普通高等教育“十二五”规划教材

XIANXING DAISHU

线性代数

青岛科技大学数学系 编

化学工业出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

线性代数

青岛科技大学数学系 编

化学工业出版社

·北京·

本书是普通高等教育“十二五”规划教材。

全书共分为6章，第1章至第5章为线性代数理论知识部分，主要包括行列式、矩阵、向量与线性方程组、相似矩阵和二次型等内容；第6章为线性代数的应用以及Matlab实现。

本书可作为普通高等学校工科、管理、财经及非数学类理科专业的教材，也可供工程技术人员或科技人员学习参考。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/青岛科技大学数学系编．—北京：化学工业出版社，2011.12

普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-122-12829-4

Ⅰ．线…　Ⅱ．青…　Ⅲ．线性代数-高等学校-教材　Ⅳ．O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第237402号

责任编辑：满悦芝　　文字编辑：荣世芳

责任校对：战河红　　装帧设计：尹琳琳

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街13号　邮政编码100011）

印　　刷：北京市振南印刷有限责任公司

装　　订：三河市宇新装订厂

710mm×1000mm　1/16　印张10½　字数203千字　2012年3月北京第1版第1次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899

网　　址：http：//www.cip.com.cn

凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：18.00元

前 言

线性代数是高等数学的后继课程，是高等院校非数学专业必修的一门重要基础课，是从解线性方程组和讨论二次方程的图形等问题而发展起来的一门数学学科。线性代数介绍代数学中线性关系的经典理论，它的基本概念、理论和方法具有较强的逻辑性、抽象性。通过学习该课程使学生掌握线性代数的基本理论与基本方法，培养学生较强的运算能力、抽象思维能力、逻辑推理能力和归纳判断能力，培养学生运用所学知识去分析问题、建立数学模型以及利用计算机解决实际问题的能力和意识，积累一定的运用计算机解决实际问题的实践经验。

本教材分两个部分。第 1 章至第 5 章为线性代数理论知识部分，主要包括行列式、矩阵、向量与线性方程组、相似矩阵和二次型等内容；第 6 章为线性代数的应用以及 Matlab 实现。

本教材具有以下特点：①将线性代数的基本思想和方法融入各部分内容，做到科学性与通俗性相结合，在内容的处理上做到由具体到一般，由直观到抽象，由浅入深，循序渐进。②为了更好地培养学生分析问题、解决实际问题的能力，编者编写了“线性代数的应用以及 Matlab 实现”一章，更好地突出了应用性，提高学生的学习兴趣。③在例题和习题的选配上着力使学生理解怎样用基本概念和基本方法解决实际问题，注意例题的示范性和多样性，以激发学生的学习兴趣，拓宽知识面。④对每章的重点内容和基本方法做了归纳总结，每章配备适量的习题，书后有习题提示和参考答案。

本书第 1 章由江莉执笔，第 2 章由赵立宽执笔，第 3 章由李博执笔，第 4 章由孙绍权执笔，第 5 章由李秀丽执笔，第 6 章由邢建民执笔，各章节习题由翟富菊执笔。李秀丽和田保光对初稿进行了修改校对。全书由梁希泉和田保光审稿并定稿。

本书的出版得到了青岛科技大学教务处的资助，化学工业出版社的鼎力相助，以及数理学院各位领导和同事的关心和支持，在此一并表示感谢。

由于编者的水平和时间有限，不妥之处在所难免，敬请读者批评指正。

编者

2012 年 1 月于青岛科技大学

目　录

1 行 列 式

本章主要介绍行列式的定义、性质、计算方法及解线性方程组的克莱姆法则.

1.1 行列式的定义

1.1.1 二阶行列式和三阶行列式

引例 求解二元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2, \end{cases}$ (1)

用消元法解此线性方程组得到

$$\begin{matrix}(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2 \\ (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}\end{matrix},$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，方程组（1）有唯一解

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ x_2=\dfrac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{cases}. \tag{2}$$

可以看到，x_1 和 x_2 的分母都等于 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，它是由方程组（1）的系数所确定的。如果将方程组（1）的系数按原来的位置排成两行两列（横排称行，竖排称列）的方表 $\begin{matrix} a_{11} & & a_{12} \\ & \times & \\ a_{21} & & a_{22} \end{matrix}$，可以看出 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 就是表中用实线表示的对角线（称为主对角线）上两个数的乘积减去用虚线表示的对角线（称为副对角线）上的两个数的乘积所得的差.

用记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 表示 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，即定义 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称为二阶行列式，其中 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 称为这个行列式的第 i 行第 j 列的元素.

由二阶行列式的定义，式（2）中的分子也可用二阶行列式表示，即

$$b_1a_{22}-b_2a_{12}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}，a_{11}b_2-a_{21}b_1=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

方程组（1）的系数所组成的行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$称为方程组（1）的系数行列式，当$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$时，方程组（1）的唯一解可用行列式表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

其中分母 D 是方程组（1）的系数行列式．x_1的分子 D_1是用常数项 b_1、b_2替换 D 中 x_1的系数 a_{11}、a_{21}所得的二阶行列式，x_2的分子 D_2是用常数项 b_1、b_2替换 D 中 x_2的系数 a_{12}、a_{22}所得的二阶行列式.

例 1 用行列式解线性方程组$\begin{cases} x_1+2x_2=1 \\ 3x_1+5x_2=2 \end{cases}$.

解 因为方程组的系数行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=5-6=-1\neq 0$，所以方程组有唯一解，其解为

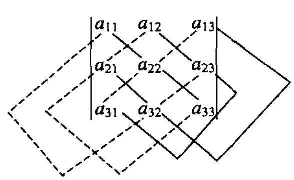
$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}}=\frac{1}{-1}=-1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}}=\frac{-1}{-1}=1.$$

类似地，定义三阶行列式如下.

设有九个数排成三行三列的数表，规定这九个数的行列式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

上述定义表明：三阶行列式是六个项的代数和，每项为不同行不同列的三个元素的乘积再冠以正负号，规律遵循如下所示对角线法则：



三条实线看作是平行于主对角线的连线，三条虚线看做是平行于副对角线的连线，实线上的三元素乘积冠正号，虚线上的三元素乘积冠负号.

例 2 用对角线法则计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix}$.

解 由对角线法则得

$D=1\times5\times9+(-2)\times(-6)\times7+(-4)\times(-8)\times3-1\times(-6)\times(-8)-(-2)\times(-4)\times9-3\times5\times7=45+84+96-48-72-105=0.$

1.1.2 排列和对换

定义 1 由 $1,2,\cdots,n$ 共 n 个数组成的一个有序数组，称为一个 n 阶排列.

排列是有序数组，所以组成排列的数顺序不同就是不同的排列，例如 123 和 213 就是两个不同的 3 阶排列．不同的 n 阶排列共有 $n\times(n-1)\times\cdots\times2\times1=n!$ 个．例如 3 阶排列共有 $3!=6$ 个，它们是 123，132，213，231，312，321.

在 $n!$ 个 n 阶排列中，唯有 $12\cdots(n-1)n$ 是按从小到大的自然顺序组成的一个排列（称为标准排列或自然排列），其余的排列或多或少会出现大的数排在小的数前面的情况，比如在 5 阶排列 15432 中，5 排在 4 前，3 排在 2 前，这样的排列顺序是与自然顺序相反的.

在排列 $i_1i_2\cdots i_j\cdots i_k\cdots i_n$ 中，如果 $j<k$ 而 $i_j>i_k$，则称数对 i_j,i_k 构成一个逆序．一个排列的逆序总数称为排列的逆序数，记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$．逆序数为偶数的排列称为偶排列，逆序数为奇数的排列称为奇排列.

例 3 求排列 34152 的逆序数.

解 构成逆序的数对为 31，32，41，42，52，所以 $\tau(34152)=5$.

由此得到计算排列逆序数的一个方法：

$$\begin{aligned}\tau(i_1i_2\cdots i_n)=\ & i_1 \text{后比 } i_1 \text{ 小的数的个数}\\ & +i_2 \text{后比 } i_2 \text{ 小的数的个数}\\ & +\cdots\\ & +i_{n-1} \text{后比 } i_{n-1} \text{ 小的数的个数}\end{aligned}$$

例如 $\tau(15432)=0+3+2+1=6$ 为偶排列.

定义 2 将一个排列中的某两个数的位置互换，而其余的数不动，就得到另一个排列，这样的变换称为对换．例如，经过 1，3 两数对换，偶排列 15432 就变成奇排列 35412，这表明对换会改变排列的奇偶性.

定理 1 任意排列经过一次对换后必改变其奇偶性.

1.1.3 n 阶行列式的定义

定义 3 设有 n^2 个数，排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

它表示 $n!$ 个项的代数和$\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$. 其中$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$表示位于不同行不同列的 n 个数的乘积，并冠以符号$(-1)^t$，下指标 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，t 为这个排列的逆序数. 称如上数表为 n 阶行列式，记作

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

简记为 $\det(a_{ij})$，其中数 a_{ij} 称为行列式 D 的(i,j)元，表明它位于行列式的第 i 行第 j 列.

例 4　证明

(1) 主对角线行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$；

(2) 上三角形行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$；

(3) 下三角形行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$；

(4) 副对角线行列式 $\begin{vmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2\cdots a_n$.

下面只证 (2)、(4)，(1)、(3) 作为练习.

证明　(2)因为 D 中可能不为 0 的项只有一项$(-1)^t a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，此项符号$(-1)^t=(-1)^0=1$，所以 $D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

(4) 因为 D 中可能不为 0 的项只有一项，即$(-1)^t a_1a_2\cdots a_n$，而 $t=0+1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n-1)}{2}$，所以 $D=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2\cdots a_n$.

习题 1.1

1. 计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix} a & a^2 \\ b & b^2 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}$；　(3) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$；

(4) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$；　(5) $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ -2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$.

2. 求下列各排列的逆序数.

(1) 6372451；(2) 987654321；(3) 315426；(4) $n(n-1)\cdots321$.

3. 求行列式 $D_4=\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$ 的展开式中包含 x^3 和 x^4 的项.

4. 写出四阶行列式 $\det(a_{ij})$ 所有含有 a_{23} 的项.

5. 用定义计算下列各行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$；　(4) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d \\ e & f & g & h & i \end{vmatrix}$.

1.2 行列式的性质

1.2.1 行列式的性质

行列式的计算是本章的重点内容，用行列式的定义计算行列式，只有对某些特殊的行列式才较为可行，比如上三角行列式．对于一般的行列式，随着阶数 n 的增大，用定义来计算是极其复杂的．本节将讨论行列式的性质，利用这些性质可大大简化行列式的计算.

设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}，记 D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

即 D^{T}是由 D 行列位置互换后得到的，称 D^{T}为 D 的转置行列式.

性质 1 行列式 D 与它的转置行列式 D^{T}相等.

证明 记 $D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$，即 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2\cdots n)$，

由行列式定义

$$D^{\mathrm{T}}=\sum(-1)^{\tau(i_1 i_2\cdots i_n)}b_{1i_1}b_{2i_2}\cdots b_{ni_n}=\sum(-1)^{\tau(i_1 i_2\cdots i_n)}a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}=D.$$

此性质表明行列式中行与列的地位是对等的，因而以下对行成立的性质对列也成立.

性质 2 互换行列式的两行（列），行列式变号.

证明 设行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

是由行列式 $\det(a_{ij})$对换 i,j 两行得到，即当 $k\neq i,j$ 时，$b_{kp}=a_{kp}$；当 $k=i,j$ 时，$b_{ip}=a_{jp}, b_{jp}=a_{ip}$，

$$\begin{aligned} D_1&=\sum(-1)^t b_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n} \\ &=\sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n} \\ &=\sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n}, \end{aligned}$$

其中，$1\cdots i\cdots j\cdots n$ 为自然排列，t 为排列 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$的逆序数.

设排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$的逆序数为 t_1，则$(-1)^t=-(-1)^{t_1}$，故

$$D_1=-\sum(-1)^{t_1}a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}=-D.$$

以 r_i表示行列式 D 的第 i 行，以 c_j表示其第 j 列．交换 D 的 i,j 两行记作 $r_i\leftrightarrow r_j$；交换 D 的 i,j 两列记作 $c_i\leftrightarrow c_j$.

推论 1 如果行列式有两行（列）完全相同，则此行列式等于零.

证明 两行互换后 $D=-D$，故 $D=0$.

性质 3 行列式的某一行（列）中所有的元素乘以同一数 k，等于用数 k 乘此行列式．即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明 左$=\sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n}$

$=k\sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}=$右.

第 i 行（或列）乘以 k，这种运算记作 $r_i\times k$（或 $c_i\times k$）.

推论 2 行列式的某一行（列）的所有元素的公因子可以提到行列式符号外面.

第 i 行（或列）提出公因子 k，这种运算记作 $r_i\div k$（或 $c_i\div k$）.

性质 4 行列式如果有两行（列）元素成比例，则此行列式等于零.

证明 略.

性质 5 分行（列）相加性．即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明 左$=\sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots(b_{ij_i}+c_{ij_i})\cdots a_{nj_n}$

$=\sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots b_{ij_i}\cdots a_{nj_n}+$

$\sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots c_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$

$=$右.

性质 6 行列式的某一行（列）元素加上另一行（列）对应元素的 k 倍，行列式不变，

即 $i\neq j$ 时，
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

以数 k 乘第 j 行加到第 i 行上，这种运算记作 r_i+kr_j.

证明　左$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{j1} & ka_{j2} & \cdots & ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+0=\text{右}.$$

例 1　利用行列式性质计算下列行列式

(1) $D=\begin{vmatrix} a & b+c & 1 \\ b & c+a & 1 \\ c & a+b & 1 \end{vmatrix}$；　(2) $D=\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$.

解　(1) $D\xlongequal{c_1+c_2}\begin{vmatrix} a+b+c & b+c & 1 \\ a+b+c & c+a & 1 \\ a+b+c & a+b & 1 \end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b+c & 1 \\ 1 & c+a & 1 \\ 1 & a+b & 1 \end{vmatrix}=0.$

(2) $D\xlongequal[\substack{c_3-c_2\\c_2-c_1}]{c_4-c_3}\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2-a^2 & (a+2)^2-(a+1)^2 & (a+3)^2-(a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2-b^2 & (b+2)^2-(b+1)^2 & (b+3)^2-(b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2-c^2 & (c+2)^2-(c+1)^2 & (c+3)^2-(c+2)^2 \\ d^2 & (d+1)^2-d^2 & (d+2)^2-(d+1)^2 & (d+3)^2-(d+2)^2 \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2a+3 & 2a+5 \\ b^2 & 2b+1 & 2b+3 & 2b+5 \\ c^2 & 2c+1 & 2c+3 & 2c+5 \\ d^2 & 2d+1 & 2d+3 & 2d+5 \end{vmatrix}\xlongequal[c_3-c_2]{c_4-c_2}\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 4 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 4 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 4 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 4 \end{vmatrix}=0.$$

1.2.2　利用行列式的性质计算行列式

如何计算行列式是本章的重点内容，从 1.1 节中例 4 可以看到，上（下）三角形行列式的值等于对角线上元素的积．因此，若能利用行列式的性质将所给行列式化成上（下）三角形行列式，便可以求出行列式的值了，这是计算行列式的基本方法之一.

例 2 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&0&1\\1&3&5&0\\0&1&5&6\\1&2&3&4\end{vmatrix}$.

解

$$D\xlongequal[r_2-r_1]{r_4-r_1}\begin{vmatrix}1&2&0&1\\0&1&5&-1\\0&1&5&6\\0&0&3&3\end{vmatrix}\xlongequal{r_3-r_2}\begin{vmatrix}1&2&0&1\\0&1&5&-1\\0&0&0&7\\0&0&3&3\end{vmatrix}\xlongequal{r_3\leftrightarrow r_4}-\begin{vmatrix}1&2&0&1\\0&1&5&-1\\0&0&3&3\\0&0&0&7\end{vmatrix}=-21.$$

例 3 计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix}a&b&b&\cdots&b\\b&a&b&\cdots&b\\b&b&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&b&\cdots&a\end{vmatrix}$.

解 此行列式的特点是行和或列和相等，因此把 D 的第 2 列，第 3 列…第 n 列均加到第 1 列上，然后提出公因子，再用第 1 列乘以 $-b$ 加到其余各列.

$$D=\begin{vmatrix}a+(n-1)b&b&b&\cdots&b\\a+(n-1)b&a&b&\cdots&b\\a+(n-1)b&b&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a+(n-1)b&b&b&\cdots&a\end{vmatrix}=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix}1&b&b&\cdots&b\\1&a&b&\cdots&b\\1&b&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&b&b&\cdots&a\end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0\\1&a-b&0&\cdots&0\\1&0&a-b&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&0&0&\cdots&a-b\end{vmatrix}=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

例 4 设 $D=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1k}&&&\\\vdots&&\vdots&&\mathbf{0}&\\a_{k1}&\cdots&a_{kk}&&&\\c_{11}&\cdots&c_{1k}&b_{11}&\cdots&b_{1n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{n1}&\cdots&c_{nk}&b_{n1}&\cdots&b_{nn}\end{vmatrix}$，记 $D_1=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1k}\\\vdots&&\vdots\\a_{k1}&\cdots&a_{kk}\end{vmatrix}$，

$D_2=\begin{vmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1n}\\\vdots&&\vdots\\b_{n1}&\cdots&b_{nn}\end{vmatrix}$，证明：$D=D_1D_2$.

证明 对 D_1 作运算 r_i+kr_j，把 D_1 化为下三角形行列式，设

$$D_1=\begin{vmatrix} p_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} \end{vmatrix}=p_{11}\cdots p_{kk},$$

对 D_2 作运算 c_i+kc_j，把 D_2 化为下三角形行列式．设

$$D_2=\begin{vmatrix} q_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ q_{k1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix}=q_{11}\cdots q_{nn},$$

于是，对 D 的前 k 行作运算 r_i+kr_j 后，再对后 n 列作运算 c_i+kc_j，把 D 化为下三角行列式，$D=\begin{vmatrix} p_{11} & & & & & \\ \vdots & \ddots & & & \mathbf{0} & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & q_{11} & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix}$，故 $D=p_{11}\cdots p_{kk}q_{11}\cdots q_{nn}=D_1D_2$.

例 5　计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a_4 \end{vmatrix}$.

解　此行列式的特点是主对角线及与主对角线平行的上下两条斜线上元素不全为零，其余元素全为零，这种行列式称为三对角行列式，根据此行列式的特点，从第一行开始每行逐次加到下面一行，可得上三角行列式.

$$D\xlongequal{r_2+r_1}\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a_4 \end{vmatrix}\xlongequal[\substack{r_4+r_3\\ r_5+r_4}]{r_3+r_2}\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1.$$

习题 1.2

1. 判断题

（1）如果 n（$n>1$）阶行列式的值等于零，则行列式中必有两行成比例．（　　）

（2）设 $D=\det(a_{ij})$是 n 阶行列式，如果 D 的元素中 0 的个数多于 $n(n-1)$，则 D 的值为零．（　　）

(3) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1+c_1 & d_1+e_1 \\ a_2 & b_2+c_2 & d_2+e_2 \\ a_3 & b_3+c_3 & d_3+e_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & e_1 \\ a_2 & c_2 & e_2 \\ a_3 & c_3 & e_3 \end{vmatrix}$. ( )

(4) 把行列式的某一行（或某一列）的元素乘同一个数后，加到另一行（或另一列）的对应元素上，行列式值不变. ( )

2. 利用行列式的性质计算下列行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 6 & -2 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$； (4) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$.

3. 计算行列式

(1) $\begin{vmatrix} a_1-b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2-b & a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n-b \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}$；

(3) $D_n = \begin{vmatrix} x-a & a & a & \cdots & a \\ a & x-a & a & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & x-a \end{vmatrix}$.

4. 证明下列等式

(1) $D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} = 1+\sum_{i=1}^{n} a_i$.

(2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1)$.

5. 求解下列方程：