# 随机过程及其应用

陈克龙　编著

东 南 大 学 出 版 社

# 随机过程及其应用

陈克龙 编著

东南大学出版社

(苏) 新登字第012号

**内容提要**

本书介绍随机过程的基本理论及其在工程技术领域中的应用。内容包括随机过程概论、马尔可夫链、纯不连续过程与扩散过程、平稳过程、鞅与布朗运动、随机微分方程、滤波与估值、随机控制等。

本书可作为数学系的高年级学生、研究生和工科研究生开设选课的教材，也可供需提高专业理论水平的科技工作者参考。

责任编辑 田湘

随机过程及其应用

陈克龙 编著

*

东南大学出版社出版发行

(南京四牌楼2号 邮编210018)

南京东湖印刷厂印刷

*

开本850×1168毫米1/16 印张12.5字数328千

1993年6月第1版 1993年6月第1次印刷

印数:1—1000册

ISBN 7—81023—778—0/O·70

定价: 7.20元

# 代　序

伴随着物理学、生物学以及通讯与控制等科学与工程技术的日益发展，随机过程已成为一门内容十分丰富的学科，且在自然科学、工程技术乃至经济管理等领域获得越来越广泛的应用。

本书是在给应用数学专业和工科研究生开设选课的基础上，结合应用背景扩展而成的。全书共分八章，第一章为随机过程概论；第二章与第三章为马尔可夫过程；第四章研究平稳过程；第五章讨论鞅与布朗运动；第六章为伊藤积分与随机微分方程；第七章介绍滤波与估值；第八章介绍随机控制。

本书作者以其长期从事科研和教学工作的丰富经验对内容做了精心处理，其中最大特点是既充分考虑到应用的需要，又保持了数学理论的系统和完美，从而全书显得结构紧凑、取材精炼、叙述通俗、论证简捷，有些命题的处理更具有独到之处。读者能在较短的时间结合具体应用背景学到随机过程的基本理论以及一般随机系统的处理方法。即便是非数学专业的工科研究生也能从中领悟到本书之精髓，使之成为处理工程技术中相应问题的数学工具。

当代信息技术和计算机科学的迅速发展已为随机系统的处理提供了有利的条件，因此随机过程的应用知识必将会被更多的科学和技术工作者所需求和掌握。本书不仅可作为应用数学专业高年级学生、研究生和工科研究生的教材，也为广大应用科技工作者学习随机过程的理论和方法提供了一本很好的参考书。

李延保

1993 年于东南大学

# 目 录

# 第一章　随机过程概论

## §1　随机过程的概念及其统计特性

### 一、随机过程的概念

随机过程的理论起始于对统计物理以及对物理系统中各类噪声和起伏现象的研究，且随着物理学、生物学、通讯和控制等科学与工程技术的发展而逐步发展起来的。

概率论所研究的随机现象基本上可由一个或有限多个随机变量来描述。在极限定理中虽然也考虑了随机变量序列，但也是假定它们是独立的。而在实际中，我们常要研究随机现象的发展和变化过程，这时所考虑的随机事件就要涉及一族无穷多个相互有关的随机变量。通常就把这一族随机变量称为随机过程，记作 $\{X(t),t\in T\}$，其中 $T$ 是个无穷集合。粗略地说，一族随机变量的集合称为随机过程。下面举几个随机过程的实例。

**例 1　热噪声**　由于电阻中自由电子的随机运动，导致电路中电阻两端的电压有随机的起伏，称为热噪声。它是依赖于时间 $t$ 的随机变量。因而热噪声是随机过程。

**例 2　排队模型**　某电话交换台接收到的呼唤形成呼唤流。（每一次呼唤代表一个要打电话的用户）。若以 $X(t,\omega)$ 表示在 $[0,t]$ 中接受到呼唤的次数，则 $\{X(t,\omega),t\geqslant 0\}$ 是随机过程。

**例 3　Brown 运动**　漂浮在水面上的花粉微粒由于受到介质分子的大量的随机碰撞而作的无规则运动称为 Brown 运动。若以 $\{X(t),Y(t)\}$ 表示时刻 $t$ 花粉微粒的位置，则 $\{X(t),Y(t),t\geqslant 0\}$ 是一个二维随机过程。

**例 4　群体的繁殖**　一个群体在时刻 $t$ 的大小以 $X(t,\omega)$ 表示。由于群体的大小总是有起伏的，因此 $\{X(t,\omega),\ t\in T\}$ 是个随机过程。

**例 5　传染病模型**　在传染病学的随机理论中，若以 $S(t)$，$I(t)$ 以及 $R(t)$ 分别表示在时刻 $t$ 对某种传染病敏感的，已经传染上的与治愈的人数，则 $\{(S(t),\ I(t),\ R(t)),\ t\geqslant 0\}$ 为一个三维的随机过程。

由此可见，随机过程不仅在物理系统中出现，它在生物学、医学、社会系统以及各种工程领域中都获得广泛的应用。其一般定义为

**定义 1**　$\{\Omega,Ж,P\}$ 为概率空间，$T\subset(-\infty,\infty)$ 为参数集。若对每个 $t\in T$，有一个定义在此空间上的随机变量 $X(t,\omega)(\omega\in\Omega)$ 与之对应，则称 $\{X(t,\omega),\ t\in T\}$ 为随机过程，简记为 $\{X(t),t\in T\}$。若 $T$ 为整数集合，则 $\{X(t,\omega),\ t\in T\}$ 称为随机序列。固定 $\omega\in\Omega$，称 $X(t,\omega)$ 为随机过程的样本函数，或称为一个现实。

## 二、随机过程的分布

设 $\{X(t),\ t\in T\}$ 为随机过程，任取 $t_1,\cdots,t_n\in T$，则称

$$F(t_1,\cdots,t_n;\ x_1,\cdots,x_n)=P\{X(t_1)<x_1,\cdots,X(t_n)<x_n\}\tag{1}$$

为随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 的 $n$ 维分布函数。由于 $t_1,\cdots,t_n$ 与 $n$ 的选取的任意性，得到随机过程的分布函数族，满足下列 Kolmogorov 相容性条件

$$F(t_1,\cdots,t_n;\ x_1,\cdots,x_n)=F(t_{i_1},\cdots,t_{i_n};\ x_{i_1},\cdots,x_{i_n})\tag{2}$$

$$F(t_1,\cdots,t_l,t_{l+1},\cdots,t_n;\ x_1,\cdots,x_l,\infty,\cdots,\infty)$$
$$=F(t_1,\cdots,t_l;\ x_1,\cdots,x_l)\tag{3}$$

其中 $i_1,\cdots,i_n$ 是 $1,\cdots,n$ 的任意排列。我们称这样的一族分布函数为随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 的有限维分布函数族。

引入特征函数

$$\phi(t_1,\cdots,t_n;\ u_1,\cdots,u_n)=Ee^{i[u_1X(t_1)+\cdots+u_nX(t_n)]}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(u_1x_1+\cdots+u_nx_n)}\mathrm{d}F(t_1,\cdots,t_n;\ x_1,\cdots,x_n)\tag{4}$$

则称 $\{\phi(t_1,\cdots,t_n;\ u_1,\cdots,u_n),\ n\geqslant 1,\ t_1,\cdots,t_n\in T\}$ 为随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 的有限维特征函数族。由特征函数的唯一性定理，随机过程的有限维分布函数族与有限维特征函数族相互唯一确定。

随机过程与分布函数族之间有如下的基本定理

**定理 1 （Kolmogorov 定理）** 设分布函数族 $\{F(t_1,\cdots,t_n;\ x_1,\cdots,x_n),\ t_1,\cdots,t_n\in T,\ n\geqslant 1\}$ 满足相容性条件 (2) 与 (3) 式，则必存在某随机过程 $\{X(t,\omega),\ t\in T\}$，使 $\{F(t_1,\cdots,t_n;\ x_1,\cdots,x_n),\ t_1,\cdots,t_n\in T,\ n\geqslant 1\}$ 恰好是该随机过程的有限维分布函数族。

Kolmogorov 定理从理论上肯定了以已给分布函数族为其有限维分布函数族的随机过程的存在性。

**三、随机过程的数字特征**

有限维分布函数族虽可完整地描述随机过程的统计特性，但在实际应用中要确定随机过程的有限维分布函数是往往不可能的。我们引进随机过程的某些重要的数字特征。

**定义 2** 随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 的均值函数 $m(t)$ 与方差函数 $\sigma^2(t)$ 分别定义为

$$m(t)=EX(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x\mathrm{d}F(t,x)\tag{5}$$

$$\sigma^2(t)=VarX(t)=E[X(t)-m(t)]^2$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}[x-m(t)]^2\mathrm{d}F(t,x)\tag{6}$$

均值 $m(t)$ 是随机过程的样本函数在时刻 $t$ 的平均值，而方差 $\sigma^2(t)$ 则刻划随机过程 $X(t)$ 对均值 $m(t)$ 的偏离程度。

**定义 3** 对任意两个不同时刻 $t_1,t_2\in T$，随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 的(自)相关函数 $R(t_1,t_2)$ 与协方差函数 $C(t_1,t_2)$ 定义为

$$R(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2\mathrm{d}F(t_1,t_2;\ x_1,x_2) \tag{7}$$

$$C(t_1,t_2)=E[X(t_1)-m(t_1)][X(t_2)-m(t_2)]$$

$$=Cov[X(t_1),X(t_2)] \tag{8}$$

由定义，相关函数与协方差函数显然有下列关系式

$$\sigma^2(t)=C(t,t)=R(t,t)-m^2(t) \tag{9}$$

即方差函数可以从协方差函数中导出。因此上述诸数字特征中最主要的是均值(数学期望)与自相关函数。从理论上说，仅仅研究随机过程的均值和相关函数是不能代替对整个随机过程的研究的，但它们也确实描述了随机过程的主要统计特性，而且也易于计算。在解决工程实际问题中，往往能起到重要作用。特别，当随机过程为 Gauss 过程(正态过程)时，它们就能完整地描述过程的统计特性。

**例 6** **随机相位正弦波** $X(t)=a\cos(\omega t+\Theta)$，其中 $a>0$，$\omega$ 为常数，$\Theta$ 是在 $[0,2\pi]$ 上服从均匀分布的随机变量、求随机过程 $\{X(t),t\geqslant 0\}$ 的均值 $m(t)$ 与自相关函数 $R(t_1,t_2)$。

**解** 随机变量 $\Theta$ 的概率密度为

$$p(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}, & 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\\ 0, & \text{他处}\end{cases}$$

故有

$$m(t)=E[a\cos(\omega t+\Theta)]=\frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\omega t+\theta)\mathrm{d}\theta=0$$

$$R(t_1,t_2) = E\left[ a^2\cos(\omega t_1 + \Theta)\cos(\omega t_2 + \Theta) \right]$$

$$= \frac{a^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\omega t_1 + \theta)\cos(\omega t_2 + \theta)\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\cos\omega(t_2 - t_1)$$

**例 7　Poisson 随机电报信号**　$X(t)$ 的定义为

(1) 在任何时刻 $t$，$X(t)$ 取值为 0 或 1，且

$$P\{X(t) = 0\} = P\{X(t) = 1\} = \frac{1}{2}$$

(2) 每个状态的持续时间是随机的，在时间区间 $(t_0,t_0 + t]$ 内波形变化次数 $\mu$ 服从 Poisson 分布，即

$$P\{\mu = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t},\ k = 0,1,\cdots$$

其中 $\lambda$ 代表单位时间内波形的平均变化次数。

(3) $X(t)$ 取任何值与随机变量 $\mu$ 是相互统计独立的。

求随机电报信号的均值和相关函数。

**解**　$m(t) = EX(t) = \dfrac{1}{2}$

设 $t_1 < t_2$，则有

$$R(t_1,t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]$$

$$= \sum_{i,j=0}^{1} ijP\{X(t_1) = i, X(t_2) = j\}$$

$$= P\{X(t_1) = 1,\ X(t_2) = 1\}$$

$$= P\{X(t_1) = 1\}P\{\text{在 }(t_1,t_2]\text{ 中波形发生偶数次变化}\}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[\lambda(t_2 - t_1)]^{2k}}{(2k)!}e^{-\lambda(t_2 - t_1)}$$

$$= \frac{1}{2} e^{-\lambda(t_2 - t_1)} \cosh\lambda(t_2 - t_1)$$

$$= \frac{1}{4} [1 + e^{-2\lambda(t_2 - t_1)}]$$

同理当 $t_1 > t_2$ 时有

$$R(t_1, t_2) = \frac{1}{4} [1 + e^{-2\lambda(t_1 - t_2)}]$$

因此我们有

$$R(t_1, t_2) = \frac{1}{4} [1 + e^{-2\lambda|t_2 - t_1|}]$$

显然随机电报信号的协方差函数为

$$C(t_1, t_2) = \frac{1}{4} e^{-2\lambda|t_2 - t_1|} \tag{10}$$

### 四、两个或两个以上随机过程的数字特征

在实际问题中常遇到必须同时考虑两个以上随机过程的情况。例如在通讯中，信号在传输过程中总受到噪声的干扰，一般说它们都是随机过程。因此有必要定义两个或两个以上的随机过程的联合分布函数以及描述几个随机过程两两之间相关程度的数字特征，即互相关函数和互协方差函数。

若两个随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 和 $\{Y(t), t \in T\}$ 具有同一个参数集 $T$，$t_1, \cdots, t_n$ 和 $t'_1, \cdots, t'_m$ 为取自参数集 $T$ 的任意两组实数，$(n+m)$ 维随机变量 $\{X(t_1), \cdots, X(t_n),\ Y(t'_1), \cdots, Y(t'_m)\}$ 的分布函数

$$F(t_1, \cdots, t_n,\ t'_1, \cdots, t'_m;\ x_1, \cdots, x_n,\ y_1, \cdots, y_m)$$

称为随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 与 $\{Y(t), t \in T\}$ 的 $n+m$ 维联合分布函数。若对任意正整数 $n$ 和 $m$ 以及任何数组 $t_1, \cdots, t_n$，$t'_1, \cdots, t'_m$，都有

$$F(t_1, \cdots, t_n,\ t'_1, \cdots, t'_m;\ x_1, \cdots, x_n,\ y_1, \cdots, y_m)$$

$$= F(t_1,\cdots,t_n;\ x_1,\cdots,x_n)F(t'_1,\cdots,t'_m;\ y_1,\cdots,y_m)$$

则称随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 与 $\{Y(t),t\in T\}$ 是独立的。

**定义 4** 随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 与 $\{Y(t),t\in T\}$ 的互相关函数 $R_{XY}(t_1,t_2)$ 与互协方差函数 $C_{XY}(t_1,t_2)$ 的定义为

$$R_{XY}(t_1,t_2) = E[X(t_1)Y(t_2)]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\mathrm{d}F(t_1,t_2;\ x,y) \tag{11}$$

$$C_{XY}(t_1,t_2) = E[X(t_1) - m_X(t_1)][Y(t_2) - m_Y(t_2)]$$

$$= R_{XY}(t_1,t_2) - m_X(t_1)m_Y(t_2) \tag{12}$$

**定义 5** 称随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 与 $\{Y(t),t\in T\}$ 互不相关，若对任意的 $t_1$ 和 $t_2$ 有

$$R_{XY}(t_1,t_2) = m_X(t_1)m_Y(t_2)$$

称随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 与 $\{Y(t),t\in T\}$ 相互正交，若

$$R_{XY}(t_1,t_2) = 0, \qquad t_1,\ t_2\in T$$

因此当 $m_X(t) = m_Y(t) = 0$ 时，两个随机过程不相关与相互正交是等价的。

若两个随机过程相互独立，且它们的二阶矩都存在，则它们必互不相关。但我们不能由两个随机过程的不相关来推断它们是统计独立的。只有在 Gauss 过程情况下，相互独立与互不相关等价。

## 五、复随机过程的数字特征

两个复随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 和 $\{Y(t),t\in T\}$ 的互相关函数定义为

$$R_{XY}(t_1,t_2) = E[X(t_1)\overline{Y(t_2)}] \tag{13}$$

互协方差函数定义为

$$C_{XY}(t_1,t_2) = E[X(t_1) - m_X(t_1)][\overline{Y(t_2) - m_Y(t_2)}] \tag{14}$$

例 8　设有复随机过程

$$X(t)=\sum_{k=1}^{N}A_k e^{i\omega_k t}$$

其中 $\omega_k$ 为常数，$A_k\ (1\leqslant i\leqslant N)$ 是相互独立且服从于正态分布 $N(0,\sigma_k^2)$ 的随机变量。求 $X(t)$ 的均值和协方差函数。

解　$EX(t)=\sum_{k=1}^{N}E(A_k)e^{i\omega_k t}=0$

$$\begin{aligned}R(t_1,t_2)&=E[X(t_1)\overline{X(t_2)}]\\&=E\left[\sum_{k=1}^{N}A_k e^{i\omega_k t_1}\right]\left[\overline{\sum_{j=1}^{N}A_j e^{i\omega_j t_2}}\right]\\&=\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}E[A_k\overline{A}_j]e^{i(\omega_k t_1-\omega_j t_2)}\\&=\sum_{k=1}^{N}\sigma_k^2 e^{i\omega_k(t_1-t_2)}\end{aligned}\tag{15}$$

显然，由于 $m(t)=0$，协方差函数等于相关函数。

## §2　几类重要的随机过程

### 一、Markov 过程

**定义 1**　设随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 对任何正整数 $n$ 及 $t_1<t_2<\cdots<t_n\in T$，其条件分布满足

$$\begin{aligned}&P\{X(t_n)<x_n\,|\,X(t_1)=x_1,\cdots,X(t_{n-1})=x_{n-1}\}\\&=\ P\{X(t_n)<x\,|\,X(t_{n-1})=x_{n-1}\}\end{aligned}\tag{1}$$

则称 $X(t)$ 为 Markov 过程。上式也称随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 具有 Markov 性或无后效性。

若把 $X(t)$ 中参量 $t$ 当作时间，$t_{n-1}$ 作为现在，$t_n$ 就是将来，

而 $t_1,\cdots,t_{n-2}$ 就是过去。则 (1) 式表示当 $X(t)$ 的"现在"已知时，"将来"和"过去"的统计特性无关。Markov 过程 $X(t)$ 可能取到值的全体称为过程的状态空间。$X(t)=x$ 常说成，在时刻 $t$ 过程是在状态 $x$ 中。

对于 Markov 过程 $\{X(t),t\in T\}$ 而言，最重要的概念是转移概率 $P\{s,x;\ t,A\}$，其中 $s<t\in T$，$A$ 是状态空间中的子集，其定义为

$$P\{s,x;\ t,A\}=P\{X(t)\in A|X(s)=x\}$$

特别记

$$F(s,x;\ t,y)=P\{s,x;\ t,(-\infty,y)\} \tag{2}$$

$F(s,x;\ t,y)$ 称为 Markov 过程的转移概率分布函数，显然它具有如下性质

(1) $F(s,x;\ t,y)\geqslant 0$

(2) $F(s,x;\ t,\infty)=1$

(3) $F(s,x;\ t,y)$关于$y$是单调非减和左连续的。

如果 $F(s,x;\ t,y)$ 关于 $y$ 的导数存在，则

$$p(s,x;\ t,y)=\frac{\partial}{\partial y}F(s,x;\ t,y) \tag{3}$$

称为 Markov 过程的转移概率密度。

## 二、二阶矩过程

**定义 2** 若随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 对每个 $t$，$X(t)$ 的均值和方差都存在，则称 $\{X(t),t\in T\}$ 为二阶矩过程。

由定义知，二阶矩过程的均值 $m(t)=EX(t)$ 总是存在的。若令 $\tilde{X}(t)=X(t)-m(t)$，则有

$$m_{\tilde{X}}(t)=E\tilde{X}(t)=0$$

因此今后不妨假设二阶矩过程的均值函数为零。此时协方差函数与相关函数相同。由 Schwarz 不等式，显然有

$$[E|X(s)\overline{X(t)}|]^2 \leqslant E|X(s)|^2 E|X(t)|^2$$

所以由二阶矩过程方差的存在性，证明了二阶矩过程的协方差函数总是存在的。

**定理 1** 二阶矩过程的协方差函数是 Hermite 的，即

$$C(s,t) = \overline{C(t,s)}, \quad s,t \in T \tag{4}$$

若过程 $\{X(t), t \in T\}$ 是实的，则 $C(s,t)$ 是对称的。

**证** $\overline{C(t,s)} = \overline{E[X(t)\overline{X(s)}]}$

$$= E[\overline{X(t)}X(s)] = C(s,t)$$

**定理 2** 对任意的 $t_1,\cdots,t_n \in T$ 和任意的复数 $u_1,\cdots,u_n$，对一切正整数 $n$，二阶矩过程的协方差函数具有非负定性，即

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C(t_i,t_j)u_i\bar{u}_j \geqslant 0$$

**证** $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C(t_i,t_j)u_i\bar{u}_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} E[X(t_i)\overline{X(t_j)}]u_i\bar{u}_j$

$$= E\left[\sum_{i=1}^{n} X(t_i)u_i\right]\overline{\left[\sum_{j=1}^{n} X(t_j)u_j\right]}$$

$$= E\left|\sum_{i=1}^{n} X(t_i)u_i\right|^2 \geqslant 0$$

## 三、严平稳过程与宽平稳过程

**定义 3** 随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 称为是严平稳过程，如果它的有限维分布函数族对时间推移不变。即如果对任意有限个 $t_1,\cdots,t_n \in T$ 和任意的实数 $\tau$，对一切正整数 $n$，都有

$$F(t_1+\tau,\cdots,t_n+\tau;\ x_1,\cdots,x_n)$$

$$= F(t_1,\cdots,t_n;\ x_1,\cdots,x_n) \tag{5}$$

**定义 4** 二阶矩过程 $\{X(t), t \in T\}$ 称为是宽平稳过程，若它的均值函数是常数，且它的协方差函数 $C(s,t)$ 只与 $s-t$ 有关。即

$$m(t)=m$$

$$C(s,t)=B(s-t),\qquad s,t\in T \tag{6}$$

其中 $B(\tau)$ 称为宽平稳过程的协方差函数。

显然，一般的严平稳过程不一定有二阶矩，因而不一定是宽平稳过程。反之宽平稳过程也不一定是严平稳过程。但对 Gauss 过程，严平稳过程与宽平稳过程是一致的。由于宽平稳过程应用极为广泛，受到更多的研究，因此常把宽平稳过程简称为平稳过程。

## 四、正交增量过程

**定义 5**　设 $\{X(t),t\in T\}$ 是零均值二阶矩过程，若对任意的 $t_1<t_2\leqslant t_3<t_4\in T$，有

$$E[X(t_2)-X(t_1)]\overline{[X(t_4)-X(t_3)]}=0 \tag{7}$$

则称 $\{X(t),t\in T\}$ 为正交增量过程。

对于正交增量过程，若 $T$ 为有限区间 $[a,b]$，且规定 $X(a)=0$，此时若取 $t_1=a$，$t_2=t_3=s$，且 $t_4=t>s$，则有

$$E\{X(s)\overline{[X(t)-X(s)]}\}=0$$

对于这类正交增量过程，若定义

$$F(s)=E[X(s)\overline{X(s)}]=E|X(s)|^2 \tag{8}$$

则当 $a\leqslant s\leqslant t\leqslant b$ 时，有

$$\begin{aligned}C(s,t)&=E[X(s)\overline{X(t)}]\\&=E\{X(s)\overline{[X(s)+X(t)-X(s)]}\}\\&=E[X(s)\overline{X(s)}]+E\{X(s)\overline{[X(t)-X(s)]}\}\\&=F(s)\end{aligned}$$

同理，当 $t\leqslant s$ 时有

$$C(s,t)=F(t)$$

因此有