 \cdot \frac{\frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^n}}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{3n+5}{3^{n+1}} = 4 + \frac{3}{4} \left( 1 - \frac{1}{3^{n-2}} \right) - \frac{3}{2} \cdot \frac{3n+5}{3^{n+1}}$$

$$\text{于是 } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 4 + \frac{3}{4} = \frac{19}{4}$$

故所给级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+5}{3^n}$  收敛且其和为  $\frac{19}{4}$ .

5 证明级数

$$\arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \dots + \arctg \frac{1}{2 \cdot n^2} + \dots \text{收敛并求其和.}$$

(清华大学 1983年)

证 考察级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{1}{2 \cdot n^2}$  的前  $n$  项的部分和

$$S_n = \arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \dots + \arctg \frac{1}{2 \cdot n^2} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

由反正切公式

$$\arctg \alpha + \arctg \beta = \arctg \frac{\alpha + \beta}{1 - \alpha \cdot \beta}$$

$$\text{得 } S_2 = \arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{2 \cdot 2^2} = \arctg \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 2^2}} = \arctg \frac{2}{3} = \arctg \frac{2}{1+2}$$

$$S_3 = S_2 + \arctg \frac{1}{2 \cdot 3^2} = \arctg \frac{2}{3} + \arctg \frac{1}{2 \cdot 3^2} = \arctg \frac{3}{4} = \arctg \frac{3}{1+3}$$

现用数学归纳法证明

$$S_n = \arctg \frac{n}{1+n}$$

$$\text{设 } S_{k-1} = \operatorname{arctg} \frac{k-1}{1+(k-1)}$$

其中  $k$  为自然数且  $k \geq 2$ . 于是

$$\begin{aligned} S_k &= S_{k-1} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2 \cdot k^2} = \operatorname{arctg} \frac{k-1}{k} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2 \cdot k^2} = \operatorname{arctg} \frac{k(2k^2 - 2k + 1)}{2k^3 - k + 1} \\ &= \operatorname{arctg} \frac{k}{1+k} \end{aligned}$$

所以, 对一切自然数  $n$ , 有

$$S_n = \operatorname{arctg} \frac{n}{1+n}$$

$$\text{从而 } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \frac{n}{1+n} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

按定义级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{2 \cdot n^2}$  收敛, 且其和为  $\frac{\pi}{4}$ .

6 已知  $a_n = \int_0^1 x^2(1-x)^n dx$ , 证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 并求这个级数的和.

(华南工学院 1984年)

解 经积分

$$a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{n+3} = \frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$\text{由 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3}{(n+1)(n+2)(n+3)} = 2$$

按极限形式的比较判别法知  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{n=1}^n a_n = \sum_{n=1}^n \left[ \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) - \left( \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) \right] \\ &= \sum_{n=1}^n \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) - \sum_{n=1}^n \left( \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{n+3} \end{aligned}$$

$$\text{故 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{6}.$$

7 试用级数的积分判别法判别调和级数

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

的发散性, 并证明下述极限存在

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right) - \ln n \right]$$

(合肥工业大学 1981年)

解 调和级数  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$  的通项  $a_n = \frac{1}{n}$ , 取  $f(x) = \frac{1}{x}$ . 则有

$$a_1 > \int_1^2 \frac{1}{x} dx, a_2 > \int_2^3 \frac{1}{x} dx, \cdots, a_n > \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } S_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \left( \int_1^2 + \int_2^3 + \cdots + \int_n^{n+1} \right) \frac{1}{x} dx \\ &= \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \ln(n+1) \end{aligned}$$

由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = +\infty$ , 从而级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  的部分和  $S_n$  无界(单调的), 故调和级数发散.

现证上面提到的极限存在.

$$\text{当 } x > 0 \text{ 时, } e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots > 1 + x.$$

当  $0 < x < 1$  时,  $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots < 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}$ . 故当  $0 < x < 1$  时, 有

$$1 + x < e^x < \frac{1}{1-x}$$

$$\text{因而 } \ln(1+x) < x < -\ln(1-x) \quad (0 < x < 1) \quad \textcircled{1}$$

取  $x = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}$ , 得

$$\ln \frac{3}{2} < \frac{1}{2} < -\ln \frac{1}{2}, \ln \frac{4}{3} < \frac{1}{3} < -\ln \frac{2}{3},$$

$$\ln \frac{5}{4} < \frac{1}{4} < -\ln \frac{3}{4}, \cdots, \ln \frac{n+1}{n} < \frac{1}{n} < -\ln \frac{n-1}{n}$$

相加并化简, 得

$$\ln \frac{n+1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < \ln n$$

$$\text{从而 } 1 + \ln \frac{n+1}{2n} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n < 1 \quad \textcircled{2}$$

$$\text{设 } S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \quad (n=1, 2, \cdots)$$

由不等式②知, 数列  $\{S_n\}$  是有界的. 又由不等式①及

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

知  $S_{n+1} - S_n < 0$ , 即数列  $\{S_n\}$  是单调下降的. 据单调有界原理,  $\{S_n\}$  有极限, 设为  $S$ , 则

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right) - \ln n \right\}$$

结论得证.

8 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n^{2n \sin \frac{1}{n}} \cdot a_n \right) = 1$ , 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  是否收敛, 试证明之.

证 已知  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^{2n \sin \frac{1}{n}} \cdot a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^{-2n \sin \frac{1}{n}}} = 1$

按极限的定义, 对任给的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N_1 > 0$ , 当  $n \geq N_1$  时, 有

$$\left| \frac{a_n}{n^{-2n \sin \frac{1}{n}}} - 1 \right| < \varepsilon$$

从而有  $a_n < (1 + \varepsilon) n^{-2n \sin \frac{1}{n}}$

又因  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n \sin \frac{1}{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 2$

故对上述的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N_2 > 0$ , 当  $n \geq N_2$  时, 有

$$\left| 2n \sin \frac{1}{n} - 2 \right| < \varepsilon$$

从而有  $2n \sin \frac{1}{n} > 2 - \varepsilon \geq \frac{3}{2}$

取  $N = \max(N_1, N_2)$ , 于是当  $n \geq N$  时, 有

$$a_n < (1 + \varepsilon) n^{-2n \sin \frac{1}{n}} \leq (1 + \varepsilon) n^{-\frac{3}{2}} = \frac{1 + \varepsilon}{n^{\frac{3}{2}}}$$

因为  $p = \frac{3}{2} > 1$ , 故级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$  收敛, 按正项级数比较判别法, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛。

9  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  是正项级数, 并且  $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \geq 1 + \sigma, (\sigma > 0), n = 1, 2, 3, \dots$ , 讨论级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  的收敛性. (复旦大学 1981年)

解 因为  $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \geq 1 + \sigma$ , 即  $\ln \frac{1}{a_n} \geq (1 + \sigma) \ln n = \ln n^{1+\sigma}$ . 由对数函数的单调性, 有

$\frac{1}{a_n} \geq n^{1+\sigma}$ , 即  $a_n \leq \frac{1}{n^{1+\sigma}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$ . 由  $p$ -级数在  $p = 1 + \sigma > 1$  时收敛知,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\sigma}}$  收敛. 按正项级数比较判别法知,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.

10 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} [n^p (e^{\frac{1}{n}} - 1) a_n] = 1 (p > 1)$ , 讨论正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  的收敛性.

(湖南大学 1981年)

解 因  $\lim_{n \rightarrow \infty} [n^p (e^{\frac{1}{n}} - 1) a_n] = 1$ , 由极限定义知, 对任意给定的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N_1 > 0$ , 当  $n \geq N_1$  时有

$$1 - \varepsilon < n^p (e^{\frac{1}{n}} - 1) a_n < 1 + \varepsilon \quad (1)$$

又因  $\lim_{n \rightarrow \infty} n (e^{\frac{1}{n}} - 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} x (e^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$ . 故对  $\varepsilon > 0$ , 存在

$N_2 > 0$ , 当  $n \geq N_2$  时, 有

$$1 - \varepsilon < n(e^{\frac{1}{n}} - 1) < 1 + \varepsilon \quad (2)$$

记  $N = \max(N_1, N_2)$ , 则当  $n \geq N$  时, 由不等式①、②

$$\text{得 } \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} < \frac{1 - \varepsilon}{n(e^{\frac{1}{n}} - 1)} < n^{p-1} a_n < \frac{1 + \varepsilon}{n(e^{\frac{1}{n}} - 1)} < \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}$$

$$\text{即 } \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \cdot \frac{1}{n^{p-1}} < a_n < \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \cdot \frac{1}{n^{p-1}}$$

当  $p - 1 \leq 1$ , 即  $p \leq 2$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \cdot \frac{1}{n^{p-1}} = \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p-1}}$  发散. 据正项级数比较判别法知级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散. 当  $p - 1 > 1$ , 即  $p > 2$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \cdot \frac{1}{n^{p-1}} = \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p-1}}$  收敛, 由正项级数比较判别法知级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛. 综上所述, 正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , 当  $p \leq 2$  时发散; 当  $p > 2$  时, 收敛.

11 判别级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{\pi}{n})$  的敛散性. (长沙铁道学院 1981年)

$$\text{解 因为 } 1 - \cos \frac{\pi}{n} = 2 \sin^2 \frac{\pi}{2n} \leq 2 \left( \frac{\pi}{2n} \right)^2 = \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

而级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  是  $p = 2$  的  $p$  级数, 它是收敛的. 因而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{1}{n^2}$  也收敛. 据正项级数比较判别法知, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{\pi}{n})$  收敛.

12 若正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛, 利用不等式  $(x - y)^2 \geq 0$  证明: 正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n \cdot b_n}$  与正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$  也收敛. (西安交通大学 1982年)

$$\text{证 由 } (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \geq 0, \text{ 得}$$

$$x \cdot y \leq \frac{1}{2} (x^2 + y^2)$$

$$\text{则有 } \sqrt{a_n \cdot b_n} = \sqrt{a_n} \cdot \sqrt{b_n} \leq \frac{1}{2} (a_n + b_n)$$

按设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛, 于是级数  $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$  也收敛, 据正项级数比较判别法知级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n \cdot b_n}$  收敛.

令  $b_n = \frac{1}{n^2}$ , 显然  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛. 于是由  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛及已证得的结论知级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n} \sqrt{\frac{1}{n^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n} \sqrt{b_n}$$

收敛.

13 判断级数  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} \sin \frac{1}{n}$  的敛散性。

(哈尔滨工业大学 1982年)

解 考虑级数  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} \cdot \frac{1}{n}$ . 令  $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$  由广义积分

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln \ln x]_2^b = \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln \ln b - \ln \ln 2] = +\infty$$

知级数  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$  发散。又

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\ln n} \sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n \ln n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$$

据正项级数极限形式的比较判别法推出级数  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} \sin \frac{1}{n}$  发散。

14 讨论级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$  的敛散性。

(安徽工学院 1982年)

解 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$  的一般项

$$a_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx \geq 0$$

且  $0 \leq a_n \leq \int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\frac{1}{n}} = \frac{2}{3} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} = b_n$ , 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{2}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$  是收敛的, 从而级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx \text{ 收敛.}$$

15 证明: 若有  $\alpha > 0$ , 使当  $n \geq n_0$  时,  $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \geq 1 + \alpha$ , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛; 若  $n \geq n_0$  时,

$\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \leq 1$ , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散 (其中  $a_n > 0$ ) .

(哈尔滨工业大学 1983年)

证 当  $n \geq n_0$  时,  $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \geq 1 + \alpha$  成立,

于是  $\ln \frac{1}{a_n} \geq (1 + \alpha) \ln n = \ln n^{(1+\alpha)}$

由对数函数的单调性, 得

$$\frac{1}{a_n} \geq n^{1+\alpha}$$

即  $a_n \leq \frac{1}{n^{1+\alpha}}$  (当  $n \geq n_0$ )

因为  $\alpha > 0$ ,  $1 + \alpha = p > 1$ , 所以级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}}$  收敛, 由正项级数的比较判别法知, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛, 进而 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛.}$$

若  $n \geq n_0$  时,  $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \leq 1$ , 则有

$$\ln \frac{1}{a_n} \leq \ln n$$

即  $a_n \geq n^{-1}$

由调和级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散知, 级数  $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$  发散, 故级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

16 试证: 若正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n \cdot a_{n+1}}$  也收敛;

反之, 若  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n \cdot a_{n+1}}$  收敛, 问  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  是否也收敛?

又若诸项  $a_n$  是单调的, 且  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n \cdot a_{n+1}}$  收敛, 问级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  是否收敛?

(华中工学院 1983年)

证 因为  $0 \leq \sqrt{a_n \cdot a_{n+1}} \leq \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1})$ .

又由  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 故  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$  收敛, 从而  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})$  收敛, 按正项

级数比较判别法知, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n \cdot a_{n+1}}$  也收敛.

反过来, 由  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n \cdot a_{n+1}}$  收敛, 推不出级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  必收敛, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛、发散都能! 一个发散的例子:

级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{2}$ , 简单说明问题, 只是数值为 0 的项太多了.

稍复杂一点的例子: 如级数

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} + \cdots$  是发散的. 用极限形式的比较判别法可以

证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n \cdot a_{n+1}}$  是收敛的.

当  $a_n$  单调且  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$  收敛时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  必然收敛.

因为  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$  收敛, 故有  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n a_{n+1}} = 0$ , 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n a_{n+1} = 0$ . 故  $a_n$  必为单调

不增的, 于是  $a_{n+1} \leq \sqrt{a_n a_{n+1}}$  ( $n=1, 2, \dots$ ). 又由假定  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$  收敛, 按比较判别法有  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$  收敛, 故  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.

17 设  $a > 0$ , 判别级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$  的敛散性.

(上海交通大学 1983年)

解 设级数的一般项为  $b_n$ , 因为

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)(1+a^{n+1})} \cdot \frac{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}{a^{\frac{n(n+1)}{2}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{n+1}}{1+a^{n+1}} = \begin{cases} 0, & \text{当 } a < 1 \\ \frac{1}{2}, & \text{当 } a = 1 \\ 1, & \text{当 } a > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

于是由达朗贝尔判别法知, 当  $a \leq 1$  时级数  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛. 下面考察  $a > 1$  的情形.

$$b_n = \frac{a^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)} = \frac{1}{(1+a_1)(1+a_1^2)\cdots(1+a_1^n)}, \text{ 其中 } 0 < a_1 = \frac{1}{a} < 1.$$

$$\text{令 } c_n = (1+a_1)(1+a_1^2)\cdots(1+a_1^n) \quad (n=1, 2, \dots)$$

显然  $\{c_n\}$  是单调递增的. 现证它也是有界的, 由  $x > 0$  时,  $e^x > 1+x$ , 可推出

$$\begin{aligned} c_n &= (1+a_1)(1+a_1^2)\cdots(1+a_1^n) < e^{a_1} \cdot e^{a_1^2} \cdots e^{a_1^n} \\ &= e^{a_1 + a_1^2 + \cdots + a_1^n} = e^{\frac{a_1 - a_1^{n+1}}{1-a_1}} < e^{\frac{a_1}{1-a_1}} \end{aligned}$$

于是, 由单调有界原理知,  $\{c_n\}$  是收敛即  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$  存在, 且介于 1 与  $e^{\frac{a_1}{1-a_1}}$  之间, 进而  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  存在, 且大于 0, 故原级数发散.

综合以上情况, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$  当  $0 < a \leq 1$  时收敛; 当  $a > 1$  时发散.

18 证明: 如果  $a_n > 0$ ,  $a_n > a_{n+1}$ . 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛的充要条件是级数  $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$  收敛.

(天津大学 1984年)

$$\text{证 记 } S_n = \sum_{m=1}^n a_m, \quad t_i = \sum_{j=0}^i 2^j a_{2^j}$$

(1) 证 充分性. 由  $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$  收敛  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.

由设  $a_n > 0$ ,  $a_n > a_{n+1}$ , 及

对于任一正整数 $n$ , 总存在整数 $k$ , 使 $2^{k-1} < n \leq 2^k$ ,

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ &< a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + \cdots + a_n + \cdots + a_{2^k} \\ &< a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots + (a_{2^{k-1}-1} + \cdots + a_{2^k-1}) \\ &\quad + (a_{2^k} + \cdots + a_{2^{k+1}-1}) \\ &\leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^{k-1}a_{2^{k-1}} + 2^k \cdot a_{2^k} = t_k \end{aligned}$$

由于正项级数 $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ 收敛, 故其部分和序列 $\{t_k\}$ 有界, 从而数列 $\{S_n\}$ 有界, 故正项级数

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 充分性得证.

(2) 证必要性. 由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ 收敛

对于任何自然数 $k$ , 总存在自然数 $m$ , 使 $2^k < m < 2^{k+1}$ , 于是有

$$\begin{aligned} S_m &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2^k} + \cdots + a_m \\ &> a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2^k} \\ &= a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \cdots + (a_{2^{k-1}-1} + a_{2^{k-1}} + \cdots + a_{2^k}) \\ &\geq a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \cdots + 2^{k-1} \cdot a_{2^k} \\ &> \frac{1}{2}(a_1 + 2a_2 + 2^2a_4 + 2^3a_8 + \cdots + 2^k a_{2^k}) = \frac{1}{2}t_k \end{aligned}$$

由于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 故其部分和序列 $\{S_n\}$ 有界, 从而 $\{2S_n\}$ 有界, 它的子序列 $\{2S_m\}$

同样有界, 故数列 $\{t_k\}$ 有界, 因此正项级数 $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ 收敛. 必要性得证.

19 已经 $n$ 充分大时,  $a_n > 0$ ,  $b_n > 0$ , 且 $\frac{a_n}{a_{n+1}} > \frac{b_n}{b_{n+1}}$

求证: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛; 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散.

(华东工程学院 1984年)

证 因为当 $n$ 充分大时,  $a_n > 0$ ,  $b_n > 0$ , 且 $\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq \frac{b_n}{b_{n+1}}$ , 于是 $\frac{a_n}{b_n} \geq \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} > 0$ .

所以当 $n$ 充分大时, 数列 $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ 单调递减, 下方有界, 据单调有界原理, 此数列有极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k \quad (0 \leq k < +\infty)$$

按极限定义, 对任给的 $\varepsilon > 0$ , 存在 $N > 0$ , 当 $n \geq N$ 时, 有

$$- \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} - k < \varepsilon$$

即  $b_n(k - \varepsilon) < a_n < b_n(k + \varepsilon) \quad (n \geq N)$

于是, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛,  $\sum_{n=N}^{\infty} (k + \varepsilon)b_n$ 也收敛, 由正项级数比较原理知正项级数 $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ 收敛, 进

而级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛. 若级数  $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$  发散, 则级数  $\sum_{n=N}^{\infty} (k-\varepsilon) b_n$  亦发散, 由正项级数比较判别法

知级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散, 导致级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

20 代号为(A)、(B)、(C)、(D)的四个结论, 请选择一个.

判别级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$  的敛散性:

(A) 因为  $1 + \frac{1}{n} > 1$ , 所以级数收敛;

(B) 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} = 0$ , 所以级数收敛;

(C) 因为  $\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} < \frac{1}{n}$ , 所以级数收敛;

(D) A, B, C 都不是.

(上海交通大学 1984年)

解 (D).

21 设级数  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  发散,  $a_k > 0$ ,  $S_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ . 试证: 级数  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{S_k}$  也发散.

(哈尔滨工业大学 1984年)

证 改写级数  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{S_k} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_{k+1} - S_k}{S_{k+1}}$ . 对于固定的  $m$ , 由于正项级数  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  发散, 总存在  $n$ , 使  $S_{n+1} > 2S_m$ . 于是, 由  $S_k$  的单调性有

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n \frac{S_{k+1} - S_k}{S_{k+1}} &\geq \sum_{k=m}^n \frac{S_{k+1} - S_k}{S_{n+1}} = \frac{S_{n+1} - S_m}{S_{n+1}} \\ &= 1 - \frac{S_m}{S_{n+1}} > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

据级数收敛的Cauchy判别准则知, 级数  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_{k+1} - S_k}{S_{k+1}}$ , 从而级数  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{S_k}$  发散.

22 判别级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  的敛散性,  $u_n = \frac{1}{\int_0^n \sqrt{1+x^2} dx}$ . (西北电讯工程学院 1984年)

解 由于  $0 < u_n \leq \frac{1}{\int_0^n x dx} = \frac{2}{n^2}$ , 且级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛, 故由比较判别法知  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛.

23 证明: 若  $f(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  上二次可微, 且连续,  $n \in N$ ,  $a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$ ,

$b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \sin nx dx$ ,  $f(-\pi) = f(\pi)$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$  收敛, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{|a_n|} \leq \frac{1}{2} (2 + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|)$$

(东北师范大学 1984年)

证 由分部积分知,  $a_n = -\frac{1}{n^2}b_n$ , 于是

$$\sqrt{|a_n|} = \frac{1}{n}\sqrt{|b_n|} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + |b_n|\right)$$

因为  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < 2$ , 故

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{|a_n|} \leq \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|\right) \leq \frac{1}{2}\left(2 + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|\right)$$

#### 24 判别级数

$1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{19}{9} + \frac{2!}{3^2} \left(\frac{19}{9}\right)^2 + \frac{3!}{4^3} \left(\frac{19}{9}\right)^3 + \frac{4!}{5^4} \left(\frac{19}{9}\right)^4 + \dots$  的敛散性.

(上海交通大学 1984年)

解 所给级数的一般项  $a_n = \frac{(n-1)!}{n^{n-1}} \cdot \left(\frac{19}{9}\right)^{n-1}$ .

$$\begin{aligned} \text{因为 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n!}{(n+1)^n} \left(\frac{19}{9}\right)^n}{\frac{(n-1)!}{n^{n-1}} \left(\frac{19}{9}\right)^{n-1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \cdot \frac{19}{9} = \frac{19}{9e} < 1 \end{aligned}$$

据正项级数的达朗贝尔判别法知, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.

25 讨论级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1\right)$  的收敛性.

(华中工学院 1984年)

解 依据极限式  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^{\frac{1}{2}}} = 0$ , 及

$$\left(n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1\right) = e^{\frac{1}{n^2+1} \ln n} - 1 = \frac{\ln n}{n^2+1} + o\left(\frac{\ln n}{n^2+1}\right)$$

可知, 当  $n$  大到一定程度之后, 有  $0 < n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1 < 2 \frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^2} \frac{\ln n}{n^{\frac{1}{2}}} < 2 \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

因级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$  收敛, 故根据比较原理得知所论级数也收敛.

26 判别级数  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}$  的敛散性.

(华东师范大学 1984年)

解 由  $a_n = 2^n \sin \frac{\pi}{3^n} \leq 2^n \cdot \frac{\pi}{3^n} = \pi \left(\frac{2}{3}\right)^n = b_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$  是公比  $r = \frac{2}{3} < 1$  的几何

级数, 收敛. 按正项级数的比较判别法知, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}$  收敛.

#### 27 判别下列级数的收敛性