微积分学小丛书

函数的幂级数展开式及其应用

郭永康　王永江　编

大连理工大学出版社

函数的幂级数展开式及其应用

郭永康　王永江　编

大连理工大学出版社

函数的幂级数展开式及其应用

Hanshu de Mijishu Zhankaishi ji qi Yingyong

大连理工大学出版社出版发行

（大连市甘井子区凌水河） 大连理工大学印刷厂印刷

开本：787×1091 1/32 印张：$3\frac{3}{4}$ 字数：78 千字

1989年12月第1版 1989年12月第1次印刷

印数：0001—4000

责任编辑：张亚军 责任校对：杜祖诚

封面设计：姜严军

ISBN 7 5611-0247 X/O·44 定价：0.69元

内 容 提 要

本书是《微积分小丛书》中的一册。丛书着重帮助大学生深入理解高等数学的内容、丰富课外学习内容，以及它们是如何应用的。本书的内容包括幂级数的性质，函数的幂级数展开方法，求和、近似计算和其它应用。全书有87个例子和69个练习题，书末附练习的答案和提示。本书是大学生理想的课外读物，也可供教师点题参考。

前　言

本书是大连理工大学出版社组织编写的《微积分学小丛书》中的一册。丛书旨在帮助青年学生加深理解教材内容，拓宽知识，丰富课外学习内容，作为课堂教学的一个补充。因此本书不是教材的重复，而是帮助青年学生在理解教材内容的基础上加深对数学方法本质的理解，沟通微积分各章间的联系，为教材的应用提供一点线索。

本书着重讲函数的幂级数展开的各种方法和应用。对于幂级数的收敛性，假定读者已经掌握；对于幂级数的性质，都直接采用而不加证明，读者可以自行查阅有关教材。在编写过程中，许多有经验的任课教师提出了很多宝贵意见和提供素材，并指出本书的不足，在此一并致谢。

本书第一至四节由郭永康编写，第五节由王永江编写。

编　者

1989年8月

目　　录

一、函数的幂级数展开式

由于幂级数有许多特殊的优良性质，因此在微积分的学习中应给予足够的重视．

1．泰勒级数、泰勒公式和泰勒多项式

如果函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某一邻域内满足一些条件，那末它可以展开成幂级数

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots \quad (1)$$

如果函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某个邻域上有 $n+1$ 阶导数，则在此邻域内的任何点 x，至少存在一个 ξ（ξ 在 x_0 与 x 之间），使得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad (2)$$

成立．（2）称为 $f(x)$ 的 n 阶泰勒公式．若把（2）改写成

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x),$$

其中

$$P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \tag{3}$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\quad(\xi\text{在}x_0\text{与}x\text{之间}),$$

则（3）称为 $f(x)$ 的泰勒多项式，$R_n(x)$ 称为 n 阶泰勒余项。

注意 $f(x)$ 的泰勒多项式（3）与泰勒公式（2）之间有本质的区别，这两者与之称为泰勒级数的（1），三者都有本质区别．

并不是形式地求得 $f(x_0)$，$f'(x_0)$，$f''(x_0)$，…，$f^{(n)}(x_0)$，…就一定能将 $f(x)$ 表示成泰勒级数（1）．要使（1）的右端收敛于左端的函数 $f(x)$，还必须在 $x=x_0$ 的邻域内，对任意的 x 有

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0.$$

当 $x_0=0$ 时，（1）可写成

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)x^2}{2!}+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots, \tag{4}$$

称（4）为 $f(x)$ 的麦克劳林级数，它是最简单的泰勒级数．

切贝谢夫1854年在其“所谓平行四边形机构理论”一文中指出，泰勒多项式

$$T_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

当作函数表示式时，只在点 $x=x_0$ 附近比别的同次多项式好些．如果谈到在固定区间〔a, b〕内用 n 次多项式近似表示正

函数，则“要在该区间内它与 $f(x)$ 的离差的界限小于所有其它同次多项式的离差界限”时，泰勒多项式还不如别的多项式好．他还第一次提出了“最优近似多项式”的问题．切贝谢夫的研究成为彼得堡学派的许多论著的出发点．

2．泰勒公式的余项

由于计算上的需要，有时候把泰勒公式写成不同余项的形式，比如泰勒公式（2）带有拉格朗日余项：

$$R_n(x)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

其中，ξ 是 x 与 x_0 之间的一固定值．

余项还可以表示成柯西形式，称为柯西余项：

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}[x_0+\theta(x-x_0)]}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1},$$

其中 $0\leqslant\theta\leqslant1$.

最简便的形式是皮亚诺形式，称为皮亚诺余项：

$$R_n(x)=o[(x-x_0)^n],$$

即

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=0.$$

故由极限性质可知：

$$R_n(x)=a_n(x)(x-x_0)^n,$$

其中

$$\lim_{x\to x_0}a_n(x)=0.$$

$$c_n=u_0v_n+u_1v_{n-1}+\cdots+u_{n-1}v_1+u_nv_0\ .$$

故 $C(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^n$．乘积级数的收敛半径是级数 $A(x)$、$B(x)$ 的收敛半径中较小的那个．

两个幂级数的商，设 $v_0 \neq 0$, 可以写成

$$\frac{u_0+u_1x+u_2x^2+\cdots+u_nx^n+\cdots}{v_0+v_1x+v_2x^2+\cdots+v_nx^n+\cdots}=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n+\cdots$$

其中 $c_0, c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots$ 的确定，可以通过 $B(x)$ 和 $C(x)$ 的乘积 $A(x)$ 的关系，用莱布尼兹方式写出：

$$u_n=c_0v_n+c_1v_{n-1}+\cdots+c_{n-1}v_1+c_nv_0$$

$$(n=0,1,2,\cdots).$$

商级数 $C(x)$ 的收敛半径要比原来 $A(x)$、$B(x)$ 的收敛半径一般要小得多.

幂级数（5）在收敛区间 $(-R, R)$ 内是连续的.

幂级数（5）在收敛区间内可以逐项积分和逐项微分，且积分或微分后的级数收敛半径不变. 但对 $x=R$ 及 $x=-R$ 处是否收敛要重新检查.

如果函数 $f(x)$ 能展开成 x 的幂级数，则展开式是唯一的.

3．幂级数的性质

若幂级数

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \quad (5)$$

当 $x=x_0(x_0\neq 0)$ 时收敛，则当一切 x 适合不等式 $|x|<|x_0|$ 时，级数（5）绝对收敛；反之，若当 $x=x_0$ 时级数（5）发散，则当一切适合不等式 $|x|>|x_0|$ 的 x 时，级数（5）发散.

若 $$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho\neq 0,$$

则称 R 为幂级数（5）的收敛半径，当 $|x|<R=\dfrac{1}{\rho}$ 时，幂级数（5）绝对收敛；若 $\rho=0$, 则幂级数（5）在 $(-\infty, +\infty)$ 上绝对收敛.

一个幂级数（5），只要不是属于只有一个点（$x=0$）收敛或在实数轴上处处收敛，则一定存在一个正数 $R>0$，使得 $|x|<R$ 时，级数（5）绝对收敛，而当 $|x|>R$ 时，级数（5）发散，至于 $x=R$ 或 $x=-R$ 要代入级数（5）重新考虑是否收敛．R 称为收敛半径．

两个不同的幂级数可以逐项相加（或相减），其和（或差）级数的收敛半径是两个级数中收敛半径的较小的那个．

两个幂级数

$$A(x)=u_0+u_1x+u_2x^2+\cdots+u_nx^n+\cdots$$

$$B(x)=v_0+v_1x+v_2x^2+\cdots+v_nx^2+\cdots$$

的相乘，相乘后的级数 $C(x)$ 的系数 c_n 可按莱布尼兹方式进行．

4．高阶无穷小 $o(x)$

由于函数的幂级数展开式有无穷多项，在书写时带来许多不便，而有用的往往是幂级数的头几项，为简化运算，可采用高阶无穷小的记法．

若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{o(x)}{x}=0$，则称 $o(x)$ 是比 $x\to0$ 更为高阶的无穷小量．若写 $o(x^2)$，则表示它是比 $x^2\to0$ 更为高阶的无穷小量．例如在需要时，当 $|x|$ 很小时，可记

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots=x+o(x),$$

或
$$\sin x=1-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)，等等；$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots=1-\frac{x^2}{2!}+o(x^2),$$

或　$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)$，等等．

有关$o(x)$有下列简单的运算法则：

$ko(x)=o(x)$（k为非零常数），

$o(x)\pm o(x)=o(x)$，

$o(x)\pm o(x^2)=o(x)$，

$xo(x)=o(x^2)$，

$\frac{o(x^2)}{x}=o(x)$，

$\sqrt{x}\,o(x)=o(x^{3/2})$，

$\frac{o(x^2)}{\sqrt{x}}=o(x^{3/2})$，

$o(x)o(x^2)=o(x^3)$，

$\frac{o(x)}{x}=o(1)$，（$o(1)$表示$x\to 0$时为无穷小量）．

5．五个基本初等函数的幂级数展开式

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\quad(-\infty<x<+\infty),$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots$$
$$(-\infty<x<+\infty),$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\cdots$$
$$(-\infty<x<+\infty),$$

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots$$

$$+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots\ (-1<x<1),$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$$

$$(-1<x\leqslant 1).$$

6．幂级数的收敛性

在前言中我们已假定读者对级数的收敛性已基本掌握，故本文不作详细介绍．但是学了幂级数以后，无疑又多了一个判别级数收敛的方法，下面通过例 2 说明这一点．

例 1 研究下列级数的收敛性（$x>0$）：

$$a+(a+d)x+(a+2d)x^2+\cdots+[a+(n-1)d]x^{n-1}+\cdots.$$

解
$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a+(n+1)d}{a+nd}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a}{n}+\frac{n+1}{n}d}{\frac{a}{n}+d}=1$$

故收敛半径为 $R=\frac{1}{\rho}=1$．原级数在 $0<x<1$ 时收敛；当 $x=1$，原级数化为：

$$a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+[a+(n-1)d]+\cdots$$

用拉北判别法

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a+nd}{a+(n+1)d}-1\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-nd}{a+(n+1)d}=\lim_{n\to\infty}\frac{-d}{\frac{a}{n}+\frac{n+1}{n}d}=-1<1$$

故 $x=1$ 时级数发散，因此收敛域为 $0<x<1$．

例 2 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[n^{\frac{1}{n^2+1}}-1\right]$ 的收敛性.

解 记 $a_n=n^{\frac{1}{n^2+1}}-1$

$$a_n=e^{\frac{\ln n}{n^2+1}}-1$$

$$=1+\frac{\ln n}{n^2+1}+\frac{1}{2}\left(\frac{\ln n}{n^2+1}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{\ln n}{n^2+1}\right)^3+\cdots-1$$

$$=\frac{\ln n}{n^2+1}+\frac{1}{2}\left(\frac{\ln n}{n^2+1}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{\ln n}{n^2+1}\right)^3+\cdots$$

$$<\frac{\ln n}{n^2+1}+\frac{1}{2}\left(\frac{\ln n}{n^2+1}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\ln n}{n^2+1}\right)^3+\cdots$$

$$=\frac{\ln n}{n^2+1}+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{\ln n}{n^2+1}\right)^2}{1-\frac{\ln n}{n^2+1}}$$

$$=\frac{\ln n}{n^2+1}+\frac{\ln^2 n}{2(n^2+1)\left[n^2+1-\ln n\right]}$$

不等式右端的两项都是收敛级数的公项，故左端 a_n 构成的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left[n^{\frac{1}{n^2+1}}-1\right]$ 收敛.

这个例子当然可以用级数的比较判别法(将 $e^{\frac{\ln n}{n^2+1}}-1$ 与 $\frac{\ln n}{n^2+1}$ 相比，令 $n\to\infty$ 时求极限)来解决，但用幂级数展开的方法也显示了威力.

练　习　一

（1）若 $f(x)$ 在〔a、b〕上有 n 阶导数存在，且 $f(a)=f(b)=f'(b)=f''(b)=\cdots=f^{(n-1)}(b)=0$，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f^{(n)}(\xi)=0$，其中 $a\leqslant\xi\leqslant b$．

（2）试问下列函数当 $x\to0$ 时是 x 的几阶无穷小量：

a．$\sin x+x$　　　　b．$\sin x-x$

c．$e^x\sin x-x(1+x)$．

（3）将函数 $f(x)=x^3+3x^2-2x+4$ 按 $x+1$ 的乘幂展开成一阶、二阶、三阶的带有拉格朗日余项的泰勒公式．

（4）求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2x^n}{n^3+1}$ 的收敛域．

（5）求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^p}$（$p\geqslant0$ 为常数）的收敛区间．

（6）求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n}\left(\dfrac{3+x}{3-2x}\right)^n$ 的收敛区间．

（7）求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n}\left(\dfrac{3-x}{3-2x}\right)^{2n}$ 的收敛区间．

（8）求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x^2+x+1)^n}{n(n+1)}$ 的收敛区间．

二、函数的幂级数展开方法

将函数 $f(x)$ 在其收敛域内展开成幂级数的方法很多，下面介绍几种常用的展开法．

直接展开法，一般是指用定义求出函数 $f(x)$ 的各阶导数值代入幂级数，或用等比级数，或直接利用五个基本公式展开等方法．

间接展开法是指用逐项求导或逐项求积，或用幂级数的加减乘除等组合方法展开．

1．按定义展开为幂级数

例 1 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x(1+x)}$ 展开成 $x-1$ 乘幂的幂级数．

解 $f(x)=\dfrac{1}{x(1+x)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{1+x}$，$f(1)=1-\dfrac{1}{2}$；

$$f'(x)=\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{x^2}，\quad f'(1)=\frac{1}{2^2}-1；$$

$$f''(x)=\frac{2}{x^3}-\frac{2}{(1+x)^3}，\quad f''(1)=2\left(1-\frac{1}{2^3}\right)；$$

$$f'''(x)=\frac{3!}{(1+x)^4}-\frac{3!}{x^4}，\quad f'''(1)=3!\left(\frac{1}{2^4}-1\right)；$$

…………

$$f^{(n)}(x)=(-1)^n n!\left[\frac{1}{x^{n+1}}-\frac{1}{(1+x)^{n+1}}\right]，$$

$$f^{(n)}(1)=(-1)^n n!\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

$$\therefore \quad f(x)=\frac{1}{x(1+x)}$$

$$=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n+\cdots$$

$$=1-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2^2}-1\right)(x-1)+2!\left(1-\frac{1}{2^3}\right)\frac{(x-1)^2}{2!}$$

$$+3!\left(\frac{1}{2^4}-1\right)\frac{(x-1)^3}{3!}+\cdots+$$

$$+(-1)^n n!\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)\frac{(x-1)^n}{n!}+\cdots$$

$$=1-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2^2}-1\right)(x-1)+\left(1-\frac{1}{2^3}\right)(x-1)^2$$

$$+\left(\frac{1}{2^4}-1\right)(x-1)^3+\cdots+(-1)^n\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)(x-1)^n+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)(x-1)^n \quad (|x-1|<1).$$

例 2 将 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$，且 $f(0)=e$ 展开成 x 的幂级数至 x^3 项.

解 第一种方法，直接用定义展开:

设 $y=f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$$\ln y=\frac{1}{x}\ln(1+x)$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x(1+x)}-\frac{\ln(1+x)}{x^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}-\frac{\ln(1+x)}{x^2} \quad (1)$$