全国高校数学教材同步辅导及考研复习用书

高等数学 [同济·六版]

习题全解与考研指导

以题为纲·系统分类

名师辅导·指点迷津

习题全解·精讲精练

知识框架·提纲挈领

下册

主编：张 宇 李擂

主审：蔡燧林 张伟

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高等数学(同济六版)习题全解与考研指导

（下册）

主编　张　宇　李　播

安徽大学图书馆
* 藏　书 *
www.lib.ahu.edu.cn

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

版权专有　侵权必究

图书在版编目（CIP）数据

高等数学（同济六版）习题全解与考研指导/张宇，李擂主编.—北京：北京理工大学出版社，2012.1

ISBN 978-7-5640-5462-5

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①张…②李…　Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第277912号

出版发行/北京理工大学出版社
社　　址/北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编/100081
电　　话/（010）68914775（总编室）　68944990（批销中心）　68911084（读者服务部）
网　　址/http：//www.bitpress.com.cn
经　　销/全国各地新华书店
印　　刷/三河市文阁印刷厂
开　　本/787毫米×1092毫米　1/16
印　　张/15.75
字　　数/340千字
版　　次/2012年1月第1版　2012年1月第1次印刷　　责任校对/陈玉梅
定　　价/22.80元　　责任印制/边心超

图书出现印装质量问题，本社负责调换

前言

致立志学好大学数学、立志考研的同学们

一、给同学们说几句体己话

此时此刻，我坐在长沙爱晚亭对面的房间里，给这本《高等数学(同济六版)习题全解与考研指导》写前言. 刚刚给新一届的考研学生讲完考研数学的指导课程，其实心情很复杂.

以往来说，考研应该是大三学生的话题；如今而言，今天的课堂里，竟坐着很多大二的学生，还有几位大一新生(他们还听不懂什么是函数极限的计算). 我称这些同学是"未雨绸缪"型的选手，是考上研究生的"苗子". 现在考研竞争之激烈，日趋白热化，年轻的学子们，想考上一个更好的学校，更有前途的专业，为实现自己的人生价值而迈上一个更高的台阶，确实不容易. 一方面，我很体谅甚至心疼他们，这么早就要承担起考研的任务；另一方面，我更支持并且敬佩他们，因为他们清楚地知道前方的道路荆棘丛生、绝不平坦，知道自己肩上的责任，知道什么叫"十年磨一剑". 一个年轻人，要为了自己的理想努力拼搏，必须要有充足的时间做保证.

而在这条拼搏之路上，最让人头疼的往往就是数学. 正所谓：对于考研，得考研数学者得天下. 我要补充一句，对于考研数学，得高等数学者得天下. 现在的考研，高等数学分值最高，难度最大，特别能够区分考生. 所以，想要考研成功者，必须啃下高等数学这块"硬骨头".

二、介绍本书

一直有同学问：学好考研高等数学，用哪本书好？虽然考研数学没有指定教材，全国的高等数学教材又五花八门，百家争鸣，但是值得关注的一本书是：同济大学数学系编写的《高等数学(第六版)》. 这本书是全国首批示范性教材，是最接近考研数学的一本权威教材. 我建议同学们用这本书做大学学习和考研复习之用.

怎么读数学书？大家知道，读数学书，不像读小说. 数学书读得好坏，得通过做题去检验. 做什么题？就做《高等数学(第六版)》的课后习题. 应广大同学要求，我们组织了一批在本科教学一线和考研辅导一线的专家老师，共同编写了这本《高等数学(同济六版)习题全解与考研指导》.

本书有如下特点：

第一，有知识网络图. 本书在每一章的题解前，给同学们列出了本章学习的知识网络图，并精要地指出本章学习的重点和难点.

第二，有详细的习题全解. 本书将同济大学《高等数学(第六版)》的课后习题做了逐题的全面解析，其中很多题目给出了多种解法.

第三，有考研考点总结和历年考研真题解析. 本书在题解之后，给出了本章的本科学习和考研接轨的知识点总结，并精选历年考研真题，给同学们学习复习完本章后，做自测之用. 使同学们感受考研水平，拔高解题能力，顺利过渡到考研，与考研无缝接轨.

总之，本书将会给有志于学好大学高等数学、在考研道路上先行一步的同学们提供较大帮助.

三、感谢与祝福

本书由我做总主编，但本书凝结了众多老师的辛勤汗水，是集体智慧的结晶. 如果读了该书的同学能够有所收获，提高了数学解题能力，为考研奠定了坚实的基础，那么功劳是诸位老师的；如果本书有不足甚至纰漏之处，那么责任是我的，希望大家批评指正.

本书编写过程中，参考了同济大学数学系编写的《高等数学(第六版)》、教育部考试中心编写的《考研数学考试大纲》等，感谢诸多相关作者的辛勤工作，感谢各位编辑老师，感谢北京理工大学出版社. 更感谢同学们，是你们的上进心和拼搏意志触动着奋战在教学一线的老师们，让我们共同努力，为同学们的美好未来奋勇向前.

本书答疑地址在我的新浪微博：http://weibo.com/zhangyumaths.

预祝同学们赢在起跑线上！

张　宇

2011 年秋于长沙　爱晚亭

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目录

高等数学(同济六版)习题全解与考研指导(下册)

第八章　空间解析几何与向量代数

知识结构图

- 向量
  - 基本概念
    - 几何意义
    - 坐标表示
    - 模、方向角、投影
  - 运算
    - 线性运算
    - 数量积
    - 向量积
    - 混合积
- 曲线与曲面
  - 曲面
    - 概念与基本表示方法
    - 特殊曲面
      - 旋转曲面
      - 柱面
      - 二次曲面
  - 曲线
    - 曲线的方程
      - 一般方程
      - 参数方程
    - 曲线的投影
- 直线与平面
  - 平面
    - 概念
    - 平面方程
      - 点法式
      - 一般方程
    - 两平面的夹角
  - 直线
    - 概念
    - 直线方程
      - 一般方程
      - 标准式
      - 参数式
    - 两直线的夹角
    - 直线与平面的夹角

本章主要学习三维空间中点、直线、平面、曲线以及曲面的性质与表示方法，是整个多元函数微积分的基础.

习题全解

习题8－1　向量及其线性运算

1. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$. 试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

解　$2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}=2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c})-3(-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$

$=5\boldsymbol{a}-11\boldsymbol{b}+7\boldsymbol{c}$.

2. 如果平面上一个四边形的对角线互相平分，试用向量证明此四边形是平边四边形.

证　设四边形 $ABCD$ 的两条对角线 AC 与 BD 交于 M 点(如图8－1所示). 依题意有

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MC},\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{MB}.$$

因为 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{DC}$,

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BC}$.

所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

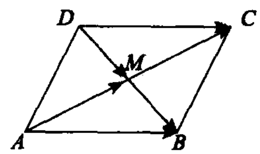

图8－1

3. 把△ABC 的 BC 边五等分，设分点依次为 D_1,D_2,D_3,D_4，再把各分点与点 A 连接. 试以 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$ 表示向量 $\overrightarrow{D_1A}$，$\overrightarrow{D_2A}$，$\overrightarrow{D_3A}$ 和 $\overrightarrow{D_4A}$.

证　如图8－2所示，根据题意知

$$\overrightarrow{BD_1}=\frac{1}{5}\boldsymbol{a},\overrightarrow{D_1D_2}=\frac{1}{5}\boldsymbol{a},\overrightarrow{D_2D_3}=\frac{1}{5}\boldsymbol{a},\overrightarrow{D_3D_4}=\frac{1}{5}\boldsymbol{a}.$$

故

$$\overrightarrow{D_1A}=-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD_1})=-\frac{1}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}.$$

$$\overrightarrow{D_2A}=-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD_2})=-\frac{2}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}.$$

$$\overrightarrow{D_3A}=-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD_3})=-\frac{3}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}.$$

$$\overrightarrow{D_4A}=-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD_4})=-\frac{4}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}.$$

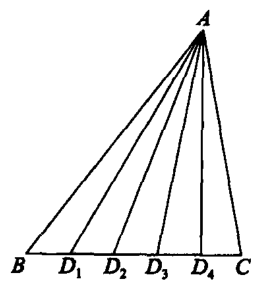

图8－2

4. 已知两点 $M_1(0,1,2)$ 和 $M_2(1,-1,0)$. 试用坐标表示式表示向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 及 $-2\overrightarrow{M_1M_2}$.

解　$\overrightarrow{M_1M_2}=(1-0,-1-1,0-2)=(1,-2,-2)$.

$-2\overrightarrow{M_1M_2}=-2(1,-2,-2)=(-2,4,4)$.

5. 求平行于向量 $\boldsymbol{a}=(6,7,-6)$ 的单位向量.

解　$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{6^2+7^2+(-6)^2}=11$.

故平行于向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量为

$$\pm\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\pm\frac{\boldsymbol{a}}{11}=\pm\frac{1}{11}\{6,7,-6\}=\pm\left\{\frac{6}{11},\frac{7}{11},\frac{-6}{11}\right\}.$$

6. 在空间直角坐标系中，指出下列各点在哪个卦限？

$$A(1,-2,3),B(2,3,-4),C(2,-3,-4),D(-2,-3,1).$$

解　A 点在第四卦限，B 点在第五卦限，C 点在第八卦限，D 点在第三卦限.

7. 在坐标面上和在坐标轴上的点的坐标各有什么特征？指出下列各点的位置：

$$A(3,4,0),B(0,4,3),C(3,0,0),D(0,-1,0).$$

解:在 yOz 面上,点的横坐标 $x=0$；

在 zOx 面上,点的纵坐标 $y=0$；

在 xOy 面上,点的竖坐标 $z=0$.

在 x 轴上,点的横、竖坐标均为 0,即 $y=z=0$；

在 y 轴上,点的横、竖坐标均为 0,即 $z=x=0$；

在 z 轴上,点的横、纵坐标均为 0,即 $x=y=0$.

A 在 xOy 面上,B 在 yOz 面上,C 在 x 轴上,D 在 y 轴上.

8. 求点(a,b,c)关于(1)各坐标面；(2)各坐标轴；(3)坐标原点的对称点的坐标.

解　(1)点(a,b,c)关于 xOy 面的对称点为$(a,b,-c)$；关于 yOz 面的对称点是$(-a,b,c)$；关于 zOx 面的对称点为$(a,-b,c)$.

(2)点(a,b,c)关于 x 轴的对称点是$(a,-b,-c)$；关于 y 轴的对称点是$(-a,b,-c)$；关于 z 轴的对称点是$(-a,-b,c)$.

(3)点(a,b,c)关于坐标原点的对称点是$(-a,-b,-c)$.

9. 自点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$分别作各坐标面和各坐标轴的垂线,写出各垂足的坐标.

解　答案如图 8—3 所示.

10. 过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$分别作平行于 z 轴的直线和平行于 xOy 面的平面,问在它们上面的点的坐标各有什么特点?

解　如图 8—4 所示,过 P_0 且平行于 z 轴的直线 l 上的点的坐标的特点是:它们的横坐标与纵坐标均相同.

而过点 P_0 且平行于 xOy 面的平面 π 上的点的坐标的特点是:它们的纵坐标 z_0 均相同.

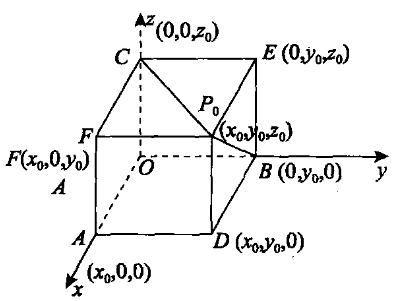

图 8—3

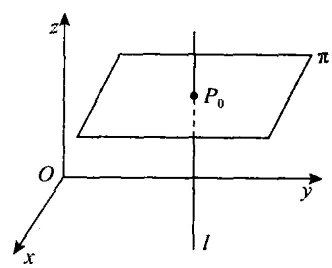

图 8—4

11. 一边长为 a 的立方体放置在 xOy 面上,其底面的中心在坐标原点,底面的顶点在 x 轴和 y 轴上,求它各顶点的坐标.

解　如图 8—5 所示,已知 $AB=a$,故 $OA=OB=\frac{\sqrt{2}}{2}a$,

于是各顶点的坐标分别为 $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,0\right)$,$B\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}a,0\right)$,

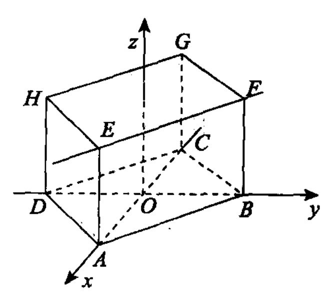

图 8—5

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

$C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,0\right)$,$D\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}a,0\right)$,$E\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,a\right)$, $F\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}a,a\right)$, $G\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,a\right)$, $H\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}a,a\right)$.

12. 求点 $M(4,-3,5)$ 到各坐标轴的距离.

解 点 M 到 x 轴的距离 $d_1=\sqrt{(-3)^2+5^2}=\sqrt{34}$,点 M 到 y 轴的距离 $d_2=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$,点 M 到 z 轴的距离 $d_3=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=5$.

13. 在 yOz 面上,求与三点 $A(3,1,2)$,$B(4,-2,-2)$ 和 $C(0,5,1)$ 等距离的点.

解 在 yOz 面上,设点 $P(0,y,z)$ 与 A,B,C 三点等距离,即

$$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{PB}|^2=|\overrightarrow{PC}|^2,$$

故
$$\begin{cases}3^2+(y-1)^2+(z-2)^2=(y-5)^2+(z-1)^2,\\4^2+(y+2)^2+(z+2)^2=(y-5)^2+(z-1)^2,\end{cases}$$

解方程组,得 $y=1,z=-2$. 故所求点为$(0,1,-2)$.

14. 试证明以三点 $A(4,1,9)$,$B(10,-1,6)$,$C(2,4,3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

证 由$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(10-4)^2+(-1-1)^2+(6-9)^2}=7$,

$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(2-4)^2+(4-1)^2+(3-9)^2}=7,$$

$$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(2-10)^2+(4+1)^2+(3-6)^2}=\sqrt{98}=7\sqrt{2},$$

知$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$及$|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2$. 故$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

15. 设已知两点 $M_1(4,\sqrt{2},1)$ 和 $M_2(3,0,2)$. 计算向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的模、方向余弦和方向角.

解 因为$\overrightarrow{M_1M_2}=\{-1,-\sqrt{2},1\}$,所以模为

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{2})^2+1^2}=2;$$

方向余弦为 $\cos\alpha=-\frac{1}{2},\cos\beta=-\frac{\sqrt{2}}{2},\cos\gamma=\frac{1}{2}$;

方向角为 $\alpha=\frac{2}{3}\pi,\beta=\frac{3}{4}\pi,\gamma=\frac{\pi}{3}$.

16. 设向量的方向余弦分别满足(1)$\cos\alpha=0$;(2)$\cos\beta=1$;(3)$\cos\alpha=\cos\beta=0$. 问这些向量与坐标轴或坐标面的关系如何?

解 (1)由 $\cos\alpha=0$ 知 $\alpha=\frac{\pi}{2}$,故向量垂直于 x 轴,平行于 yOz 面.

(2)由 $\cos\beta=1$ 知 $\beta=0$,故向量与 y 轴同向,垂直于 xOz 面.

(3)由 $\cos\alpha=\cos\beta=0$ 知 $\alpha=\beta=\frac{\pi}{2}$,故向量垂直于 x 轴和 y 轴,即与 z 轴平行,垂直于 xOy 面.

17. 设向量 $\boldsymbol{r}$ 的模是 4,它与轴 u 的夹角是 $60°$,求 $\boldsymbol{r}$ 在轴 u 上的投影.

解 已知$|\boldsymbol{r}|=4$,$\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{r}=|\boldsymbol{r}|\cos\theta=4\cdot\cos 60°=4\times\frac{1}{2}=2$.

18. 一向量的终点在点 $B(2,-1,7)$ 上，它在 x 轴，y 轴和 z 轴上的投影依次为 $4,-4$ 和 7. 求这个向量的起点 A 的坐标.

解 设 A 点坐标为 (x,y,z)，则

$$\overrightarrow{AB}=(2-x,-1-y,7-z),$$

由题意知
$$2-x=4,-1-y=-4,7-z=7,$$

故 $x=-2,y=3,z=0$，因此 A 点坐标为 $(-2,3,0)$.

19. 设 $\boldsymbol{m}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k},\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{p}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$. 求向量 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}$ 在 x 轴上的投影及在 y 轴上的分向量.

解
$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}\\&=4(3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k})+3(2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k})-(5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k})\\&=13\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+15\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

$\boldsymbol{a}$ 在 x 轴上的投影为 13，在 y 轴上的分向量为 $7\boldsymbol{j}$.

习题 8－2 数量积 向量积 *混合积

1. 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，求：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$；(2) $(-2\boldsymbol{a})\cdot 3\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}\times 2\boldsymbol{b}$；(3) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦.

解 (1)
$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(3,-1,-2)\cdot(1,2,-1)\\&=3\times1+(-1)\times2+(-2)\times(-1)=3,\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\3&-1&-2\\1&2&-1\end{vmatrix}=(5,1,7).$$

(2) $(-2\boldsymbol{a})\cdot 3\boldsymbol{b}=-6(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=-6\times3=-18$,

$\boldsymbol{a}\times 2\boldsymbol{b}=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=2(5,1,7)=(10,2,14)$.

(3)
$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{3}{\sqrt{3^2+(-1)^2+(-2)^2}\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}$$
$$=\frac{3}{\sqrt{14}\sqrt{6}}=\frac{3}{2\sqrt{21}}.$$

2. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为单位向量，且满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

解 已知 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1,\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，故 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=0$.

即 $|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=0$.

因此 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\frac{1}{2}(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2)=-\frac{3}{2}$.

3. 已知 $M_1(1,-1,2),M_2(3,3,1)$ 和 $M_3(3,1,3)$. 求与 $\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{M_2M_3}$ 同时垂直的单位向量.

解 记与 $\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{M_2M_3}$ 同时垂直的单位向量为 $\pm\boldsymbol{e}^{\circ}$.

因为 $\overrightarrow{M_1M_2}=(2,4,-1),\overrightarrow{M_2M_3}=(0,-2,2)$，

$$\overrightarrow{M_2M_3}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}=(6,-4,4),$$

$$=\pm\frac{(6,-4,-4)}{\sqrt{6^2+(-4)^2+(-4)^2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{17}}(3,-2,-2).$$

4. 设质量为 100kg 的物体从点 $M_1(3,1,8)$ 沿直线移动到点 $M_2(1,4,2)$，计算重力所做的功(长度单位为 m，重力方向为 z 轴负方向).

解 $\overrightarrow{M_1M_2}=(1-3,4-1,2-8)=(-2,3,-6)$，

$\boldsymbol{F}=(0,0,-100\times 9.8)=(0,0,-980)$，

$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}=(0,0,-980)\cdot(-2,3,-6)=5\ 880(\mathrm{J})$.

5. 在杠杆的一侧与点支 O 的距离为 x_1 的点 P_1 处，有一个与 $\overrightarrow{OP_1}$ 夹角为 θ_1 的力 $\boldsymbol{F}_1$；在 O 的另一侧与点 O 的距离为 x_2 的点 P_2 处，有一个与 $\overrightarrow{OP_2}$ 夹角为 θ_2 的力 $\boldsymbol{F}_2$(图8－6). 问 $\theta_1,\theta_2,x_1,x_2,|\boldsymbol{F}_1|$、$|\boldsymbol{F}_2|$ 符合怎样的条件才能使杠杆保持平衡?

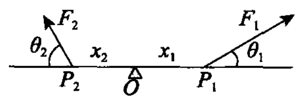

图 8－6

解 有固定转轴的物体的平衡条件是力矩的代数和为零. 两力矩分别为 $x_1|\boldsymbol{F}_1|\sin\theta_1$ 与 $x_2|\boldsymbol{F}_2|\sin\theta_2$，要使杠杆平衡，必须满足以下条件：

$$|\boldsymbol{F}_1|x_1\sin\theta_1=|\boldsymbol{F}_2|x_2\sin\theta_2.$$

6. 求向量 $\boldsymbol{a}=(4,-3,4)$ 在向量 $\boldsymbol{b}=(2,2,1)$ 上的投影.

解 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{(4,-3,4)\cdot(2,2,1)}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\dfrac{6}{3}=2.$

7. 设 $\boldsymbol{a}=(3,5,-2)$，$\boldsymbol{b}=(2,1,4)$，问 λ 与 μ 有怎样的关系，能使得 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 z 轴垂直?

解 若要向量 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 z 轴垂直，只需 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{k}=\{0,0,1\}$ 垂直即可，所以 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 z 轴垂直的充要条件是

$$(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{k}=\{3\lambda+2\mu,5\lambda+\mu,-2\lambda+4\mu\}\cdot\{0,0,1\}=0$$

$$\Leftrightarrow\quad -2\lambda+4\mu=0\Leftrightarrow\lambda=2\mu.$$

8. 试用向量证明直径所对的圆周角是直角.

证明 如图 8－7 所示，设 AB 是圆 O 的直径，C 点在圆周上，要证 $\angle C=90^\circ$，只要证明 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ 即可. 而

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}&=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC})\\&=(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{AO})(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{AO})\\&=|\overrightarrow{OC}|^2-|\overrightarrow{AO}|^2=0,\end{aligned}$$

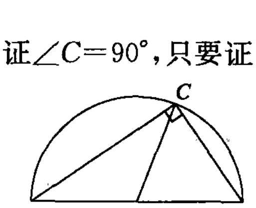

图 8－7

所以 $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}$，即 $\angle C=90^\circ$.

9. 已知向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$，计算：

(1) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$；(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；(3) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$.

解 (1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(2,-3,1)\cdot(1,-1,3)=8$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=(2,-3,1)\cdot(1,-2,0)=8$，

故 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}=8(1,-2,0)-8(1,-1,3)=(0,-8,-24)$

$=-8\boldsymbol{j}-24\boldsymbol{k}.$

(2)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\3&-4&4\\2&-3&3\end{vmatrix}=-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}.$$

(3)$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}2&-3&1\\1&-1&3\\1&-2&0\end{vmatrix}=2.$$

10. 已知$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{k}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，求$\triangle OAB$的面积.

解 由向量几何定义知：

$|a\times b|$为以a,b为邻边的平行四边形的面积，得$\triangle OAB$的面积为$\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|$，

而$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&0&3\\0&1&3\end{vmatrix}=-3\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},$$

可得 $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\sqrt{19}$，所以$\triangle OAB$的面积$=\frac{\sqrt{19}}{2}$.

11. 已知$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，$\boldsymbol{c}=(c_x,c_y,c_z)$，试利用行列式的性质证明

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}.$$

证 $$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}b_x&b_y&b_z\\a_x&a_y&a_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\\a_x&a_y&a_z\end{vmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=-\begin{vmatrix}c_x&c_y&c_z\\b_x&b_y&b_z\\a_x&a_y&a_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}c_x&c_y&c_z\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}.$$

12. 试用向量证明不等式：

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\geqslant|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|,$$

其中a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3为任意实数，并指出等号成立的条件.

证明 设向量$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$.

由$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$知，$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$，从而

$$|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|\leqslant\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2},$$

当a_1,a_2,a_3与b_1,b_2,b_3成比例，即$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$时，上述等式成立.

习题8－3　曲面及其方程

1. 一动点与两定点(2,3,1)和(4,5,6)等距离,求这动点的轨迹方程.

解　设动点为$M(x,y,z)$,由题意知

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2}=\sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2+(z-6)^2},$$

经整理得　$4x+4y+10z-63=0$.

2. 建立以点(1,3,－2)为球心,且通过坐标原点的球面方程.

解　由题可知,球的半径为

$$R^2=(0-1)^2+(0-3)^2+(0+2)^2=14,$$

从而所求球面方程为$(x-1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=14$.

3. 方程$x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z=0$表示什么曲面?

解　将已知方程整理成

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=(\sqrt{6})^2,$$

所以此方程表示以(1,－2,－1)为球心,以$\sqrt{6}$为半径的球面.

4. 求与坐标原点O及点(2,3,4)的距离之比为1∶2的点的全体所组成的曲面的方程,它表示怎样的曲面?

解　设动点坐标为(x,y,z),根据题意有

$$\frac{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}}{\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2}}=\frac{1}{2},$$

化简整理得　$$\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+(y+1)^2+\left(z+\frac{4}{3}\right)^2=\left(\frac{2}{3}\sqrt{29}\right)^2.$$

它表示以$\left(-\frac{2}{3},-1,-\frac{4}{3}\right)$为球心,以$\frac{2}{3}\sqrt{29}$为半径的球面.

5. 将xOz坐标面上的抛物线$z^2=5x$绕x轴旋转一周,求所生成的旋转曲面的方程.

解　曲线$\begin{cases}F(x,y)=0\\y=0\end{cases}$绕$x$轴旋转所得曲面方程为$F(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$.

所以zOx坐标面上的抛物线$z^2=5x$绕x轴旋转一周所生成的旋转曲面的方程为:

$$y^2+z^2=5x.$$

6. 将xOz坐标面上的圆$x^2+z^2=9$绕z轴旋转一周,求所生成的旋转曲面的方程.

解　由题设知,曲线$\begin{cases}x^2+z^2=9\\y=0\end{cases}$绕$z$轴旋转一周所形成的旋转曲面方程为$(\pm\sqrt{x^2+y^2})^2+z^2=9$,故所求曲面方程为$x^2+y^2+z^2=9$,它是圆心在原点且半径为3的球面.

7. 将xOy坐标面上的双曲线$4x^2-9y^2=36$分别绕x轴及y轴旋转一周,求所生成的旋转曲面的方程.

解　将xOy坐标面上的双曲线$4x^2-9y^2=36$绕x轴旋转一周所生成的旋转曲面方程为

$$4x^2-9(y^2+z^2)=36,$$

绕 y 轴旋转一周所生成的旋转曲面方程为　$4(x^2+z^2)-9y^2=36$.

8. 画出下列各方程所表示的曲面.

(1) $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$;　　(2) $-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$;

(3) $\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$;　　(4) $y^2-z=0$;　　(5) $z=2-x^2$.

解　(1)如图 8—8(1)所示；　(2)如图 8—8(2)所示；　(3)如图 8—8(3)所示；
(4)如图 8—8(4)所示；　(5)如图 8—8(5)所示.

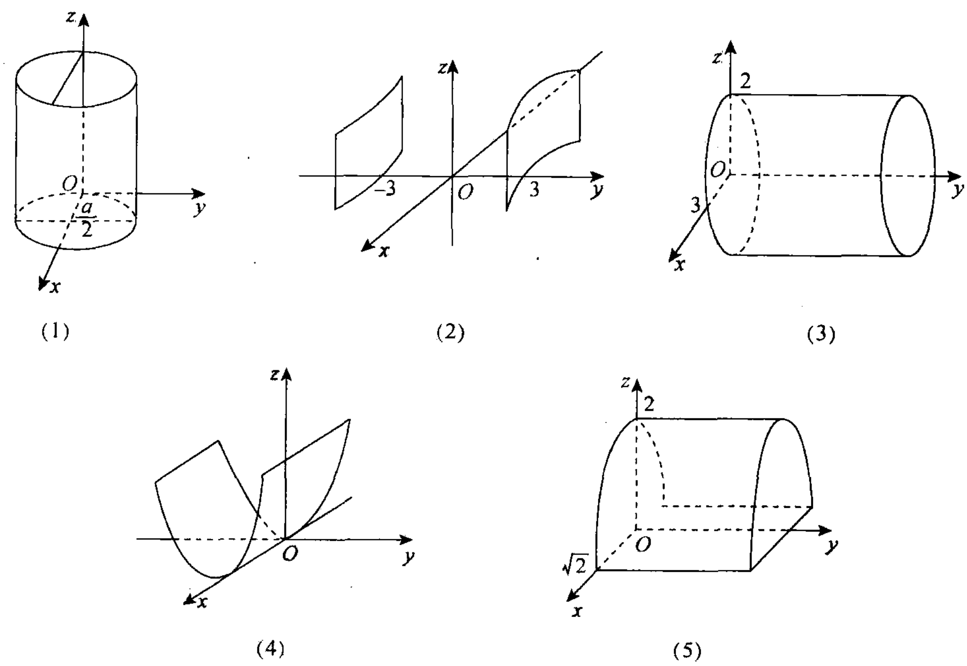

图 8—8

9. 指出下列方程在平面解析几何中和在空间解析几何中分别表示什么图形.

(1) $x=2$;　　(2) $y=x+1$;　　(3) $x^2+y^2=4$;　　(4) $x^2-y^2=1$.

解　(1) $x=2$ 在平面解析几何中表示平行于 y 轴的一条直线，在空间解析几何中表示与 yOz 面平行的平面.

(2) $y=x+1$ 在平面解析几何中表示斜率及在 y 轴上的截距都为 1 的一条直线，在空间解析几何中表示平行于 z 轴的平面.

(3) $x^2+y^2=4$ 在平面解析几何中表示圆心在原点，半径为 2 的圆，在空间解析几何中表示母线平行于 z 轴，准线为 $\begin{cases}x^2+y^2=4\\ z=0\end{cases}$ 的圆柱面.

(4) $x^2-y^2=1$ 在平面解析几何中表示以 x 轴为实轴，y 轴为虚轴的双曲线，在空间解析几何中表示母线平行于 z 轴，准线为 $\begin{cases}x^2-y^2=1\\ z=0\end{cases}$ 的双曲柱面.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com