

数学建模系列丛书

QUANGUO DAXUESHENG
SHUXUE JIANMO JINGSAI
SAITI YU YOUXIU LUNWEN PINGXI

全国大学生数学建模竞赛 赛题与优秀论文评析

(2005年—2011年 **A** 题)

主编 姚泽清 郑旭东 赵颖



国防工业出版社

National Defense Industry Press

全国大学生数学建模竞赛 赛题与优秀论文评析

(2005年—2011年A题)

主 编	姚泽清	郑旭东	赵 颖			
副主编	刘守生	田作威	沈锦仁	郑 琴	滕加俊	
	史汉生	刘海峰	张 瑰	姚 奎	唐庆国	

国防工业出版社

·北京·

内 容 简 介

本书对2005年至2011年的全国大学生数学建模竞赛的赛题进行了评析,并逐一给出问题解答要点,同时从解放军理工大学获得全国一、二等奖的论文中精选了30篇优秀论文进行点评,评价其优劣,总结其得失。该校在这7年中参加国际、国内数学建模竞赛共获得国际一等奖10项,全国一等奖19项,产生了全国优秀论文3篇,全国优秀建模指导教师1人,并于2010年成功地举办了军队院校军事数学建模邀请赛。本书可作为本科生、专科生的“数学建模”课程的教学参考书,也可作为大学生、研究生参加国际数学建模竞赛、全国大学生数学建模竞赛和研究生数学建模竞赛的培训教材,还可作为从事复杂问题建模的工程技术人员建模的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

全国大学生数学建模竞赛赛题与优秀论文评析. 2005年—2011年A题 / 姚泽清, 郑旭东, 赵颖主编. —北京: 国防工业出版社, 2012.5

ISBN 978-7-118-07506-9

I. ①全... II. ①姚... ②郑... ③赵... III. ①数学模型—竞赛—高等学校—教学参考资料 IV. ①O141.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第221748号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100048)

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 25¼ 字数 590千字

2012年5月第1版第1次印刷 印数1—4000册 总定价76.00元 上册 45.00元
下册 31.00元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)88540777

发行邮购:(010)88540776

发行传真:(010)88540755

发行业务:(010)88540717

数学建模系列丛书

编委会名单

主 编 金丰年 姚泽清 郑旭东
副主编 赵 颖 刘守生 田作威 沈锦仁
编 委 (以姓氏笔画为序)
王 璞 王岩青 毛自森 史汉生 刘希强
刘海峰 严榴香 苏慧琳 杨素娟 吴 欧
汪 鹏 张 瑰 张 燕 陆小庆 陈 蓓
郑 琴 俞 珊 姚 奎 徐 兵 徐丹丹
唐庆国 廖洪林 滕加俊 颜 超 颜 锋
戴 毅

前 言

进入 20 世纪,随着计算机技术的快速发展,数学以空前的广度和深度向自然科学、工程技术及管理科学等领域渗透,与之发生交叉与融合,数学思维对人类认识自然和改造自然起着越来越重要的作用,数学与计算机技术相结合而形成的数学技术已经成为当代高新技术的一个重要组成部分,而数学建模作为联系数学与实际问题的桥梁已成为数学科学向数学技术转化的主要途径。

数学发展史,就是一部人们不断发现问题和解决问题的历史。数学可以锻炼学生的思维,对学生在完成从应试到应用、从学生到学者、从知识到学识的转化过程,有着无可替代的作用。然而,由于传统教学模式的影响,长期以来我们的数学教育过于追求理论的完美和逻辑的严谨,使得生动的、充满活力的数学教学被淹没在大量枯燥的公式推导与理论证明之中,严重挫伤了学生的学习积极性,束缚了学生创新意识、创新精神和创新能力的发展。

1985 年,美国率先举办了数学建模竞赛(the Mathematical Contest in Modeling, MCM),旨在鼓励大学生运用数学知识参与解决实际问题的全过程,为改变这一状况提供了契机。1989 年,北京大学、清华大学、北京理工大学首次派队参加了美国的数学建模竞赛,数学建模作为一种全新的学习方式在国内悄然兴起。

1992 年,中国工业与应用数学学会举办了首届全国大学生数学建模联赛,1994 年转而为教育部高教司直接组织领导,并更名为全国大学生数学建模竞赛。数学建模活动的兴起,对提高学生的综合素质,培养学生的创新能力,起到了催化作用;数学建模活动的开展,推动了数学建模教学在全国各高校的迅速发展,推进了整个数学教学的改革。

数学建模活动在全国兴起后,原中国人民解放军空军气象学院、中国人民解放军通信工程学院就先后开设了数学建模课程,并分别在 1995 年和 1996 年获得了自己的第一个全国一等奖,中国人民解放军通信工程学院还因其突出的成绩成为 1997 年全国大学生数学建模竞赛颁奖大会的承办单位。1999 年中国人民解放军通信工程学院、工程兵工程学院和空军气象学院合并组建为解放军理工大学后,着眼培养高素质创新型人才,以实施“现代化教学工程”为牵引,以培养学员“战略眼光、科学思维方法、信息素养以及较强国际交流能力”为着力点,将数学建模活动的重点由成绩的获取转移到能力的培养上来,为培养创新型人才搭建实践平台,使学员的聪明才智和创造精神得到了充分发挥。

进入 21 世纪,解放军理工大学共获得全国大学生数学建模竞赛一等奖 28 项,二等奖 46 项,其中有 3 篇被评为全国优秀论文。2006 年,解放军理工大学首战国际数学建模竞

赛,就获得了一等奖1项;2007年,再战跨学科建模竞赛(the Interdisciplinary Contest in Modeling, ICM),又获得了国际一等奖2项的好成绩,5年来共获得国际一等奖10项、二等奖11项。2008年,解放军理工大学的经验成果《开展数学建模活动,为培养创新型人才搭建实践平台》获军队级教学成果二等奖;2011年,又成功举办了军队院校军事数学建模邀请赛,推动了数学建模活动在军队院校的广泛、深入开展。

为了总结解放军理工大学开展数学建模活动的经验,检验学员参加数学建模活动的成果,我们在大学和理学院首长的支持下,着手编写了这部数学建模系列丛书。作为丛书的第一部分,《全国大学生数学建模竞赛赛题与优秀论文评析》一书,邀请具有丰富实战经验的专家对2005年至2011年的赛题进行了评析,并逐一给出问题解答要点,同时从解放军理工大学获得全国一、二等奖的51篇论文中,精选了30篇优秀论文进行点评,评价其优劣,总结其得失,以期对后来者有所裨益。

鉴于全国大学生数学建模竞赛A题偏理论、B题偏应用的特点,本书按A、B两题分两辑出版。本书可作为专科生、本科生《数学建模》课程的教学参考书,大学生、研究生参加国际数学建模竞赛、全国大学生数学建模竞赛和研究生数学建模竞赛的培训教材,以及从事复杂问题建模的工程技术人员建模指导书。

值本书出版之际,谨向解放军理工大学成立以来对数学建模活动的开展给予精心呵护与悉心指导的唐万年校长、张亚非校长、训练部张建军部长、政治部张华伟主任、校务部苏晓冰部长致以崇高的敬意,向多年来对数学建模活动的组织给予全力支持与大力帮助的大学训练部李建新副部长、费建芳副部长、周雷副部长表示诚挚的谢意,并借此机会向对解放军理工大学数学建模活动给予关心指导的解放军信息工程大学韩中庚教授、东南大学朱道元教授,以及曾经在解放军理工大学数学建模团队中工作过并做出重要贡献的汤光华、罗剑等同志表示衷心的感谢!

由于时间和水平所限,书中错漏之处在所难免,恳请各位专家学者和读者批评指正,信寄:lgdxxlxyzq@yahoo.com.cn。

姚泽清

2012年1月11日于南京

目 录

2005 年 A 题 长江水质的评价和预测	(1)
长江水质的评价和预测的数学模型(全国一等奖)	罗文明、温莹、胡水根(4)
长江水质的评价和预测(全国一等奖)	李云锋、王勇、杨林(26)
长江水质的评价和预测的数学模型(全国二等奖)	胡超、顾亚、张怡(58)
2006 年 A 题 出版社的资源配置	(71)
出版社资源配置的数学模型(全国一等奖)	苏正炼、江勋林、卢本胜(73)
出版社资源配置的数学模型(全国一等奖)	王腾飞、田金鑫、徐晓虎(101)
2007 年 A 题 中国人口增长预测	(126)
人口预测的数学模型(全国一等奖)	曹瑞飞、郑长友、姜明云(127)
中国人口增长模型(全国二等奖)	黎爱兵、余运科、姚雪峰(150)
中国人口增长预测(全国二等奖)	李文超、于斌、查海波(175)
2008 年 A 题 数码相机定位	(192)
数码相机定位问题(全国一等奖)	张应宪、樊琳娜、姜青竹(195)
数码相机定位研究(全国一等奖)	王平、郑建超、黄涛(220)
数码相机定位标定方法研究(全国一等奖)	魏垚名、杨诚、郇相进(239)
2009 年 A 题 制动器试验台的控制方法分析	(258)
制动器试验台的控制方法分析(全国一等奖)	徐兵、王光华、程四海(261)
制动器试验台控制方法的模型研究(全国一等奖)	李志坚、郑钢锤、孟宪宇(276)
制动器试验台的控制方法分析(全国二等奖)	王平、郑建超、黄涛(294)
2010 年 A 题 储油罐的变位识别与罐容表标定	(312)
储油罐的变位识别与罐容表标定设计模型(全国一等奖)	
.....	许晓明、高枫越、张驭龙(316)
储油罐的变位识别与罐容表标定(全国二等奖)	朱锐杰、张鹏、杨明梦(334)
2011 年 A 题 城市表层土壤重金属污染分析	(347)
城市表层土壤重金属污染分析(全国一等奖)	范志强、吕华平、胡帅(349)
城市表层土壤重金属污染分析(全国二等奖)	曾治、杨志才、柴卓慧(379)
附录 全国大学生数学建模竞赛历年赛题	(397)

2005 年 A 题 长江水质的评价和预测

水是人类赖以生存的资源,保护水资源就是保护我们自己,对于我国大江大河水资源的保护和治理应是重中之重。专家们呼吁:“以人为本,建设文明和谐社会,改善人与自然环境,减少污染。”

长江是我国第一、世界第三大河流,长江水质的污染程度日趋严重,已引起了相关政府部门和专家们的高度重视。2004 年 10 月,由全国政协与中国发展研究院联合组成“保护长江万里行”考察团,从长江上游宜宾到下游上海,对沿线 21 个重点城市做了实地考察,揭示了一幅长江污染的真实画面,其污染程度让人触目惊心。为此,专家们提出“若不及时拯救,长江生态 10 年内将濒临崩溃”(附件 1),并发出了“拿什么拯救癌变长江”的呼唤(附件 2)。

附件 3 给出了长江沿线 17 个观测站(地区)近两年多主要水质指标的检测数据,以及干流上 7 个观测站近一年多的基本数据(站点距离、水流量和水流速)。通常认为一个观测站(地区)的水质污染主要来自于本地区的排污和上游的污水。一般说来,江河自身对污染物都有一定的自然净化能力,即在水环境中通过物理降解、化学降解和生物降解等,使水中污染物的浓度降低。反映江河自然净化能力的指标称为降解系数。事实上,长江干流的自然净化能力可以认为是近似均匀的,根据检测可知,主要污染物高锰酸盐指数和氨氮的降解系数通常介于 0.1~0.5 之间,比如可以考虑取 0.2(单位:1/天)。附件 4 是“1995—2004 年长江流域水质报告”给出的主要统计数据。下面的附表是国家标准(GB 3838—2002)给出的《地表水环境质量标准》中 4 个主要项目标准限值,其中 I、II、III 类为可饮用水。

请你们研究下列问题:

(1) 对长江近两年多的水质情况做出定量的综合评价,并分析各地区水质的污染状况。

(2) 研究、分析长江干流近一年多主要污染物高锰酸盐指数和氨氮的污染源主要在哪些地区?

(3) 假如不采取更有效的治理措施,依照过去 10 年的主要统计数据,对长江未来水质污染的发展趋势做出预测分析,比如研究未来 10 年的情况。

(4) 根据你的预测分析,如果未来 10 年内每年都要求长江干流的 IV 类和 V 类水的比例控制在 20% 以内,且没有劣 V 类水,那么每年需要处理多少污水?

(5) 你对解决长江水质污染问题有什么切实可行的建议和意见。

附表:《地表水环境质量标准》(GB 3838—2002)中4个主要项目标准限值

(单位:mg/L)

序号	项目	标准值	分类					
			I类	II类	III类	IV类	V类	劣V类
1	溶解氧(DO)	\geq	7.5 (或饱和率90%)	6	5	3	2	0
2	高锰酸盐指数(CODMn)	\leq	2	4	6	10	15	∞
3	氨氮(NH ₃ -N)	\leq	0.15	0.5	1.0	1.5	2.0	∞
4	pH值(无量纲)		6~9					

(注:附件1~附件4位于压缩文件A2005Data.rar中,可从<http://mcm.edu.cn/mcm05/problems2005c.asp>下载)

【试题评析】

沈锦仁

本题是根据长江水质1995年到2004年的大量统计数据来分析评价长江水质,并预测后十年长江水质变化状况及后十年每年要处理污水的数量。

问题一,根据17个观察点的28个月的4个指标的三维数据来综合分析长江的水质情况,分析各地区的污染状况。

问题二,根据干流七个观察点的水质数据,来分析长江污染排污的情况。

问题三和问题四,根据1995年到2004年10年的长江六类水质的分类、水流量、沿途的排废水量来预测以后十年长江六类水质的比例和排废量及要处理的废水量。

【问题解答要点】

问题一,根据17个观察点,28个月,4种水质指标,来分析各地区污染情况和综合分析长江水质情况。第一步,先将4种水质指标综合,在综合时应将4种指标进行单位化,要注意质的问题和方向问题。综合时一般采用平均数,考虑到水质的问题,一个指标不能达到饮用水标准就不是饮用水了,因而也应该采用最大值方法综合。第二步,在同一观察点采用28个月的综合,从而可以分析出17个观察点严重程度的排序。第三步,对17个观察点的综合,可得长江总体上是属于二类水。

问题二,探求污染源。长江干流上的7个观察点 x_i ($i=1,2,\dots,7$),简单处理为 x_i 的指标值 ρ_i 流到 x_{i+1} 处,由于自降价的原因,指标值应该为 $\rho_i e^{-\lambda \Delta t_i}$,而观察值为 ρ_{i+1} ,其差 $\rho_{i+1} - \rho_i e^{-\lambda \Delta t_i}$ 可以相对地反映 x_i 到 x_{i+1} 之间污染的程度。水质问题理论上应该是反应—扩散方程问题,右端函数 $f(x,t)$ 就是污染源。可利用方程来反演 $f(x,t)$,也可以简化反应扩散方程为常微分方程求解,也可以用差分格式来反演。

问题三,利用1995年到2004年10年的六类水质的百分比来预测后十年的百分比,用统计数据来预测,一般采用回归的方法。六类分别回归, F 检验不易通过;将I、II、III类水质合并,IV、V类合并,劣V类单独,分三类水质分别回归。

问题四,利用十年的长江总流量,流域内排废水量,用统计方法,因果分析,“因”是流域排废水量,“果”是长江水质Ⅳ、Ⅴ类水比例 y_4 ,劣Ⅴ类水质比例 y_6 ,用统计数来进行回归。要求:Ⅳ、Ⅴ类低于 20%,劣Ⅴ类要不存在,从而 $y_4 = 20, y_6 = 0$,从而得排废水量的临界值和 M_4^* 和 M_6^* , $M^* = \min(M_4, M_6)$,再用回归方法来预测后十年流域的排废水量,超过 M^* 的部分就是每年要处理的废水的流量。

长江水质的评价和预测的数学模型

摘要

本文利用微分方程、线性回归和曲线拟合的方法(通过简化长江水流速度的变化情况和污水排放情况)建立了长江水质的评价和预测的线性回归模型。模型考虑了数据相对于时间的变化情况、数据之间存在的相互联系,对未来长江的水质情况进行了合理的预测。本文通过微分方程求解、曲线拟合和线性回归算法并利用数学软件 MATLAB 进行编程计算,给出了问题的解答:(1)长江中,Ⅱ类水、Ⅲ类水、Ⅳ类水、劣Ⅴ类水所占比重分别为:52.9%、35.3%、5.8%、5.9%,Ⅰ类水和Ⅴ类水所占比重非常小。(2)高锰酸盐(CODMn)的主要污染源为3~4观测站之间的地区,即湖北宜昌南津关到湖南岳阳城陵矶。氮氨(NH₃-N)污染源主要是4~5观测站之间的地区,即湖南岳阳城陵矶到江西九江河西水厂和湖北宜昌南津关到湖南岳阳城陵矶。(3)可饮用水(Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ类水的总和)所占的百分比越来越小,而不可饮用水所占的百分比越来越大,特别是劣Ⅴ类水所占百分比增加显著。(4)根据预测分析,未来十年需要处理的污水量分别为79.4、92.3、105.1、118.0、130.9、140.5、143.7、169.4、183.3、195.1(亿t)。(5)我们对解决长江水质污染问题最主要的意见就是要完善规章制度、加大治理力度,发挥政府部门的职能作用。在文章的最后,分析了模型的优缺点,给出了模型的若干推广。

1 问题的重述

水是人类赖以生存的资源,保护水资源就是保护我们自己,对于我国大江大河水资源的保护和治理应是重中之重。专家们呼吁:“以人为本,建设文明和谐社会,改善人与自然环境,减少污染。”

长江是我国第一、世界第三大河流,长江水质的污染程度日趋严重,已引起了相关政府部门和专家们的高度重视。2004年10月,由全国政协与中国发展研究院联合组成“保护长江万里行”考察团,从长江上游宜宾到下游上海,对沿线21个重点城市做了实地考察,揭示了一幅长江污染的真实画面,其污染程度让人触目惊心。为此,专家们提出“若不及时拯救,长江生态10年内将濒临崩溃”(附件1),并发出了“拿什么拯救癌变长江”的呼唤(附件2)。

附件3给出了长江沿线17个观测站(地区)近两年多主要水质指标的检测数据,以及干流上7个观测站近一年多的基本数据(站点距离、水流量和水流速)。通常认为一个观测站(地区)的水质污染主要来自于本地区的排污和上游的污水。一般说来,江河自身对污染物都有一定的自然净化能力,即在水环境中通过物理降解、化学降解和生物降解

等,使水中污染物的浓度降低。反映江河自然净化能力的指标称为降解系数。事实上,长江干流的自然净化能力可以认为是近似均匀的,根据检测可知,主要污染物高锰酸盐指数和氨氮的降解系数通常介于 0.1~0.5 之间,比如可以考虑取 0.2(单位:1/天)。附件 4 是“1995—2004 年长江流域水质报告”给出的主要统计数据。下面的附表是国家标准(GB 3838—2002)给出的《地表水环境质量标准》中 4 个主要项目标准限值,其中 I、II、III 类为可饮用水。

请你们研究下列问题:

(1) 对长江近两年多的水质情况做出定量的综合评价,并分析各地区水质的污染状况。

(2) 研究、分析长江干流近一年多主要污染物高锰酸盐指数和氨氮的污染源主要在哪些地区?

(3) 假如不采取更有效的治理措施,依照过去 10 年的主要统计数据,对长江未来水质污染的发展趋势做出预测分析,比如研究未来 10 年的情况。

(4) 根据你的预测分析,如果未来 10 年内每年都要求长江干流的 IV 类和 V 类水的比例控制在 20% 以内,且没有劣 V 类水,那么每年需要处理多少污水?

(5) 你对解决长江水质污染问题有什么切实可行的建议和意见。

2 问题的分析

本题要求对长江现状进行分析评价和对长江以后的状况进行合理的预测,并对污水处理量提出自己的意见。从题意中可以看出,对于第一个问题,可以将所有的检测项目进行无量纲化,然后进行定时间的整体综合评价和固定地点的整体综合评价。而对于污染情况的分析,则可以根据流体力学的知识获得求解。在本题中,就可以使用流体力学中的扩散方程来解决水质污染的问题。为了能够将问题简单化,在考虑的时候,可以将问题进行简单化处理。

在第三问中,需要求解的问题是依照过去十年的数据来预测未来十年的数据。考虑使用曲线拟合的方法来找出过去十年的各种水质的百分比变化的规律。在数据拟合的过程中,为了使得规律性变得明显,可以进行合理的数据预处理,如进行平滑性处理、剔除不合理的数据点。通过对数据的分析,发现数据点比较离散且规律性不强,为了得到规律性较为明显的结果,在拟合的过程中可以将几类水进行合理的合并,将可饮用水作为一类,将 IV、V 类水作为同一类,劣 V 类作为一类。在找到合适的函数来进行拟合之后,可以使用这些函数来对未来十年的长江水质情况进行预测。

在附件 4 中,可以发现给出了前十年的污水排放数量,对这十个数据进行拟合,可以预测未来十年的年污水排放总量。而观察长江十年的水流总量可以发现,长江水流总量的变化较小,所以可以忽略长江总流量的变化。为了达到题目中所要求的水质,可以计算在这种情况下长江能够承受的最大污水排放量,将这个排放量与预测的排放量进行比较,多出来的部分就是需要每年处理掉的。

3 符号约定

$u(x, t)$: 污染浓度;
 v : 水流速度;
 y_i : 第 i 类水质的水所占的百分比;
 x : 污水的数量。

4 模型的假设与名词解释

在解题的过程中,认为长江水的自净能力是不变的,取 0.2(单位:1/天)。因为长江水流的实际情况非常复杂,所以在计算的时候考虑对它进行简化。在计算 17 个观测点的具体位置时,因为没有能够找到非常有效的数据来说明它们,所以在实际的运用中是根据地图中它们的位置来大略地计算它们的相对位置,确定它们在长江中的各个坐标。因为沿江的污染物排放是没有固定地点的,为了分析计算的方便,假设污水在各观测点之间是均匀排放的。

5 问题 I 模型的建立与求解

5.1 无量纲化模型的建立

对于问题一,要紧紧抓住两个方面的内容:一个是要对两年多的长江水质作一个定量的综合评价;另一个是要对各地区的水质污染情况做一个分析。在综合评价的时候,可以对长江的水质进行固定时间的综合评价或者不固定时间不固定地点的整体评价。在具体的求解过程中对这两种情况都要进行计算分析。首先对已经给出的水质分级标准进行无量纲化,然后利用已经给出的水质分级结果对照无量纲化处理结果进行处理,最后进行综合就可以得到想要的各地的水质状况分析以及长江整体的水质状况。

5.2 理论分析及算法思想

因为在《长江流域主要城市水质检测报告》中已经给出了 17 个不同观测点在 28 个不同时间各主要监测项目的各项数值,所以可以对这些数据进行合理的处理以求解得到需要的结果。同时在题目中也可以看到对各个不同指标的水质判断标准,所以也可以比较容易地对这四个项目进行无量纲化处理,进行处理后就可以利用这个处理结果对给出的不同时间的 17 个观测点的水质类别进行处理,然后对这个处理结果进行适当的分析,就应该可以得到需要求解的结果。在这个问题的求解过程中需要运用的最主要的算法思想,就是对给定的数据如何进行合适的处理分析,解决好这个问题之后,需要求解的问题就可以迎刃而解了。对现有的标准进行无量纲化的好处就是对所有的监测项目进行了处理,使它们统一到了相同的一个判断标准上,这样在进行综合求平均值的时候就能够比较容易地进行分析了。

5.3 模型的求解

为了使四个监测项目的判断标准统一到相同的值上,需要对这四项判断标准进行无量纲化处理,在处理过程中用氨氮的判断值除以2得到的结果为新的判断标准,那么 I 类水至劣 V 类水的新的判断标准分别为 $0 \sim 0.075$ 、 $0.075 \sim 0.25$ 、 $0.25 \sim 0.5$ 、 $0.5 \sim 0.75$ 、 $0.75 \sim 1$ 、 $1 \sim \infty$,所以现在需要做的就是将其他的检测项目统一到这个标准上来。

采用分段函数对高锰酸盐指数进行无量纲化,具体的分段函数为

$$f(M) = \begin{cases} \frac{M}{2} \cdot 0.075 & M \leq 2 \\ \frac{M-2}{2}(0.25-0.075) + 0.075 & 2 < M \leq 4 \\ \frac{M-4}{2}(0.5-0.25) + 0.25 & 4 < M \leq 6 \\ \frac{M-6}{10-6}(0.75-0.5) + 0.5 & 6 < M \leq 10 \\ \frac{M-8}{15-10}(1-0.75) + 0.75 & 10 < M \leq 15 \\ \frac{M-10}{15-10} + 1 & 15 < M \end{cases}$$

经过处理后的新标准就与氨氮标准判断值的结果相一致, I 类水至劣 V 类水的判断标准分别为 $0 \sim 0.075$ 、 $0.075 \sim 0.25$ 、 $0.25 \sim 0.5$ 、 $0.5 \sim 0.75$ 、 $0.75 \sim 1$ 、 $1 \sim \infty$ 。

利用同样的方法对溶解氧指数无量纲化处理,使得它们能够与氨氮的判断标准相统一。因为溶解氧的含量是越多越好,这与其他两项正好相反,为了能够使它们统一,需要对它们进行反转,的做法是使用 $7.5 - D$,得到的数值就变化为 $0, 1.5, 2.5, 4.5, 5.5, \infty$,具体的分段函数为

$$f(D) = \begin{cases} 7.5 - D + 0.025 & D \geq 7.5 \\ \frac{7.5-D}{7.5-6}(0.25-0.075) + 0.075 & 6 \leq D < 7.5 \\ \frac{7.5-D-1.5}{1.5}(0.5-0.25) + 0.25 & 5 \leq D < 6 \\ \frac{7.5-D-2.5}{2.5-1.5}(0.75-0.5) + 0.5 & 3 \leq D < 5 \\ \frac{7.5-D-4.5}{4.5-2.5}(1-0.75) + 0.75 & 2 \leq D < 3 \\ \frac{7.5-D-5.5}{5.5-4.5} + 1 & D < 2 \end{cases}$$

经过处理后的新标准就与氨氮标准判断值的结果相一致, I 类水至劣 V 类水的判断标准分别为 $0 \sim 0.075$ 、 $0.075 \sim 0.25$ 、 $0.25 \sim 0.5$ 、 $0.5 \sim 0.75$ 、 $0.75 \sim 1$ 、 $1 \sim \infty$ 。

对于 pH 值的无量纲化处理中可以发现, pH 值只需要区别两类,即 $6 \sim 9$ 之间和这个范围之外的数值,所以在计算的过程中认为只要 pH 值在 $6 \sim 9$ 之间的就为 I 类水至 V 类

水,其他的就是劣V类水,具体的分段计算函数为

$$f(P) = \begin{cases} \frac{|P-7|}{1} \cdot 0.075 & 6 \leq P < 7 \\ \frac{|P-7|}{2} \cdot 0.075 & 7 \leq P \leq 9 \\ \frac{|P-7.5|}{1.5} & \text{其他} \end{cases}$$

经过处理后的新标准就与氨氮标准判断值的结果相一致, I类水至V类水及劣V类水的判断标准分别为0~0.075、∞。

将四个监测项目的28个不同时间数值代入各个分段函数,并将四个监测项目相加求平均值,就可以得到最后的无量纲化结果,见表1(完整数据表见附录)。

表 1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2003-06	0.16	0.17	0.47	0.20	0.23	0.19	0.17	0.60	0.13
2003-07	0.45	0.13	0.40	0.24	0.22	0.16	0.21	0.55	0.63
...
2005-08	0.13	0.15	0.32	0.28	0.10	0.14	0.23	0.43	0.17
2005-09	0.25	0.15	0.19	0.36	0.15	0.14	0.24	0.18	0.08
	10	11	12	13	14	15	16	17	
2003-06	0.62	0.07	0.50	0.22	0.20	0.46	0.15	0.14	
2003-07	0.54	0.07	0.20	0.19	0.41	0.52	0.24	0.56	
...	
2005-08	0.18	0.07	0.32	0.17	0.24	0.64	0.14	0.37	
2005-09	0.22	0.07	0.28	0.32	0.17	0.70	0.10	0.21	

注:其中1~17为17个按附录表中顺序排列的不同观测点

5.4 模型的结果与分析

对5.3节中计算得到的无量纲化结果进行定时间的相加求平均,结果见表2。

表 2

时间	03-06	03-07	03-08	03-09	03-10	03-11	03-12
水质	0.27529	0.33647	0.30471	0.30765	0.42353	0.64235	0.72059
时间	04-01	04-02	04-03	04-04	04-05	04-06	04-07
水质	0.74882	1.0706	0.50353	0.38235	0.28941	0.30118	0.29471
时间	04-08	04-09	04-10	04-11	04-12	05-01	05-02
水质	0.26765	0.23353	0.39647	0.35941	0.55412	0.41059	0.34
时间	05-03	05-04	05-05	05-06	05-07	05-08	05-09
水质	0.23824	0.22647	0.22647	0.23412	0.24647	0.24	0.22412

将上面得到的结果与在无量纲化时得到的新判断标准作比较,就可以得到不同时间的长江水质类别的整体评价,具体的结果见表3。

表3

时间	03-06	03-07	03-08	03-09	03-10	03-11	03-12
水质	Ⅲ	Ⅲ	Ⅲ	Ⅲ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅳ
时间	04-01	04-02	04-03	04-04	04-05	04-06	04-07
水质	Ⅳ	劣Ⅴ	Ⅳ	Ⅲ	Ⅲ	Ⅲ	Ⅲ
时间	04-08	04-09	04-10	04-11	04-12	05-01	05-02
水质	Ⅲ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅲ	Ⅲ
时间	05-03	05-04	05-05	05-06	05-07	05-08	05-09
水质	Ⅱ	Ⅱ	Ⅱ	Ⅱ	Ⅱ	Ⅱ	Ⅱ

从表3中可以统计出长江整体上有28.6%时间的水质为Ⅱ类水,而有50%时间的水质为Ⅲ类水,有17.9%时间的水质为Ⅳ类水,还有3.5%时间的水质为劣Ⅴ类水。

对5.3中计算得到的无量纲化结果进行固定不同地点的相加求平均,结果见表4。

表4

地点	1	2	3	4	5	6
水质	0.18214	0.19286	0.18107	0.25071	0.14	0.16929
时间	7	8	9	10	11	12
水质	0.17643	0.5425	0.27679	0.49214	0.075714	0.46536
时间	13	14	15	16	17	
水质	0.30714	0.24	2.3507	0.27179	0.24179	

将上面得到的结果与在无量纲化时得到的新判断标准作比较,就可以得到不同地点的近两年多长江水质类别的整体评价,具体的结果见表5。

表5

地点	1	2	3	4	5	6
水质	Ⅱ	Ⅱ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅱ	Ⅱ
时间	7	8	9	10	11	12
水质	Ⅱ	Ⅳ	Ⅲ	Ⅲ	Ⅱ	Ⅲ
时间	13	14	15	16	17	
水质	Ⅲ	Ⅱ	劣Ⅴ	Ⅲ	Ⅱ	

从表5中可以统计出,在长江中,有52.9%地区的水质为Ⅱ类水,有35.3%地区的水质为Ⅲ类水,有5.8%地区的水质为Ⅳ类水,有5.9%地区的水质为劣Ⅴ类。

从地区的分布可以看出,在长江干流的水质要好于长江支流的,这说明长江支流的沿江污染情况严重,干流的水质受到支流的严重影响。这也是合理的,因为长江干流的水流量要明显大于支流的:一方面支流的污水进入干流后得到了稀释;另一方面干流的自净能力也要大于支流。

6 问题 II 模型的建立与求解

6.1 模型的建立

根据流体力学扩散方程,考虑定点的浓度变化情况,建立微分方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \lambda u + f(x, t) \quad (1)$$

式中: $u(x, t)$ 为浓度,是关于时间 t 和距离 x 的函数,是外部污染源导致的浓度变化; $\frac{\partial u}{\partial t}$ 为浓度随着时间的变化率; $v(x, t)$ 为流速,是关于时间 t 和距离 x 的函数; $v \frac{\partial u}{\partial x}$ 为平流项; E 为扩散系数, $E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 为扩散项; λ 为主要污染物的降解系数,通常介于 $0.1 \sim 0.5$ 之间,在本文中取 0.2 (单位:1/天)。

现在已知各个观测点的检测项目的浓度,那么就可以通过反演的方法来求解得到 E, f, u 。

分析浓度随着时间的变化率 $\frac{\partial u}{\partial t}$,根据附件3中相同观测点相邻两月污染物的浓度变化数据,相邻的30天中浓度的变化几乎为零。

分析扩散项 $E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,根据经验扩散系数 E 取值范围为 $5 \sim 45$ 。扩散项是对距离 x 求二阶偏导。在题目中距离 x 非常大,因此相对平流项 $v \frac{\partial u}{\partial x}$ 来说,扩散项 $E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 非常小。

根据 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 、 $E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 相对于平流项 $v \frac{\partial u}{\partial x}$ 来说要小得多,所以可以不考虑 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 、 $E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 。那么经过简化就能够得到 $v \frac{\partial u}{\partial x} = -\lambda u + f(x)$,其中 $f(x)$ 为分段常数,所以令 $f(x)$ 为 k , k 为分段常数,表示两观测站之间污染源每天每升江水所接受的污染物,假设两观测站的污染源在两观测站之间均匀分布。

水流速度 $v(x, t)$ 是关于时间 t 和距离 x 的函数,其速度方向实际上是空间的三个方向。相对于长江的长来说,其江宽和江的深都是微乎其微的,因此假定长江是一条曲线,故其水流速度也简化成一个方向,即向前流动。在这里考虑流速情况,由于水受到重力的原因而往低处走,若没有阻力,则应是一个加速的过程,但由于水本身有黏稠性,再加上受到外界的阻力,因此假设在没有支流汇入的前提下,假定在长江曲线上的任何两点水匀速下流,只要两点之间不存在支流,其水流速度 $v(x, t)$ 一定,因此 $v(x, t)$ 为分断常数。

对于长江曲线上的没有支流的任何两点,其速度为一常值 v ,建立微分方程:

$$v \frac{\partial u}{\partial x} = -0.2u + k$$

移项得