全国高等学校管理科学与工程类专业规划教材

运筹与优化

周华任　赵颖　周生　主编

Operations and Optimization

Operations and Optimization

清华大学出版社

全国高等学校管理科学与工程类专业规划教材

运筹与优化

Operations and Optimization

Operations and Optimization

周华任　赵颖　周生　主编

清华大学出版社
北　京

内容简介

运筹与优化是一门研究如何有效地组织和管理的科学。本书介绍运筹与优化的基本理论和方法，内容包括线性规划、单纯形法、运输问题、非线性规划、整数规划、动态规划、图论、统筹论、排队论、存储论、决策论和对策论的基本原理、模型以及应用。

本书既可以作为运筹学、应用数学、管理科学、系统科学、信息科学、控制论、计算机科学和工程技术等专业的教材，也可以作为其他相关专业的学者和技术人员的参考书，或作为有关人员的培训教材和自学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

运筹与优化/周华任，赵颖，周生主编. --北京：清华大学出版社，2012.8
全国高等学校管理科学与工程类专业规划教材
ISBN 978-7-302-28253-2

Ⅰ. ①运… Ⅱ. ①周… ②赵… ③周… Ⅲ. ①运筹学－高等学校－教材 Ⅳ. ①O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 034895 号

责任编辑：高晓蔚
封面设计：赵梅秋
责任校对：王凤芝
责任印制：张雪娇

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
课 件 下 载：http://www.tup.com.cn,010-62795954
印 刷 者：北京富博印刷有限公司
装 订 者：北京市密云县京文制本装订厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×230mm　**印　张**：17.75　**插　页**：1　**字　数**：368 千字
版　　次：2012 年 8 月第 1 版　　**印　　次**：2012 年 8 月第1 次印刷
印　　数：1～5000
定　　价：32.00 元

产品编号：037546-01

前　言　FOREWORD

运筹与优化技术在国民经济的许多领域如工农业生产、交通运输、贸易、管理、科学研究中有广泛的应用。所谓优化就是在众多可行的方案或方法中找到最好的方案或方法。例如，在确定投资项目时希望选择期望收益最大或风险最小的项目；两地之间的输送管道或运输路线在满足要求的条件下应尽可能短；等等。为应用优化技术确定最优的方案，需要针对具体的实际问题建立相应的最优化模型，再根据模型的具体形式和特性选择适当的优化方法求解。

本书主要介绍运筹与优化的基本理论和常用的最优化模型和方法，编写的原则是加强运筹与优化方法的基础理论，突出运筹与优化的应用背景，提高建模及计算机应用能力。

由于本书是作为本科生教材编写的，我们不希望内容太难、太深，但也必须使学生了解这门学科的全貌，掌握必要的方法、理论与算法软件（主要是 MATLAB）。应该说，本书包含的内容是最优化的核心部分，特别是实际中用得较多的内容，我们力求多讲一些。

本书深入浅出，通俗易懂。我们努力讲清每种方法的背景、原理、算法、性质、和例题，避免较深较难的数学推导，希望使读者做到即学即会，即会即用。

全书共分为 12 章，分别介绍线性规划、单纯形法、运输问题、非线性规划、整数规划、动态规划、图论、统筹论、排队论、存储论、决策论和对策论的基本原理、模型以及应用。在介绍基本原理的同时，有的算法和例题还给出了相应的 MATLAB 程序。

本书由周华任、赵颖、周生、谭雪平、陈玉金、李喜波编写。

书中借鉴了许多专家的成果，有的在参考文献列出了，有的未能列出，在此一并表示深深的感谢！

限于编者的水平，书中不妥和错漏之处在所难免，恳请专家和广大读者批评指正。

编　者

2012 年 5 月

目 录 CONTENTS

第 1 章 线性规划 …… 1

1.1 线性规划问题的数学模型 …… 1

1.2 线性规划的图解法 …… 3

1.3 线性规划的标准型和解的性质 …… 6

1.4 线性规划的应用 …… 11

1.5 求解线性规划的 MATLAB 解法 …… 19

习题 …… 21

第 2 章 单纯形法 …… 24

2.1 单纯形法的基本思路和原理 …… 24

2.2 单纯形表 …… 30

2.3 线性规划的对偶问题 …… 40

2.4 对偶理论 …… 46

习题 …… 49

第 3 章 运输问题 …… 50

3.1 运输问题的数学模型 …… 50

3.2 表上作业法 …… 52

3.3 运输模型的应用 …… 57

习题 …… 62

第 4 章 非线性规划 …… 64

4.1 非线性规划的实例及数学模型 …… 64

4.2 无约束非线性规划问题 …… 66

4.3 约束非线性规划问题 …… 71

习题 …… 75

运筹与优化

第 5 章 整数规划 …… 76

5.1 分枝定界法 …… 76
5.2 割平面法 …… 80
5.3 0-1 型整数规划及隐枚举法 …… 85
5.4 指派问题及匈牙利法 …… 89
习题 …… 99

第 6 章 动态规划 …… 100

6.1 动态规划基本原理 …… 100
6.2 动态规划应用实例 …… 105
习题 …… 126

第 7 章 图论 …… 128

7.1 图的基本概念 …… 129
7.2 树 …… 132
7.3 最短路问题 …… 137
7.4 一笔画问题与中国邮递员问题 …… 146
习题 …… 150

第 8 章 统筹论 …… 151

8.1 网络计划图 …… 151
8.2 网络时间参数的计算 …… 157
8.3 排序理论 …… 165
8.4 路线图 …… 168
习题 …… 172

第 9 章 排队论 …… 174

9.1 基本概念 …… 174
9.2 单服务台负指数分布排队模型 …… 179
9.3 多服务台负指数分布排队模型 …… 187
习题 …… 190

第 10 章 存储论 …… 192

10.1 存储论的基本概念 …… 192
10.2 确定性存储模型 …… 194
10.3 随机性存储模型 …… 202
10.4 ABC 库存分类管理方法 …… 214
习题 …… 216

第 11 章 决策论 …… 218

11.1 决策问题及其特征 …… 218
11.2 不确定型决策分析方法 …… 220
11.3 先验概率决策分析 …… 226
11.4 后验概率决策分析 …… 229
11.5 决策树 …… 232
11.6 效用决策分析 …… 236
习题 …… 242

第 12 章 对策论基础 …… 244

12.1 对策论的基本概念 …… 244
12.2 矩阵对策的基本原理 …… 247
12.3 矩阵对策的解法 …… 263
习题 …… 274

参考文献 …… 277

CHAPTER 1

第1章 线性规划

线性规划是运筹学中研究较早，发展较快，应用较广且比较成熟的一个重要分支。

线性规划研究的问题主要有两类：一是某个任务目标确定之后，如何统筹安排，尽量用最少的人力、物力等资源去完成该项任务；二是对一定数量的人力、物力等资源，如何合理安排使用，使任务目标完成得最多。这两类问题实际上是一个问题的两个方面，即所谓寻找整个问题的某个整体指标最优解。在实际中，这类问题很多，例如：

（1）下料问题。现有一批长度一定的钢管，由于生产的需要，要求截出不同规格的钢管若干。试问要如何下料，既能满足生产的需要，又使得使用的原材料钢管数量最少或废材最少？

（2）配料问题。把若干种不同的原料配制成含有一定成分的各种原料的产品，如何配料使产品成本最低？或者是用若干种不同原料，用不同的比例配制出一些价格不同规格不一的产品，在原材料供应量的限制和保证产品成分的含量的前提下，如何获取最大的利润？

（3）生产计划安排问题。如何合理充分地利用厂里现有的人力、物力、财力，制订出最优的产品生产计划，使得工厂获利最大？

（4）运输问题。一个企业有若干个生产单位与销售单位，根据各生产单位的产量及销售单位的销量，如何制定调运方案，使某种一定量的产品从若干个产地运到若干个销地的总运费或总货运量最小？

（5）投资问题。如何从不同的投资项目中选择出一个投资方案，使得投资的回报最大？

总之，类似上述实际问题很多，而且形式多种多样，都可以应用线性规划来成功解决。

1.1 线性规划问题的数学模型

下面先来看什么是线性规划问题的数学模型以及如何建立此类数学模型，并通过数学模型来进一步明确线性规划问题的含义。

【例 1-1】 某工厂在计划期内要安排生产Ⅰ、Ⅱ两种产品，已知生产单位产品所需要的设备台时和 A、B 两种原材料的消耗以及资源的限制情况，如表 1-1 所示。

表 1-1

	Ⅰ	Ⅱ	资源限制
设备/台时	1	1	300
原料 A/千克	2	1	400
原料 B/千克	0	1	250

该工厂每生产一单位产品Ⅰ可获利50元，每生产一单位产品Ⅱ可获利100元，问工厂应分别生产多少单位产品Ⅰ和产品Ⅱ才能使工厂获利最大？

解：为了解决这个实际问题，我们把它归结为数学问题来研究。

首先，确定决策变量。工厂目前要决策的是产品Ⅰ和产品Ⅱ的生产量，可以用变量 x_1 和 x_2 来表示，即：决策变量 x_1 表示生产产品Ⅰ的数量；决策变量 x_2 表示生产产品Ⅱ的数量。由于它们表示产品产量，所以只取非负数。

其次，根据问题的限制条件，列出表示条件的线性不等式。对于台时数方面的限制可以表示为

$$x_1 + x_2 \leqslant 300$$

原材料的限量可以表示为

$$2x_1 + x_2 \leqslant 400 \text{ 和 } x_2 \leqslant 250$$

除了上述约束外，显然还有

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0$$

最后，根据实际问题所追求的目标，列出其线性函数式。则总利润可表示为

$$z = 50x_1 + 100x_2$$

最大利润记为

$$\max z = 50x_1 + 100x_2$$

综上所述，得到了描述该问题的一组数学表达式：

目标函数为 $$\max z = 50x_1 + 100x_2$$

约束条件为 $$\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 300 \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 400 \\ \qquad x_2 \leqslant 250 \\ x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

对于线性规划问题，一般地可以用如下数学模型来描述：

$$\max(\min) z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n \tag{1-1}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_n \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases} \tag{1-2}$$

式(1-1)称为目标函数,式(1-2)称为约束条件,其中 $x_j \geqslant 0 (j=1,2,\cdots,n)$ 也称为非负条件或非负限制。式中,$c_j, a_{ij}, b_i (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 均为常数。当求最大值时,c_j 也称为价值系数或利润系数;当求最小值时,c_j 也称为成本系数或支付系数。a_{ij} 称为约束系数,b_i 称为约束常数。

其中,s. t. 为英文“subject to”的缩写,意即“受约束于”。

线性规划数学模型也可以用如下式(1-3)的简缩形式表示:

$$\max(\min)\ z = \sum_{j=1} c_j x_j$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant (=, \geqslant) b_i & (i = 1,2,\cdots,m) \\ x_j \geqslant 0 & (j = 1,2,\cdots,n) \end{cases} \tag{1-3}$$

由于上述数学模型的目标函数为变量的线性函数,约束条件也为变量的线性等式或不等式,故此模型称之为线性规划。如果目标函数是变量的非线性函数,或约束条件中含有变量非线性的等式或不等式的数学模型,则称之为非线性规划。

满足所有约束条件的解称为该线性规划的可行解,使得目标函数值最大的可行解称为该线性规划的最优解,此目标函数值称为最优目标函数值。

1.2　线性规划的图解法

对一个线性规划问题,建立数学模型之后,接下来是如何求解的问题。这里先介绍含有两个未知变量的线性规划问题的图解法,它简单直观,有助于了解线性规划问题求解的基本原理。

在以 x_1, x_2 为坐标轴的直角坐标系里,图上任意一点的坐标就代表了决策变量 x_1,x_2 的一组值,也就代表了一个具体的决策方案。例 1-1 中的每个约束条件都代表一个半平面,如约束条件以 $x_1+x_2 \leqslant 300$ 是代表以直线 $x_1+x_2=300$ 为边界的左下方的半平面,即这个半平面上的任一点都满足约束条件 $x_1+x_2 \leqslant 300$,而其余的点都不满足这个约束条件。若同时满足 $x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_1+x_2 \leqslant 300, 2x_1+x_2 \leqslant 400, x_2 \leqslant 250$ 的约束条件的点,必然落在这 5 个半平面的公共部分上(包括 5 条边界线),如图 1-1 所示。

可见这公共部分的每一点都是这个线性规划的可行解,因此公共部分是例 1-1 线性规划问题的可行解的集合,称为可行域。

例 1-1 中的目标函数 $z=50x_1+100x_2$,若把 z 看做是某个固定常数 c 时,就得到一条斜率为 $-1/2$ 的直线,该直线上的任一点都使目标函数取相同的值 c,称这样的直线为目标函数等值线。如果把 c 看做是参数而取不同的值,就能得到一系列互相平行的直线簇。从图 1-1 中可见到当 z 的取值从小变大时,直线 $z=50x_1+100x_2$ 沿其法线方向向右上方平移,同时由于要满足全部约束条件,因此决策变量一定要处在其公共部分上。当等

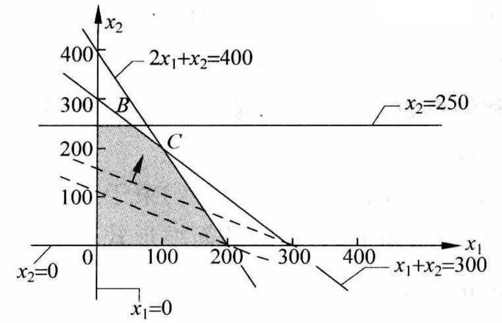


图 1-1

值线移到 B 点时，使 z 值在可行域的边界上实现了最大化。这样就得到了例 1-1 的最优解 B 点，它是直线 $x_2=250$ 与直线 $x_1+x_2=300$ 的交点，其坐标可解得为(50,250)，这就是说，$x_1=50$，$x_2=250$ 就是该线性规划问题的最优解，此时相应的目标函数最大值为 $z=27\,500$。

这说明该工厂的最优生产计划方案是产品Ⅰ生产 50 单位，产品Ⅱ生产 250 单位，可得最大利润为 27 500 元。

例 1-1 中求解得到问题的最优解是唯一的，但对一般线性规划问题，求解结果还可能出现以下几种情况：

(1) 多重最优解。若将例 1-1 中的目标函数变为求 $\max z=50x_1+50x_2$，则可见代表目标函数的直线平移到最优位置后将和直线 $x_1+x_2=300$ 重合。此时，不仅顶点 B，C 都代表了最优解，而且线段 BC 上的所有点都代表了最优解。这个线性规划问题有无穷多最优解，当然这些最优解都对应着相同的最优值为

$$50x_1+50x_2=50(x_1+x_2)=50\times300=15\,000$$

(2) 无界解。如下述线性规划问题：

$$\max z = 2x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1 - x_2 \geqslant 1\\ -x_1 + 2x_2 \leqslant 0\\ x_1, x_2 \geqslant 0\end{cases}$$

用图解法求解结果见图 1-2。从图 1-2 中可以看出，由于可行域是无界区域，当等值线沿箭头方向无限增大时，始终与无界区域相交。此时，目标函数值无上界，因此无最优解，也称最优解无界。

(3) 无可行解。如下述线性规划问题：

$$\min z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1 + x_2 \leqslant 2\\ x_1 - x_2 \geqslant 5\\ x_1, x_2 \geqslant 0\end{cases}$$

由图 1-3 可以看出，同时满足所有约束条件的点不存在，即可行域为空集，也就是没有可行解，也不存在最优解。

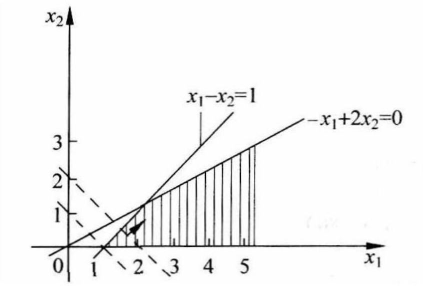


图 1-2

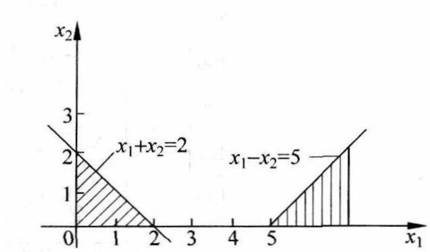


图 1-3

当线性规划问题的求解结果出现无界解和无可行解两种情况时，一般说明线性规划问题建模有错误。前者缺乏必要的约束条件，后者是有矛盾的约束条件，建模时应注意。

下面讨论目标函数最小化的线性规划问题。

【例 1-2】 某企业的生产共需要 A、B 两种原料至少 350 吨（A、B 两种原料有一定的替代性），其中原料 A 至少购进 125 吨。但由于 A、B 两种原料的规格不同，各自所需的加工时间也是不同的，加工每吨原料 A 需要 2 小时，加工每吨原料 B 需要 1 小时，而企业总共有 600 个小时的加工时间。已知每吨原料 A 的价格为 2 万元，每吨原料 B 的价格为 3 万元。试问在满足生产需要的前提下，在企业加工能力的范围内，如何购买 A、B 两种原料，使得购进成本最低？

解：设 x_1 为购进原料 A 的吨数，x_2 为购进原料 B 的吨数，得到此线性规划的数学模型如下：

$$\min z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} x_1 + x_2 \geqslant 350 \\ x_1 \geqslant 125 \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 600 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

我们用图解法来解最优解。首先画出此线性规划问题的可行域，如图 1-4 中的阴影部分。再看目标函数 $z=2x_1+3x_2$，它在坐标平面上可表示为以 z 为参数，以 $-2/3$ 为斜率的一组等值线。等值线随 z 值的减小而向左下方平移，当移动到 Q 点时，目标函数在可行域中取得最小值。Q 点的坐标可以从线性方程

$$x_1 + x_2 = 350$$

$$2x_1 + x_2 = 600$$

中求出，$x_1=250$，$x_2=100$。这就是线性规划问题的最优解，即购买原料 A 250 吨，购买原

料B 100吨，可使成本最小。最小总成本为：2×250+3×100=800(万元)。

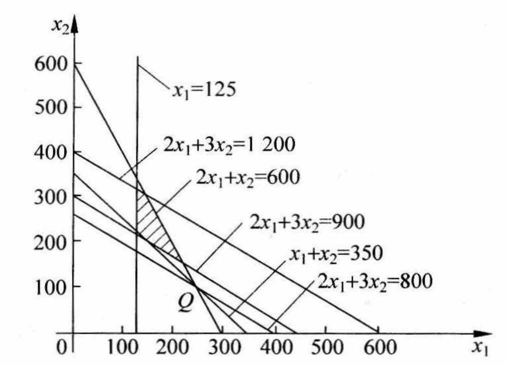


图 1-4

1.3 线性规划的标准型和解的性质

1.3.1 线性规划问题的标准型

前面我们曾给出了线性规划问题的一般形式，可以看出，其中目标函数有的要求最大，有的要求最小；约束条件可以是"≤"，也可以是"≥"形式的不等式，还可以是等式。决策变量一般是非负约束，但也允许在(−∞,∞)范围内取值，即无约束。为了进一步研究和讨论，就需要把线性规划的一般形式化为统一的标准形式。这里的标准形式有以下规定：

(1) 目标函数是求最大值；

(2) 所有约束条件均用等式表示；

(3) 所有决策变量均取非负数；

(4) 所有约束常数均为非负数。

于是，具有 m 个约束条件和 n 个决策变量的线性规划问题的标准型为

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases} \tag{1-4}$$

简写为

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i & (i=1,2,\cdots,m)\\ x_j \geqslant 0 & (j=1,2,\cdots,n)\end{cases} \tag{1-5}$$

其中 $\boldsymbol{C}=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$，$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{P}_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj})^{\mathrm{T}}$ 为对应于决策变量 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$的系数列向量，$b=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^{\mathrm{T}}$。

用矩阵形式描述时为：

$$\max z = \boldsymbol{CX}$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{X}\geqslant \boldsymbol{0}\end{cases} \tag{1-6}$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

称为约束系数矩阵。

一般可以通过以下方法，把非标准型线性规划化为标准型。

(1) 目标函数的标准化。如果线性规划问题是求目标函数的最小值，即 $\min z=\boldsymbol{CX}$，则由 $\min z=-\max(-z)$，令 $z'=-z$，得 $\max z'=-\boldsymbol{CX}$，这就同标准型的目标函数的形式一致了。但要注意，如果要求原问题的最优值，应取 z'最优值的相反数。

(2) 约束条件的标准化。当约束条件为“$\leqslant$”形式的不等式，可在不等式左边加上一个非负的新变量，也就是松弛变量，把不等号变为等号；当约束条件为“$\geqslant$”形式的不等式，可在不等式左边减去一个非负的剩余变量(也可称松弛变量)，把不等号变为等号。

(3) 决策变量的标准化。如果某一变量 x_k 是一个符号不受限制的自由变量，可以引入两个非负的新变量 x_k'和 x_k''，并作变换 $x_k=x_k'-x_k''$，化为非负变量。

(4) 约束常数的标准化。如果有某约束常数为负数，可在等式(或不等式)两边同时乘以-1，把约束常数变为正数。

【例 1-3】 把下面线性规划模型化为标准型：

$$\max z = 2x_1+3x_2+x_3$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1+x_2+x_3\leqslant 3\\ x_1+4x_2+7x_3\leqslant 9\\ x_1,x_2,x_3\geqslant 0\end{cases}$$

解：此例只有约束条件不符合标准型，为此引入非负的松弛变量 x_4，x_5 分别加到第一和第二个不等式的左边，即得标准型：

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 + x_5 = 9 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0 \end{cases}$$

注意，所加松弛变量 x_4，x_5 表示没有被利用的资源，当然也没有利润，所以在目标函数中 x_4，x_5 的系数应为零。

【例 1-4】 将下面线性规划问题化为标准型：

$$\min z = -x_1 - 6x_2 - 3x_3$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 \geqslant 2 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1, x_2 \geqslant 0, x_3 \text{ 为无约束} \end{cases}$$

解：令 $z' = -z$，把求 $\min z$ 改为求 $\max z'$；

由 x_3 为无约束变量，用 $x_4 - x_5$ 替换 x_3，其中 $x_4, x_5 \geqslant 0$；

在第一个约束不等式“$\leqslant$”的左边加入松弛变量 x_6；

在第二个约束不等式“$\geqslant$”的左边减去剩余变量 x_7；

这样即可得到该问题的标准型：

$$\min z' = x_1 + 6x_2 + 3(x_4 - x_5) + 0x_6 + 0x_7$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} x_1 + x_2 + (x_4 - x_5) + x_6 = 7 \\ x_1 - x_2 + (x_4 - x_5) - x_7 = 2 \\ -3x_1 + x_2 + 2(x_4 - x_5) = 5 \\ x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7 \geqslant 0 \end{cases}$$

1.3.2 线性规划问题的解的概念和基本性质

对于线性规划问题标准型：

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1-7}$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \\ x_j \geqslant 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, n) \end{cases} \tag{1-8}$$

称满足约束条件(1-8)的变量 $x_j (j=1,2,\cdots,n)$ 的一组值为线性规划问题的可行解，满足目标函数(1-7)的可行解称为最优解，最优解对应的目标函数值称为最优值。

设 $\boldsymbol{A}$ 是约束方程组 $m \times n$ 阶系数矩阵，其秩为 $m(m \leqslant n)$，如果 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 中 $m \times m$ 阶非

奇异子矩阵(即 $|\boldsymbol{B}|\neq 0$),则称 $\boldsymbol{B}$ 是线性规划问题的一个基。显然,基 $\boldsymbol{B}$ 由 m 个线性无关的列向量组成,基的个数不超过 m 个。不失一般性,不妨设基 $\boldsymbol{B}$ 位于 $\boldsymbol{A}$ 的前 m 列,即

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_n)$$

称 $\boldsymbol{P}_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj})^{\mathrm{T}}(j=1,2,\cdots,n)$ 为基向量,与基向量 $\boldsymbol{P}_j$ 相对应的变量 X_j 叫基变量,其他的变量称为非基变量。

对于基 $\boldsymbol{B}$,若令所有非基变量都等于零,所得到的约束方程组的解,称为该线性规划问题的一个基本解。显然,有一个基,就有一个基本解。这里要指出,基本解不一定是可行解,因为它不一定满足非负条件;同样,可行解也不一定是基本解,因为其所含的非基变量未必都取零值。

满足非负条件的基本解,称为基本可行解,对应于基本可行解的基,称为可行基。显然,基本可行解的非零分量数不超过 m 个。当基本可行解的非零分量个数少于 m 时,则基本可行解中至少有一个基变量取值为零,称此为退化的基本可行解。

满足目标函数(1-7)的基本可行解,称为基本最优解,对应于基本最优解的基,称为最优基。

【例 1-5】 讨论线性规划问题的基、基本可行解和对应的目标函数值。

$$\max z = x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 2x_1+3x_2\leqslant 100 \\ 4x_1+2x_2\leqslant 120 \\ x_1,x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

解:化为标准型得

$$\max z = x_1+x_2+0x_3+0x_4$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3 \qquad = 100 \\ 4x_1+2x_2 \qquad +x_4 = 120 \\ x_1,x_2,x_3,x_4\geqslant 0 \end{cases}$$

显然系数矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_3,\boldsymbol{P}_4)=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$。

取 $\boldsymbol{B}_1=(\boldsymbol{P}_3,\boldsymbol{P}_4)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,它是线性规划的一个基,基向量为 $\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{P}_4=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,对应的基变量为 x_3 和 x_4,非基变量为 x_1 和 x_2。令非基变量 $x_1=x_2=0$,解约束方程组得 $\boldsymbol{X}^{(1)}=(0,0,100,120)^{\mathrm{T}}$,它是一个基本解,由于满足非负条件,所以又是可行解,因而是基本可行解,$\boldsymbol{B}_1$ 是可行基,目标函数 $z=0$。

该线性规划问题共有 6 个基,因而有 6 个基本解,除了 $\boldsymbol{X}^{(1)}$ 外,另外 5 个是:

$\boldsymbol{B}_2=(\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_4)=\begin{pmatrix}3 & 0\\2 & 1\end{pmatrix}$，基本解为 $\boldsymbol{X}^{(2)}=(0,100/3,0,160/3)^{\mathrm{T}}$，它是可行解，$\boldsymbol{B}_2$ 为可行基，目标函数 $z=\dfrac{100}{3}$。

$\boldsymbol{B}_3=(\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_1)=\begin{pmatrix}3 & 2\\2 & 4\end{pmatrix}$，基本解为 $\boldsymbol{X}^{(3)}=(20,20,0,0)^{\mathrm{T}}$，它是可行解，$\boldsymbol{B}_3$ 为可行基，目标函数 $z=40$。

$\boldsymbol{B}_4=(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_3)=\begin{pmatrix}2 & 1\\4 & 0\end{pmatrix}$，基本解为 $\boldsymbol{X}^{(4)}=(30,0,40,0)^{\mathrm{T}}$，它是可行解，$\boldsymbol{B}_4$ 为可行基，目标函数 $z=30$。

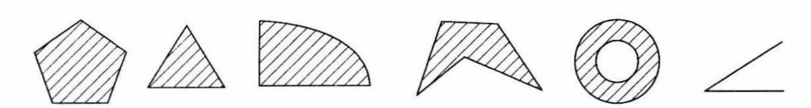
$\boldsymbol{B}_5=(\boldsymbol{P}_3,\boldsymbol{P}_2)=\begin{pmatrix}1 & 3\\0 & 2\end{pmatrix}$，基本解为 $\boldsymbol{X}^{(5)}=(0,60,-80,0)^{\mathrm{T}}$，由于 $x_3<0$，故它不是可行解，$\boldsymbol{B}_5$ 不是可行基，目标函数值不存在。

$\boldsymbol{B}_6=(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_4)=\begin{pmatrix}2 & 0\\4 & 1\end{pmatrix}$，基本解为 $\boldsymbol{X}^{(6)}=(50,0,0,-80)^{\mathrm{T}}$，它不是可行解，$\boldsymbol{B}_6$ 不是可行基，目标函数值不存在。

下面归纳一下线性规划问题解的性质。在这之前，先介绍两个有关的概念。

凸集 如果集合 K 中任意两点 $X^{(1)},X^{(2)}$ 连线上的所有点都是集合 K 中的点，即如果对于任意的 $X^{(1)},X^{(2)}\in K$，都有 $\alpha X^{(1)}+(1-\alpha)X^{(2)}\in K(0\leqslant\alpha\leqslant1)$，则称 K 为凸集。

例如图 1-5 中的(1)，(2)，(3)为凸集，而(4)，(5)，(6)不是凸集。



(1) (2) (3) (4) (5) (6)

图 1-5

顶点 如果凸集 K 中的点 X，不能成为任何线段的内点，即如果 $X\in K$，对任意 $X^{(1)},X^{(2)}\in K$，都不存在 $\alpha(0<\alpha<1)$，使得 $X=\alpha X^{(1)}+(1-\alpha)X^{(2)}(0<\alpha<1)$，则称 X 为 K 的一个顶点。例如三角形、正方形、凸多边形的顶点，凸无界区域的顶点及圆周上的点等都是。

从图解法的例子中知道线性规划问题的可行域是一个凸集，且如果问题有最优值，都是在顶点上达到。这些性质推广到一般，就是下面几个重要定理。

定理 1.1 线性规划问题的可行解集 D 是一个凸集。

定理 1.2 可行域 D 中的点 X 是顶点的充要条件是 X 为基本可行解。

引理 线性规划的可行解是基本可行解的充要条件是该可行解的非零分量对应的系数列向量线性无关。