◆ 高等学校教材

概率论与数理统计

主　编　刘大瑾
副主编　王晓春　谭沈阳

3

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

概率论与数理统计

Gailülun yu Shuli Tongji

主　编　刘大瑾

副主编　王晓春　谭沈阳

高等教育出版社·北京

HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书根据独立学院学生的培养目标和要求，突出了对基本概念、基本定理及基本方法的介绍和训练，对部分理论推导作了弱化处理。内容完整紧凑，难度适中，便于组织教学。

全书共十章，内容包括随机事件与概率、随机变量及其分布、二维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律及中心极限定理、样本及抽样分布、参数估计、假设检验、回归分析、随机过程，书后附有部分习题答案与提示。第一章到第七章为基本内容，约需48学时，第八章到第十章中部分内容可选讲，全书内容约需64学时。

本书可作为独立学院理工类专业学生的教材，也可供工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计／刘大瑾主编. --北京：高等教育出版社，2012.7

ISBN 978-7-04-035201-6

Ⅰ.①概… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第159688号

策划编辑 张彦云　　责任编辑 张彦云　　封面设计 于文燕　　版式设计 于 婕
插图绘制 吴文信　　责任校对 杨凤玲　　责任印制 张福涛

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京印刷集团有限责任公司印刷二厂	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm × 960mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	17.5	版　　次	2012年7月第1版
字　　数	320千字	印　　次	2012年7月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	25.80元

物 料 号　35201-00

前　言

随着我国高等教育由“精英教育”阶段向“大众化教育”阶段转变，高等教育的目标也倾向于为社会培养具有实践能力和创新精神的专门人才，这也是独立学院的重要任务之一。在此新形势下，对基础课程的教材进行改革也成为必然趋势。为此，编者在多年教学实践的基础上编写了这本《概率论与数理统计》。

概率论与数理统计是高等学校理工类、经济管理类专业的重要基础课，也是相关专业学生学习后续课程所必不可少的工具，它不仅要求学生掌握概念、定理等方面的内容，还要求学生具有一定实际应用的能力。因此，在本书编写过程中，力求做到取材得当、概念清晰、注重联系实际，帮助学生提高运用概率统计方法的能力。同时本书强调了对基本概念、基本定理和基本方法的介绍和训练，对部分理论推导作了弱化处理，把重点放在例题和习题的选编上，以提高学生解决实际问题的能力。全书内容完整紧凑，难度适中，便于组织教学，此外，还适当增加了一些历年硕士研究生入学统一考试的数学题目作为习题，可供学有余力或考研的学生练习，书后附部分习题答案与提示。第一章到第七章为本书的基本内容，约需 **48** 学时，第八章到第十章中部分内容可供学时较多或要求较高的专业讲授，全部内容约需 **64** 学时。

本书由刘大瑾担任主编，王晓春、谭沈阳担任副主编。参加本书编写的还有（以姓氏笔画为序）：王娅、叶建兵、白路锋、张文彬。

由于编者水平所限，书中疏漏之处在所难免，恳请同行及读者不吝赐教。

编　者

2011 年 11 月

目　　录

第一章　随机事件与概率 …… 1
§1　随机事件 …… 1
§2　概率 …… 5
§3　古典概型 …… 7
§4　条件概率 …… 10
§5　独立性 …… 17
第二章　随机变量及其分布 …… 22
§1　随机变量及其分布 …… 22
§2　随机变量的分布函数 …… 23
§3　离散型随机变量及其分布 …… 24
§4　连续型随机变量及其分布 …… 31
§5　随机变量的函数的分布 …… 38
第三章　二维随机变量及其分布 …… 46
§1　二维随机变量 …… 46
§2　边缘分布及条件分布 …… 52
§3　随机变量的独立性 …… 61
§4　两个随机变量的函数的分布 …… 65
第四章　随机变量的数字特征 …… 75
§1　数学期望 …… 75
§2　方差 …… 81
§3　几种常见分布的数学期望与方差 …… 85
§4　协方差与相关系数 …… 88
第五章　大数定律及中心极限定理 …… 99
§1　大数定律 …… 99
§2　中心极限定理 …… 103
第六章　样本及抽样分布 …… 109
§1　总体与样本 …… 109
§2　统计量与抽样分布 …… 111
第七章　参数估计 …… 126

§1 点估计 …… 126
§2 点估计的优良性准则 …… 138
§3 区间估计 …… 145
§4 正态总体参数的区间估计 …… 147
§5 (0-1)分布参数的区间估计 …… 157
§6 单侧置信区间 …… 159
第八章 假设检验 …… 165
§1 假设检验的基本概念 …… 165
§2 单个正态总体参数的检验 …… 169
§3 两个正态总体参数的检验 …… 176
*§4 假设检验与置信区间的关系 …… 180
*§5 样本容量的选取 …… 182
*§6 非参数假设检验 …… 184
***第九章 回归分析** …… 197
§1 一元线性回归的经验公式与最小二乘法 …… 197
§2 一元线性回归效果的统计检验 …… 206
§3 一元线性回归的预测 …… 212
§4 非线性问题化为线性问题 …… 215
§5 多元线性回归 …… 219
***第十章 随机过程** …… 228
§1 随机过程的概念 …… 228
§2 随机过程的统计描述 …… 232
§3 几种重要的随机过程 …… 238
部分习题答案与提示 …… 244
附表1 几种常用的概率分布 …… 254
附表2 标准正态分布表 …… 256
附表3 t 分布表 …… 257
附表4 χ^2 分布表 …… 259
附表5 F 分布表 …… 262
附表6 秩和临界值表 …… 272

第一章　随机事件与概率

§1　随机事件

一、随机现象

在自然界和人类的社会活动中存在许多现象，其中有些现象在一定条件下必然发生，例如，早晨太阳从东方升起、同性电荷相互排斥等等，这类现象称为**确定性现象**. 同时还存在另一类现象，例如，抛一枚硬币，结果可能是正面朝上，也可能是反面朝上，但在每次抛之前无法肯定抛掷的结果；某地区的年降雨量无法提前预测，但该地区的历年降雨量呈现出一定的规律性，等等. 这种在大量重复试验或观察中表现出的固有规律性，我们称之为**统计规律性**，而这种在个别试验中其结果呈现出不确定性，在大量重复试验中其结果又具有统计规律性的现象，我们称之为**随机现象**. 概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象统计规律性的一门学科.

二、随机试验

在这里，我们把试验作为一个含义广泛的术语，不仅包括各种各样的科学实验，还包括对某一事物的某一特征的观察. 下面列举一些试验的例子.

E_1：抛一枚硬币，观察出现正面 H、反面 T 的情况；

E_2：掷一枚骰子，观察出现的点数；

E_3：车站售票处一天内售出的车票数；

E_4：乘客在车站等车的时间，车辆每 30 分钟发车一次；

E_5：一天内进入超市的顾客数.

这些试验都有以下特点：

(1) 可以在相同的条件下重复进行；

(2) 每次试验的结果不止一个，但是能事先明确试验的所有可能结果；

(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

我们将具有上述三个特点的试验称为**随机试验**，记为 E.

本书中以后提到的所有试验都是指随机试验.

三、样本空间

对于随机试验，虽然每次试验的结果不能预知，但是试验的所有可能结果是已知的. 我们把随机试验的所有可能结果组成的集合称为随机试验 E 的**样本空间**，记为 S. 样本空间的元素，即随机试验 E 的结果，称为**样本点**，记为 e.

下面写出前面例子中试验 $E_i(i=1,2,\cdots,5)$ 的样本空间 S_i：

$S_1=\{H,T\}$；

$S_2=\{1,2,3,4,5,6\}$；

$S_3=\{0,1,2,3,\cdots\}$；

$S_4=\{t\mid 0\leqslant t\leqslant 30\}$；

$S_5=\{0,1,2,3,\cdots\}$.

样本空间 S 是由所有样本点构成的集合，其表示方法有列举法、描述法. 在样本空间中，样本点可以是一维的，也可以是多维的；可以是有限个，也可以是无限个. 对同一个试验而言，当考虑的问题不同时，样本空间也会不同. 例如掷一枚骰子 2 次，若考察出现的点数，样本空间为

$$S=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\cdots,\\(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}.$$

若考虑出现点数大小的情况(规定 1—3 为小点数，4—6 为大点数)，此时样本空间为

$$S=\{(大,小),(大,大),(小,大),(小,小)\}.$$

四、随机事件

在实际生产和生活中，人们常常关心的是那些满足某种特征的样本点组成的集合. 例如，若规定一天内进入超市的顾客数大于等于 1 000 为正常营业，则在 E_5 中我们关心顾客数是否大于等于 1 000. 满足这一特点的样本点组成的集合为 S_5 的一个子集 $A=\{1\ 000,1\ 001,1\ 002,\cdots\}$. 我们称 A 为试验 E_5 的一个随机事件.

一般地，我们称试验 E 的样本空间 S 的子集为 E 的**随机事件**，简称**事件**. 特别地，由一个样本点组成的单点集，称为**基本事件**. 样本空间的最大子集(即 S 本身)，称为**必然事件**. 样本空间的最小子集(即空集 $\varnothing$)称为**不可能**

事件.

在试验中,如果事件 A 包含的某一个样本点 e 出现时,就称事件 A 发生了.

例 1　E_4 中事件 A_1 ="等车时间超过二十分钟",即 $A_1=\{t\mid 20<t\leqslant 30\}$.

事件 A_2 ="等车时间介于十分钟到二十分钟之间",即 $A_2=\{t\mid 10\leqslant t\leqslant 20\}$.

五、事件之间的关系与事件的运算

事件是样本空间的子集,因而事件之间的关系与运算就可以按照集合之间的关系和运算来处理.

1. 事件的包含与相等

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称事件 A **包含于**事件 B,或称事件 B **包含**事件 A,记为 $A\subset B$(见图 1-1).若 $A\subset B$,且 $B\subset A$,则称事件 A 与事件 B **相等**,记为 $A=B$.

2. 事件的和

"事件 A 与事件 B 至少有一个发生"这一事件称为事件 A 与事件 B 的和事件,记为 $A\cup B$,可见 $A\cup B=\{e\mid e\in A$ 或 $e\in B\}$(见图 1-2).

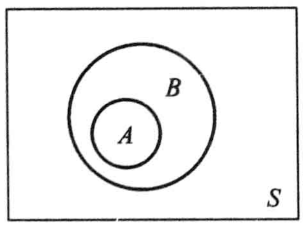

图 1-1

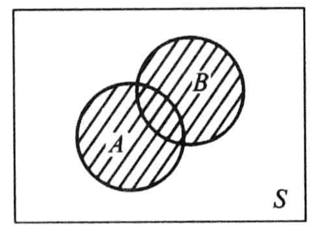

图 1-2

类似地,称 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件,称 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的和事件.

3. 事件的积

"事件 A 与事件 B 同时发生"这一事件称为事件 A 与事件 B 的积事件,记为 $A\cap B$,也记作 AB,可见 $A\cap B=\{e\mid e\in A$ 且 $e\in B\}$(见图 1-3).

类似地,称 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件,称 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cap\cdots$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的积事件.

4. 事件的差

“事件 A 发生而事件 B 不发生”这一事件称为事件 A 与事件 B 的**差事件**，记为 $A-B$，可见 $A-B=\{e \mid e\in A \text{ 且 } e\notin B\}$（见图 1－4）.

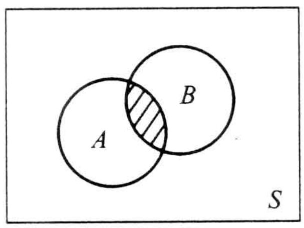

图 1－3

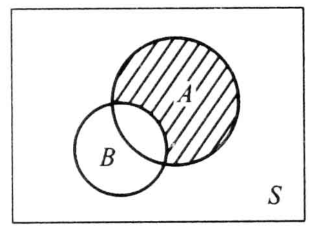

图 1－4

5. 互不相容事件

若事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 是**互不相容事件**，或称它们是**互斥事件**（见图 1－5）. 可见，基本事件之间是互不相容的，不可能事件 $\varnothing$ 与任何事件都是互不相容的.

6. 对立事件

“A 不发生”这一事件称为事件 A 的**对立事件**，记为 $\overline{A}$. 可见 $\overline{A}=\{e \mid e\in S \text{ 且 } e\notin A\}$（见图 1－6）.

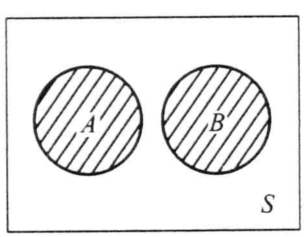

图 1－5

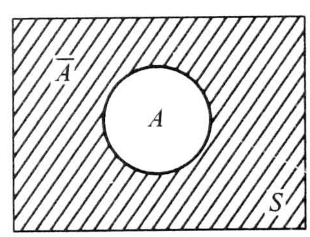

图 1－6

显然可以发现 $\overline{\overline{A}}=A$，$A\cup\overline{A}=S$，$A\cap\overline{A}=\varnothing$. 对立事件也称为互逆事件，互逆事件一定是互斥事件，但互斥事件不一定是互逆事件.

六、事件的运算规律

设 A,B,C 为任意事件，则事件运算满足如下规律：

交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$.

结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

对偶律（**德摩根律**）：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

§2 概 率

除必然事件和不可能事件外,对每一个事件,它在一次试验中可能发生,也可能不发生,这样我们就希望知道某些事件在一次试验中发生的可能性有多大,例如,某地某年发生洪水的可能性大小.我们希望找到一个合适的数来表示事件在一次试验中发生的可能性大小.这里首先引入频率的概念.

一、频率

定义 1.1 设 E 为随机试验,A 为其中任一事件,在相同条件下,独立重复进行 n 次试验,n_A 表示事件 A 在这 n 次试验中发生的次数,比值 $f_n(A)=n_A/n$ 称为事件 A 在这 n 次试验中出现的**频率**.

从频率的定义就可以看出频率具有如下性质:

(1) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$;

(2) $f_n(S)=1$;

(3) 若事件 A 与事件 B 是互不相容的,即 $AB=\varnothing$,则

$$f_n(A\cup B)=f_n(A)+f_n(B).$$

性质 1,2 是显然的,关于性质 3 的证明如下:

设在 n 次试验中,事件 A 与 B 发生的次数分别为 n_A,n_B,因为 $AB=\varnothing$,故 $n_{A\cup B}=n_A+n_B$,从而

$$f_n(A\cup B)=\frac{n_{A\cup B}}{n}=\frac{n_A}{n}+\frac{n_B}{n}=f_n(A)+f_n(B).$$

性质 3 可以推广到 k 个两两互不相容的事件:若 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是两两互不相容的事件,即对于 $A_iA_j=\varnothing,i\neq j,i,j=1,2,\cdots,k$,有

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k).$$

历史上不少统计学家做过成千上万次抛掷硬币的试验,用 A 表示事件"抛掷硬币出现正面",其试验记录如下:

试验者	抛掷次数 n	出现正面的次数 n_A	频率 $f_n(A)$
德摩根(De Morgan)	2 048	1 061	0.518 1
蒲丰(Buffon)	4 040	2 048	0.506 9
皮尔逊(Pearson)	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊(Pearson)	24 000	12 012	0.500 5

可以看出，当抛掷硬币的次数 n 逐渐增大时，频率 $f_n(A)$ 总在 0.5 附近波动，并且呈现出逐渐稳定于0.5 的倾向. 频率的这种稳定性即通常所说的统计规律性，它揭示了随机现象内部隐藏着的必然规律，它能够反映事件发生的可能性大小.

二、概率

定义 1.2 设 E 是随机试验，称事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 的稳定值为事件 A 发生的**概率**，记为 $P(A)=p$.

上述概率定义称为概率的统计定义，这个定义是以试验为基础的，但应当注意的是，这并不是说概率取决于试验，事件 A 发生的概率是事件 A 本身的一种属性，完全取决于事件 A 本身，是先于试验客观存在的. 但在实际生产生活中，不可能对每个事件都做大量的试验，然后确定该事件发生的概率.

我们从频率的性质和稳定性得到启发，给出概率的如下定义：

定义 1.3 设 E 是随机试验，S 是它的样本空间，对于 E 的每一事件 A 赋予一个实数，记为 $P(A)$，称为事件 A 发生的**概率**，如果集合函数 $p(\cdot)$ 满足下列条件：

(1) 非负性：对于每一事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$；

(2) 规范性：对于必然事件 S，有 $P(S)=1$；

(3) 可列可加性：设 $A_1,A_2,\cdots$ 是两两互不相容的事件，即对于 $A_iA_j=\varnothing, i\neq j, i,j=1,2,\cdots$，有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots.$$

概率的几何意义： 如果把随机现象的样本空间 S 看成某几何区域，该区域的“测度”（一维时指“长度“，二维时指“面积“）为 M_S，进一步假设随机事件发生具有某种等可能性，即任意一点落入测度相等的子区域是等可能的. 若事件 A 表示点落入 S 的某个子区域，M_A 为子区域的测度，则 A 发生的概率为 $P(A)=\dfrac{M_A}{M_S}$.

三、概率的性质

性质 1 $P(\varnothing)=0$；

性质 2（有限可加性） 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的事件，则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

性质 3 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

性质 4 对于任一事件 A,有 $P(A)\leqslant 1$.

性质 5 对于任意两事件 A,B,有

$$P(A-B)=P(A)-P(AB),$$

特别地,如果 $B\subset A$,则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$.

性质 6 对于任意两事件 A,B,有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB),$$

特别地,如果 $AB=\varnothing$,则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

§3 古典概型

上一节引入了概率的定义,但没有提供计算事件发生概率的方法. 为了计算事件发生的概率,需要区分随机试验的不同条件,本节将介绍一类最早被研究的概率模型,称为古典概型.

古典概型是最简单、最直观的一种概率模型,若随机试验满足:

(1) 试验的样本空间只包含有限个元素;

(2) 试验中的每个基本事件发生的可能性相同,

则称具有上述特点的概率模型为**古典概型**,也称为**等可能概型**.

例如 §1 中随机试验 E_1,E_2 都是古典概型. 下面来讨论古典概型中事件发生概率的计算公式.

设试验的样本空间为 $S=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$,由古典概型的条件(2)可知

$$P(e_1)=P(e_2)=\cdots=P(e_n),$$

由于基本事件是两两互不相容的,于是

$$\begin{aligned}1=P(S)&=P\{e_1\cup e_2\cup\cdots\cup e_n\}=P(e_1)+P(e_2)+\cdots+P(e_n)\\&=nP(e_i),\end{aligned}$$

所以 $P(e_i)=\dfrac{1}{n},i=1,2,\cdots,n$.

若事件 A 包含 k 个基本事件,即 $A=\{e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_k}\}$,则有

$$P(A)=P(e_{i_1})+P(e_{i_2})+\cdots+P(e_{i_k})=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 包含的基本事件数}}{S\text{ 包含的基本事件数}}.$$

对于古典概型,其概率计算问题涉及 k 和 n. 为了方便后面的计算,我们把计数时涉及的因素归结为“放回”与“计序”两方面. 所谓“放回”是指抽样后把所抽到的元素放回,再进行下一次抽样;所谓“计序”是指前后抽到的结果与顺

序有关. 显然"计序"与"不计序" 对应着中学数学里的"排列"与"组合". 这样从 n 个元素中抽取 r 个元素时,就可能产生四种不同的结果,即:

(1) 采用"放回","计序"模式时,共有 n^r 种不同结果.

(2) 采用"放回","不计序"模式时,共有 C_{n+r-1}^r 种不同结果.

(3) 采用"不放回","计序"模式时,共有 $A_n^r=\dfrac{n!}{(n-r)!}=n(n-1)\cdots(n-r+1)$ 种不同结果.

(4) 采用"不放回","不计序"模式时,共有 $C_n^r=\dfrac{n!}{r!\ (n-r)!}$ 种不同结果.

因为结果不同,所以在计算古典概型题目时必先明确是否"放回"及是否"计序",实际上"放回"与后面介绍的"独立"有关系. 古典概型看似简单,但在实际计算中有很大的技巧性,因此有必要掌握一些重要的、有代表性的模型和方法.

例 1(抽球问题) 设盒中有 5 个白球,3 个红球,现从盒中任抽两个球,求抽到一红一白的概率.

解 从 8 个球中取两个球有 C_8^2 种情况,设 A 表示事件"取到一红一白",共有 $C_5^1C_3^1$ 种情况,则

$$P(A)=\frac{C_5^1C_3^1}{C_8^2}=\frac{15}{28}.$$

一般地,设盒中有 N 个球,其中有 M 个白球,现从中任抽 n 个球,则这 n 个球中恰好有 k 个白球的概率为 $P=\dfrac{C_M^kC_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$.

例 2(分球入盒问题) 将 3 个球随机地放入 3 个盒子中,求(1) 每盒恰有一球的概率;(2) 两个盒子是空的概率;(3) 一个盒子是空的概率.

解 把 3 个球放入 3 个盒子,共有 3^3 种情况,

(1) 设 A 表示事件"每盒恰有 1 球",则有 $C_3^1C_2^1C_1^1$ 种情况,

所以
$$P(A)=\frac{C_3^1C_2^1C_1^1}{3^3}=\frac{2}{9}.$$

(2) 设 B 表示事件"空两个盒子",此时球全部到了某个盒子当中,则有 3 种情况,故

$$P(B)=\frac{3}{3^3}=\frac{1}{9}.$$

(3) 设 C 表示事件"空一个盒子",则

$$P(C)=1-P(A)-P(B)=1-\frac{2}{9}-\frac{1}{9}=\frac{2}{3}.$$

一般地,把 n 个球随机地分配到 N 个盒子中去($n\leqslant N$),则每盒至多有一球的概率是 $P=\dfrac{\mathrm{A}_N^n}{N^n}$.

例 3(分组问题) 40 名学生中有 4 名运动员,将这 40 名学生平均分成 4 组,求(1) 每组有一名运动员的概率;(2) 4 名运动员集中到一个组的概率.

解 把 40 名学生平均分成 4 组有 $\mathrm{C}_{40}^{10}\mathrm{C}_{30}^{10}\mathrm{C}_{20}^{10}\mathrm{C}_{10}^{10}$ 种情况.

(1) 设 A 表示事件"每组有一名运动员",则有 $\mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_{36}^9\mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_{27}^9\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_{18}^9\mathrm{C}_1^1\mathrm{C}_9^9$ 种情况,所以

$$P(A)=\frac{\mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_{36}^9\mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_{27}^9\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_{18}^9\mathrm{C}_1^1\mathrm{C}_9^9}{\mathrm{C}_{40}^{10}\mathrm{C}_{30}^{10}\mathrm{C}_{20}^{10}\mathrm{C}_{10}^{10}}=\frac{4!36!/(9!9!9!9!)}{40!/(10!10!10!10!)}=\frac{1\ 000}{9\ 139},$$

(2) 设 B 表示事件"4 名运动员集中到一个组",则有 $\mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_{36}^6\mathrm{C}_{30}^{10}\mathrm{C}_{20}^{10}\mathrm{C}_{10}^{10}$ 种情况,所以

$$P(B)=\frac{\mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_{36}^6\mathrm{C}_{30}^{10}\mathrm{C}_{20}^{10}\mathrm{C}_{10}^{10}}{\mathrm{C}_{40}^{10}\mathrm{C}_{30}^{10}\mathrm{C}_{20}^{10}\mathrm{C}_{10}^{10}}=\frac{84}{9\ 139}.$$

一般地,把 n 个球随机地分成 m 组($n>m$),要求第 i 组恰有 n_i 个球($i=1,2,\cdots,m$),共有 $\dfrac{n!}{n_1!\ n_2!\ \cdots n_m!}$ 种分法.

例 4(随机取数问题) 在 1—300 这 300 个整数中随机地取一个数,问取到的整数既不能被 6 整除,又不能被 7 整除的概率是多少?

解 设 A 表示事件"取到的数能被 6 整除",B 表示事件"取到的数能被 7 整除",C 表示事件"取到的整数既不能被 6 整除、又不能被 7 整除",则

$$P(C)=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB),$$

从 1 到 300 能被 6 整除的数有 50 个,所以

$$P(A)=\frac{50}{300}=\frac{1}{6},$$

从 1 到 300 能被 7 整除的数有 42 个,所以

$$P(B)=\frac{42}{300}=\frac{7}{50},$$

既能被 6 整除、又能被 7 整除的数有 7 个,所以

$$P(AB)=\frac{7}{300},$$

所以

$$P(C)=1-\frac{1}{6}-\frac{7}{50}+\frac{7}{300}=\frac{43}{60}.$$

§4 条件概率

在实际应用中,常常会遇到这样的问题:在已知某事件 A 发生的条件下,求事件 B 发生的概率.我们看下面的例子.

甲、乙两台机床生产同一型号的零件共 100 个,质量报告如表所示:

	合格品数	不合格品数	合计
甲	35	5	40
乙	50	10	60
合计	85	15	100

现从这 100 个零件中任取一个进行检验,则取到合格品(设为事件 B)的概率是$P(B)=\frac{85}{100}=0.85$,取到的零件是甲机床生产(设为事件 A)的概率是 $P(A)=\frac{40}{100}$,而事件 AB 表示"取到的零件是甲机床生产的合格品",其概率是 $P(AB)=\frac{35}{100}$.

现在考虑在事件 A 发生的条件下,事件 B 发生的概率,我们把它记为 $P(B|A)$.此时的样本空间缩小了,问题变成了在甲机床生产的零件中任取一件为合格品的概率,所以,$P(B|A)=\frac{35}{40}$.一般地,$P(B)\neq P(B|A)$,同时也看到

$$P(B|A)=\frac{35}{40}=\frac{35/100}{40/100}=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

这一结果有它的一般性,我们给出条件概率的定义如下.

定义 1.4 设 A,B 是两个事件,且 $P(A)>0$,称

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的**条件概率**.

很容易就可验证,条件概率 $P(\cdot\mid A)$ 符合概率定义的三个条件,即

(1) 非负性: 对于每一事件 B,有 $P(B\mid A)\geqslant 0$;

(2) 规范性: 对于必然事件 S,有 $P(S\mid A)=1$;

(3) 可列可加性: 设 $B_1,B_2,\cdots$是两两互不相容的事件,则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\mid A\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(B_i\mid A).$$

由条件概率的公式,可以得到下面的定理.

定理 1.1(乘法公式) 设 $P(A)>0$,则有

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A).$$

乘法公式可以推广到多个事件的积事件. 例如,设 A,B,C 为事件,且 $P(AB)>0$,则有 $P(ABC)=P(A)P(B\mid A)P(C\mid AB)$.

一般地,设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件,$n\geqslant 2$,且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$,则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)\cdots P(A_{n-1}\mid A_1A_2\cdots A_{n-2})P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

例 1 有 10 台外形相同的笔记本电脑,其中有 3 台是大内存的,现在从中无放回地取出 2 台,求在第一次取到大内存电脑的条件下第二次也取到大内存电脑的概率.

解 令 $A_i(i=1,2)$表示第 i 次取到大内存电脑,则要求的是 $P(A_2\mid A_1)$. 因为

$$P(A_1)=\frac{3}{10},\quad P(A_1A_2)=\frac{C_3^1C_2^1}{C_{10}^1C_9^1}=\frac{1}{15}.$$

所以 $P(A_2\mid A_1)=\dfrac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}=\dfrac{1/15}{3/10}=\dfrac{2}{9}$.

例 2 在 96 件产品中有 3 件次品,现在无放回地依次抽取 2 件,问两件都是合格品的概率是多少?

解 设 $A_i(i=1,2)$表示第 i 次取到合格品,则两件都是合格品就是 A_1,A_2 同时发生,要求的是 $P(A_1A_2)$,由乘法公式可知

$$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)=\frac{93}{96}\times\frac{92}{95}=0.938\ 2.$$

例 3 今有某明星演唱会门票一张,5 个人都想要,他们用抓阄的办法来确