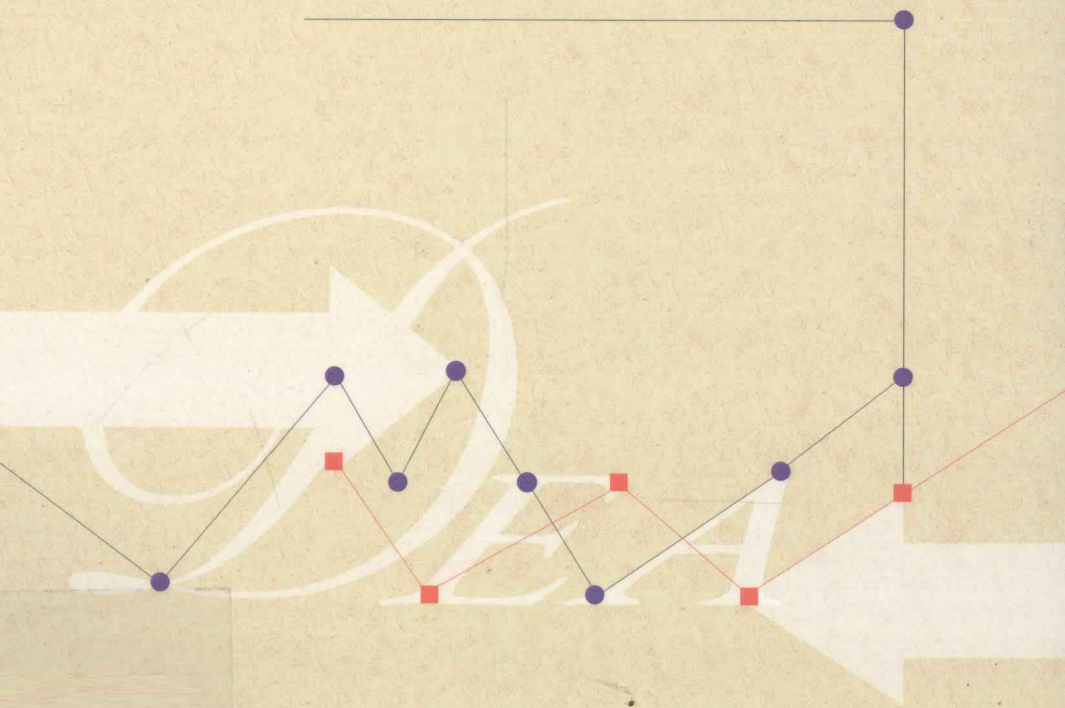



评价相对有效性的 数据包络分析模型

——DEA和网络DEA

魏权龄 / 著



 中国人民大学出版社

评价相对有效性的 数据包络分析模型

——DEA和网络DEA

魏权龄 / 著

中国人民大学出版社
· 北京 ·

图书在版编目 (CIP) 数据

评价相对有效性的数据包络分析模型——DEA 和网络 DEA/魏权龄
著. —北京: 中国人民大学出版社, 2012. 6
ISBN 978-7-300-15939-3

I. ①评… II. ①魏… III. ①运筹学-应用-经济 IV. ①F224.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 119200 号

评价相对有效性的数据包络分析模型

——DEA 和网络 DEA

魏权龄 著

Pingjia Xiangdui Youxiaoxing de Shuju Baoluo Fenxi Moxing

出版发行	中国人民大学出版社		
社 址	北京中关村大街 31 号	邮政编码	100080
电 话	010-62511242 (总编室)	010-62511398 (质管部)	
	010-82501766 (邮购部)	010-62514148 (门市部)	
	010-62515195 (发行公司)	010-62515275 (盗版举报)	
网 址	http://www.crup.com.cn http://www.ttrnet.com (人大教研网)		
经 销	新华书店		
印 刷	涿州市星河印刷有限公司		
规 格	148 mm×210 mm 32 开本	版 次	2012 年 8 月第 1 版
印 张	13.75 插页 1	印 次	2012 年 8 月第 1 次印刷
字 数	364 000	定 价	38.00 元

版权所有 侵权必究

印装差错 负责调换

前 言

数据包络分析 (data envelopment analysis, DEA), 是数学、运筹学、数理经济学、管理科学和计算机科学的一个新的交叉领域, 它是 A. Charnes 和 W. W. Cooper 等人于 1978 年开始创建的, 并被命名为 DEA. DEA 使用数学规划模型 (包括线性规划、多目标规划、具有锥结构的广义最优化、半无限规划、随机规划等), 评价具有多个输入, 特别是多个输出的“部门”或“单位”(称为决策单位 (decision making unit, DMU)) 间的相对有效性 (称为 DEA 有效). 根据对各 DMU 观察的数据, 判断 DMU 是否为 DEA 有效, 本质上是判断 DMU 是否位于生产可能集的“生产前沿面”上. 生产前沿面是经济学中生产函数向多产出情况的一种推广. 使用 DEA 方法和模型可以确定生产前沿面的结构、特征和构造方法, 因此又可将 DEA 看作是一种非参数的统计估计方法; 由于 DEA 的经济背景, 因此, 依据 DEA 方法、模型和理论, 可以直接利用输入和输出数据建立非参数的 DEA 模型, 进行经济分析; 同时, 使用 DEA 对 DMU 进行效率评价时, 可得到很多管理信息. 因此, DEA 领域的研究吸引了众多学者.

在科学研究当中, 某个新的“生长点”发展成为一个研究领域 (或分支), 是需要经过许许多多的人长期共同努力去完成的. 就 DEA 领域来说, 直到 2000 年前后, 众多学者在以下几方面做了一系列奠基性工作:

(i) 完成大量应用的成功案例, 说明 DEA 应用的广泛性和适用性.

(ii) 对 DEA 模型进行扩充和完善. 例如 C^2R 模型之后, 最具代表性的“经典”模型: BC^2 模型, FG 模型和 ST 模型; 加法模型 C^2GS^2 ; 具有无穷多个 DMU 的半无限规划的 DEA 模型 C^2W ; 具有“偏好锥”和“偏袒锥”的 DEA 模型 C^2WH 和综合 DEA 模型; WY 模型; Log -型的 DEA 模型; 随机 DEA 模型; 具有不可控因素的 DEA 模型; 逆 DEA 模型, 等等. 这方面的工作对 DEA 领域来说尤为重要.

(iii) 研究 DEA 模型和方法的经济背景和管理背景, 确立 DEA 在经济学和管理科学中的地位.

(iv) 研究 DEA 所依据的数学理论. 包括凸分析、数学规划、对策论中与 DEA 有关的基础理论研究.

(v) 进行 DEA 模型的计算研究和 DEA 软件的研制. 这方面的工作对于 DEA 方法和模型的实际应用同样是很重要的.

(vi) 使用交形式的生产可能集, 进行数据挖掘 (包括对“海量”DMU 进行效率评价和规模收益评估; 对“海量”DMU 进行“分类”等).

应该特别指出的是: 自 2000 年开始, 在 DEA 领域出现了被称为“网络 DEA”的新的研究方向. 十多年来, 网络 DEA 有了很大进展, 例如: R. Färe 和 S. Grosskopf; H. F. Lewen 和 T. R. Sexton; C. Kao; K. Tone; W. D. Cook 和 Q. Zhu; Q. L. Wei, H. Yan 和 T. S. Chang 等人的具有代表性的工作.

有人称“网络 DEA”是用来“打开黑箱”进行评价的. 实际上, 自 1978 年第一个 DEA 模型出现以来, 就存在着两种不同的看法. 一种看法是只考虑由输入到输出的中间过程和中间环节, 只需使用最初的各项输入数据和输出数据进行相对有效性评价, 因此, 具有模型简单、应用广泛的特点, 被称为“黑箱评价”; 另一种相反的看法是: “黑箱评价”时, 没有考虑由输入到输出的中间过程和中间环节, 没有用到中间的数据, 丢掉了很多信息等的不足, 因此认为应该“打开黑箱”进行评价. 然而, 即使对于相同的网络结构和相同的

数据,由于评价的视角不同,也可以有多种网络 DEA 模型.因此,首先需要回答什么是“打开黑箱进行评价”;其次,建立网络 DEA 模型后,需要对模型进行分析,对评价结果进行分析.例如,如果网络 DMU 不为网络 DEA 有效,能分析出它在哪个阶段(就网络结构而言,即“节点”)不为 DEA 有效,即它在哪个阶段出现了问题.人们经过了十多年对网络 DEA 的理论研究和应用研究,现在已经可以断言:“网络 DEA”无论在方法、理论和模型,还是在应用上,都有广阔的发展前景.

本书是笔者在《评价相对有效性的 DEA 方法——运筹学的新领域》(中国人民大学出版社,1988年)的基础上,扩充而成的一本专著,可以看作是该书的第二版.它和笔者的另外两本与 DEA 有关的专著《数据包络分析(DEA)》(科学出版社,2004年)和《广义最优化理论和模型》(与闫洪合著)(科学出版社,2003年)相比,不同之处是:《数据包络分析(DEA)》虽然也是对《评价相对有效性的 DEA 方法——运筹学的新领域》的扩充,但所扩充的内容仅限于2002年以前的成果.例如,并不包含“交形式的生产可能集”及它在数据挖掘中的应用等,特别是不含“网络 DEA”的内容.而《广义最优化理论和模型》可看作是研究 DEA 的理论基础.

在撰写本书时,考虑到网络 DEA 本身是以 DEA 为基础发展起来的,所以也对经典 DEA 进行了总结和完善,特别着重于对模型及其功能的讨论;书中讨论了某些网络 DEA 模型,也包括对“打开黑箱”的一些学术观点;书中也包括了笔者近期研究的一些新成果.

最后,感谢所有帮助过我的老师、同行、朋友和合作者.同时还要感谢国家自然科学基金 1989—2011 年间,连续对 DEA 研究的支持,以及国家社科基金、教育部人文社科基金的基金支持.感谢中国人民大学出版社对本书的出版给予了大力帮助和支持.

作者

2012年6月

目 录

第 1 章 绪论	1
第 2 章 评价规模有效和技术有效的 C^2R 模型	7
§ 2.1 第一个 DEA 模型 C^2R	7
§ 2.2 具有非阿基米德无穷小的 C^2R 模型	26
§ 2.3 两阶段方法	37
第 3 章 DEA 模型 C^2R 的理论基础	39
§ 3.1 生产可能集 T_{C^2R} 、技术有效、规模有效	39
§ 3.2 (弱) DEA 有效与 (弱) Pareto 的等价性	46
§ 3.3 生产可能集的有效面和弱有效面	56
§ 3.4 决策单元在 (弱) 有效面上的“投影”	64
§ 3.5 输出—DEA 模型 C^2R	71
第 4 章 评价技术有效的 BC^2 模型和 C^2GS^2 模型	79
§ 4.1 输入—DEA 模型 BC^2	79

•••► 评价相对有效性的数据包络分析模型

§ 4.2	输入—DEA 模型 BC^2 的性质	87
§ 4.3	输入—DEA 模型 BC^2 之下有效性的经济含义	92
§ 4.4	Pareto 解和加法模型 C^2GS^2	98
§ 4.5	输出—DEA 模型 BC^2	110
§ 4.6	弱 DEA 有效 (BC^2) 和弱 Pareto	112
第 5 章	DEA 模型 FG, ST 和 WY	117
§ 5.1	DEA 模型 FG	118
§ 5.2	DEA 模型 ST	122
§ 5.3	DEA 模型 WY	126
第 6 章	综合 DEA 模型 GDEA	131
§ 6.1	综合输出—DEA 模型	132
§ 6.2	输出 DEA 模型 C^2R , BC^2 , FG, ST, WY 之间的关系	137
§ 6.3	综合输出 DEA 模型与 Pareto 解	149
§ 6.4	综合输入—DEA 模型	156
§ 6.5	综合输入 DEA 模型与 Pareto 解	163
第 7 章	规模收益和“拥挤”迹象分析	165
§ 7.1	规模收益和“拥挤”的生产函数背景	166
§ 7.2	联合使用输出—模型 FG, ST 和 WY 分析规模 收益和“拥挤”迹象	169
§ 7.3	使用输出—WY 模型分析规模收益和 “拥挤”迹象	174
§ 7.4	使用输出— BC^2 模型分析规模收益	177
§ 7.5	使用输出— C^2R 模型分析规模收益	180
§ 7.6	使用输出—FG 模型分析规模收益	182
§ 7.7	使用输出—ST 模型分析规模收益	184

第 8 章 锥比率的 DEA 模型 C^2WH 及其推广	186
§ 8.1 锥比率的 C^2WH 模型	187
§ 8.2 具有偏好结构的综合 DEA 模型 GDEA	191
§ 8.3 具有凸多面锥的综合 DEA 模型	202
§ 8.4 “偏好锥” W , V 和 U 的含义和使用	206
§ 8.5 “偏袒锥” K 的含义和使用	210
第 9 章 逆 DEA 模型	223
§ 9.1 引论	223
§ 9.2 综合 DEA 模型和它的逆问题	224
§ 9.3 逆 DEA 问题和多目标问题	228
§ 9.4 两种特殊的投入—产出变化形式	234
§ 9.5 数例分析	236
第 10 章 交形式的生产可能集和交形式的 DEA 模型	244
§ 10.1 生产可能集向交形式的转化	246
§ 10.2 交形式生产可能集的转换方法	255
§ 10.3 附录: 求交形式凸多面锥的极方向的方法	262
第 11 章 利用交形式的生产可能集评价规模收益状况	272
§ 11.1 引论	272
§ 11.2 输出—模型 WY 的最优解集合	274
§ 11.3 规模收益评价方法	277
§ 11.4 规模收益的动态性质分析	282
第 12 章 数据挖掘——DEA 评测机	293
§ 12.1 引论	293
§ 12.2 DEA 评测机的理论基础	296
§ 12.3 DEA 评测机	308

第 13 章 数据挖掘——DEA 分类机	315
§ 13.1 引论	315
§ 13.2 DEA 分类机中“可接受域”的公理体系	317
§ 13.3 交形式的“可接受域”和 DEA 分类机	321
§ 13.4 具有偏好结构的 DEA 分类机	326
第 14 章 打开“黑箱”的序贯型网络 DEA 模型	333
§ 14.1 引论	333
§ 14.2 Sexton-Lewis DEA 序贯最优化方法	336
§ 14.3 复合序贯型网络 DEA 模型	340
§ 14.4 网络生产可能集与网络决策单元的投影	344
§ 14.5 “打开黑箱”评价	347
§ 14.6 复合网络 DEA 模型的推广 (举例)	359
§ 14.7 两阶段网络 DEA 模型 KH	364
第 15 章 最优系统设计的网络 DEA 模型	375
§ 15.1 引论	375
§ 15.2 串联型最优网络设计的 DEA 模型	377
§ 15.3 串联型最优网络设计的最佳预算	386
§ 15.4 追求“零结算”的网络系统将产生“拥挤”	391
第 16 章 具有无穷多个决策单元的 DEA 模型及其应用	395
§ 16.1 具有无穷多个决策单元的 DEA 模型	396
§ 16.2 网络 DEA 的生产函数背景	401
§ 16.3 并联形式的网络 DEA 模型	405
§ 16.4 网络 DEA 模型在资金分配与管理中的应用	409
参考文献	419

第 1 章

绪 论

在人们的生产活动和社会活动中，常常会遇到这样的问题：经过一段时间之后，需要对具有相同类型的部门或单位（称为决策单元）进行评价。其评价的依据是决策单元的“输入”数据和“输出”数据。输入数据是指决策单元在某种活动中需要耗费的某些量，例如投入的资金总额、投入的劳动力数量、占地面积等；输出数据是指决策单元在经过输入之后，产生的表明该活动成效的某些量，例如产品的数量、产品的质量、经济效益等。举一个具体的例子，譬如评价高等院校，输入可以是学校的全年投入的资金、教职员工的总人数、教学用房的总面积、各类职称的教师人数等；输出可以是培养博士研究生的人数、硕士研究生的人数、本科生的人数、学生的质量、教师的工作量、学校的科研成果（数量与质量）等。如何根据各决策单元的输入数据和输出数据来评价决策单元的优劣，用 DEA 的术语来讲，就是评价部门（或单位）的相对有效性，这是一个十分重要且具有现实意义的问题。

数据包络分析（data envelopment analysis，简称 DEA），是数学、运筹学、管理科学和计算机科学的一个交叉研究领域，它是

A. Charnes, W. W. Cooper 和 E. Rhodes 为研究上述问题, 于 1978 年创建和命名的(见[1]). 具体地说, DEA 是使用数学规划(包括线性规划, 多目标规划, 半无限规划, 随机规划, 具体锥结构的广义最优化, 等等)建立评价模型, 评价具有多项输入(也可以称“投入”)、多项输出(也可以称“产出”)的“部门”(或“单位”)之间的相对有效性, 称为“DEA 有效”. 在 DEA 领域, 称“部门”(或“单位”)为决策单元(decision making unit), 简记为 DMU. 根据各决策单元的输入数据和输出数据判断是否为 DEA 有效, 本质上是判断该决策单元是否位于生产可能集的“生产前沿面”上. 生产前沿面是生产函数向多产出的情况的一种推广. 生产前沿面是由投入最小、产出最大为目标的 Pareto 最优解构成的面. DEA 具有很强的经济学背景, 用 DEA 理论、模型和方法对决策单元进行有效性评价时, 可以得到很多管理信息. 同时, 直接使用输入数据和输出数据, 可以建立非参数的最优化模型, 以进行分析; 由输入数据和输出数据可以确定出生产前沿面的结构, 因此又可将 DEA 看作是一种非参数的统计估计方法.

Charnes 教授和 Cooper 教授长期合作研究, 开创了诸多学科领域. 关于给新方法命名, Cooper 曾说, 要认真地为新方法取名, 这是我们取得的重要经验. 笔者认为 Charnes 和 Cooper 等人命名的“DEA”(数据包络分析), 精确地表达了 DEA 模型和方法的深刻含义. 即利用输入数据和输出数据(data), 做一个数据包络(envelopment), 通过 DEA 模型进行相对有效性评价. 评价的本质是判断决策单元是否位于包络面(即生产前沿面)上. 最后, 再根据计算结果进行分析(analysis).

DEA 领域的研究, 从深度和广度两方面看, 都已取得了丰富的成果, 不但有大量的理论和应用的论文发表和专著出版(见[17]—[26], [82]—[88]), 而且拓展出了新的研究领域和研究手段, 例如, 对规模收益和“拥挤”迹象的分析(见[36]—[44]); R. Färe 和 S. Grosskopf 于 2000 年发表了题为《网络 DEA》的文章, 使得网

络 DEA 的研究自此蓬勃开展 (见 [64]—[80]); 交形式的生产可能集与交形式的 DEA 模型, 提供了 DEA 研究的一个新的工具 (见 [42], [43], [63]); 将 DEA 用于数据挖掘, 开辟了 DEA 应用的新领域 (见 [56]—[59]), 等等。

本书可看作《评价相对有效性的 DEA 方法——运筹学的新领域》(1988 年版, 见 [82]) 的第二版, 不但包括了 DEA 领域中的经典和基础性的内容, 而且用近一半的篇幅讲述了作者与合作者们近期取得的新的研究成果. 本书共有十六章, 具体内容 (除第 1 章绪论外), 包括以下七个部分:

(一) 四个经典的 DEA 模型 C^2R , BC^2 , FG , ST , 以及 DEA 模型 WY

详细地讨论了 DEA 模型 C^2R 的足够多的性质. 这不仅仅是因为它是第一个 DEA 模型, 更为重要的是, C^2R 的很多性质 (定理), 乃至讨论和证明的技巧, 在 DEA 其他模型的研究中极具代表性, 甚至某些类似的结论, 只要回顾一下 C^2R 模型, 就会不证自明 (见第 2 章和第 3 章), 其中 C^2R 模型是专门用来判断决策单元是否同时为技术有效和规模有效的. BC^2 模型是用来判断决策单元是否为技术有效的. 联合使用 C^2R 和 BC^2 模型, 可以得到“整体效率”对“技术效率”和“规模效率”的分解公式 (见第 4 章).

类似于 C^2R 和 BC^2 , 由公理系统出发, 建立 DEA 模型 FG , ST 和 WY , 其中, WY 模型是可以判断决策单元是否呈现“拥挤”迹象的 (见第 7 章和第 11 章).

(二) 综合 DEA 模型 $GDEA$

通过对上述一些经典 DEA 模型的研究, 可以发现 DEA 模型具有某些本质的共性, 当引进带有取值为 0 和 1 的四个参数后, 便用统一形式给出了综合 DEA 模型 $GDEA$. 该综合 DEA 模型, 不仅已有经典的 DEA 模型 C^2R , BC^2 , FG , ST 以及 WY , 还可引进其他诸多新的 DEA 模型 (见第 6 章). 由综合 DEA 模型出发, 对其性质的统一研究, 避免了对新模型逐一进行重复研究的烦琐.

第 6 章中,详细讨论了上述五个模型之下的(弱)DEA 有效性之间的关系。

第 7 章中,利用第 6 章的结果,联合使用输出 DEA 模型 FG, ST 和 WY,可以评价决策单元的规模收益状况(包括递增、不变、递减和“拥挤”),给出了判别的充分必要条件。第 7 章中,分别对单独使用输出 DEA 模型 C^2R , BC^2 , FG, ST 和 WY 时,弱 DEA 有效决策单元的规模收益的性质,给出了判别的充分必要条件。

(三) 带有“偏好锥”和“偏袒锥”的综合 DEA 模型

当第一个 DEA 模型 C^2R 出现后不久,从事多目标决策的人就曾提出过异议,认为 DEA 模型中没能体现决策者的偏好。对于这个问题,1987 年,出现了在 DEA 领域中,第一个带有偏好结构的 DEA 模型 C^2WH 。本书第 8 章中,除讨论模型 C^2WH 外,还通过引进三个取值为 0 和 1 的参数,用统一形式推广到包有对输入、输出各项指标之间表示重要性的“偏好锥”,以及对决策单元表示“喜好”的“偏袒锥”。同时,详细讨论了“偏好锥”和“偏袒锥”的作用和使用方法(包括具有多面锥的 DEA 模型)。

(四) 逆 DEA 模型

对于综合 DEA 模型 GDEA,通常是通过求 DEA 模型的效率指数,去判断决策单元的弱 DEA 有效性。效率指数反映了决策单元当前的技术状态。现在的问题是:当投入增大后,如果决策单元当前的技术状态(即效率指数)保持不变,如何估计产出的数量。逆 DEA 模型就是解决这个问题一个 DEA 模型。在第 9 章不但讨论了逆 DEA 模型的性质,也讨论了两种生产活动中的具体的 DEA 问题,分别给出了相应的两种特殊的逆 DEA 模型。

(五) 交形式的 DEA 模型和规模收益评价

在经典的 DEA 研究中,都是根据公理系统,直接确定出生产可能集,再由生产可能集得到对应的 DEA 模型,这样得到的生产可能集和 DEA 模型,都是由求和的形式给出的,因此有“和形式”的名称。在使用和形式的 DEA 模型对决策单元进行评价时使用线性规

划计算求解。

“和形式的生产可能集”是凸多面体。凸多面体可以有另外的“交形式”的表示形式，即将生产可能集表示为有限多个线性不等式的“交”，由此可以得到交形式的 DEA 模型（见第 10 章）。

由“和形式”到“交形式”，本质上是提供了一种新的研究手段。例如，在第 11 章中，用交形式的 DEA 模型评价决策单元时，不需要用线性规划的方法（例如，单纯形方法）求解。同时，由交形式的生产可能集可以很容易地评价决策单元的规模收益状况（包括判断是否呈现“拥挤”迹象）。此外，由“交形式”的生产可能集，可以讨论决策单元规模收益的“动态性质”，即评估投入减少时的规模收益状况，以及投入增大时的规模收益状况（见第 11 章）。

此外，在第 12 章和第 13 章，我们将看到，可以用交形式的生产可能集进行数据挖掘。

（六）利用 DEA 进行数据挖掘

数据挖掘是计算机及其应用中极为重要的、发展迅速的领域之一。数据挖掘是从“海量”数据中寻找隐含的数据关系，提取有价值的知识。

“DEA 评测机”（DEA assessment machine）使用 DEA 模型 FG、ST 和 WY 对应的交形式的生产可能集，能够“快速”地评价“海量”决策单元的技术有效性和规模收益状况。“DEA 评测机”中的“机”，在计算机的“机器学习”领域，是“算法”的意思。“DEA 评测机”有别于数据挖掘中已有的一些数据挖掘类型，它是一种新的数据挖掘——对决策单元的“评测”。从计算机应用角度说，它是对数据挖掘的扩充和补充；从 DEA 领域看，它开辟了 DEA 的一个新的应用领域（见第 12 章）。

“分类”是数据挖掘领域的一个重要的内容。本章给出的“DEA 分类机”，是使用 DEA 方法，利用“训练集”（在 DEA 领域中称为“参考集”），按照公理系统得到一个交形式的“可接受域”，根据是否位于“可接受域”中，对“海量”对象进行“快速”分类。此外，也

给出了一个“具有偏好结构的 DEA 分类机”(见第 13 章)。

(七) 网络 DEA 和最优系统设计的 DEA 模型

本书中与网络 DEA 有关的内容有以下三个：

1. 针对具有序贯型的网络结构，给出了一个“复合序贯型网络 DEA 模型”。只需通过一个线性规划的计算求解，就可以判断网络决策单元的网络 DEA 有效性。可以证明：网络决策单元为“网络 DEA 有效”的充分必要条件是：它在每个节点都为弱 DEA 有效；同时，指出若网络决策单元不为网络 DEA 有效时，可判断出它在哪个节点出现了问题（不为弱 DEA 有效）。就此而言，“复合序贯型网络 DEA 模型”是一个真正能“打开黑箱”进行评价的网络 DEA 模型。Kao 等人给出的两阶段网络 DEA 模型 KH，也是一个真正能“打开黑箱”的网络 DEA 模型（见第 14 章）。

2. 针对具有串联形式的网络结构，当最初阶段各项投入的“价格”和最终阶段各项产出“价格”给定的情况下，参照网络决策单元的数据，构造了“最优系统设计的网络 DEA 模型”。当预算给定后，能确定出系统的最佳投入和产出；在预算给定之前，能确定出系统的最佳预算值。同时指出：对预算的“零结算”要求，将会使利润函数产生“拥挤”迹象（见第 15 章）。

3. 第 16 章的内容并不是全面介绍具有无穷多个决策单元的 DEA 模型 C^2W ，而是利用具有无穷多个决策单元的 DEA 模型，为网络 DEA 提供一些生产函数的背景。例如，本书第 14 章中的“复合序贯型网络 DEA 模型”，“关联形式的网络 DEA 模型”（见 [74]），网络 DEA 模型在资金管理中的应用等。

第 2 章

评价规模有效和技术有效的 C²R 模型

§ 2.1 第一个 DEA 模型 C²R

假设有 n 个具有可比性的部门或单位（称为决策单元，简记为 DMU），每个 DMU 都有 m 种类型的“输入”（或称“投入”，表示 DMU 对“资源”的耗费量，例如 m 种生产要素的投入），以及 s 种类型的“输出”（或称“产出”，表示当消耗了“资源”之后，表明“成效”的量，例如产品的数量、质量、经济效益等）。这 n 个 DMU 的投入数据和产出数据（data）由表 2-1 给出，其中（ $i=1, \dots, m; r=1, \dots, s; j=1, \dots, n, m \geq 1, s \geq 1$ ）

x_{ij} = DMU- j 对第 i 种投入的数量， $x_{ij} > 0$

y_{rj} = DMU- j 对第 r 种产出的数量， $y_{rj} > 0$

v_i = 对第 i 种投入的一种度量（或表示重要性的“权”）

u_r = 对第 r 种产出的一种度量（或表示重要性的“权”）

x_{ij} 和 y_{rj} 为已知数据，它是根据历史的资料或预测得到的。 v_i, u_r 为变量。