

全国高等教育自学考试经济管理类

高等数学(一)(财经类)

学习指导

GAODENG SHUXUE XUEXIZHIDAO

徐淑娟 王明华
陈幸龄 赵 焰

东北财经大学出版社

全国高等教育自学考试经济管理类

高等数学（一）（财经类）

学习指导

徐淑娟

王明华

陈幸龄

赵 焰

东北财经大学出版社

(辽)新登字 10 号

高等数学 (一) (财经类) 学习指导

徐淑娟 王明华 陈幸龄 赵焰

东北财经大学出版社出版发行 (大连黑石礁)

山东省安丘县商标印刷厂印刷

开本: $787 \times 1092 \frac{1}{32}$ 印张: 17 字数: 367 000

1993 年 2 月第 1 版 1993 年 2 月第 1 次印刷

责任编辑: 杨放 高晓明 责任校对: 徐明 陈焰

印数: 1—33 000

ISBN 7—81005—691—3/O · 12 定价: 9.40 元

前 言

《高等数学(一)(财经类)学习指导》是在财政部教育司组织领导下,根据全国高等教育自学考试委员会规定的高等数学(一)(财经类)考试大纲,围绕指定教材《经济应用数学基础(一)微积分》(赵树嫄编)和《高等数学(一)微积分》(财经管理类专业)(高汝熹编)的基本内容编写的。

考虑到成人在自学高等数学过程中,往往感到抽象难懂,特别是解题分析时遇到一定的困难,为了帮助学员学习高等数学这门课程,我们特编写这本《高等数学(一)(财经类)学习指导》。

该书在选材、例题解析、结构形式上都尽量适应成人自学的特点,注重几何直观说明,较好地兼顾严格性与通俗性的关系,在叙述上力求深入浅出,通俗易懂。因此,它既可作为自学者的辅导书,又可作为自修大学、函授大学、夜大学、职工大学学生备考应试的指导书,也可供教师及财经工作者参考用书。

本书共分九章五十节,每节均由三部分组成:

内容概要 扼要列出本章节所学的主要定义、定理、公式和法则,便于学员学习时查阅,帮助学员归纳内容要点。

注 释 简要点明内容的重点,明确指出攻克难点的关键,系统归纳计算方法和步骤,剖析容易混淆的概念,帮助和指导学员理解基本概念,基本理论,掌握基本的计算方法。

例题解析 精选适量的基本题,体现该部分内容的要求,通过详尽地解答分析,开拓学员解题思路。帮助学员正确理解概念,熟练掌握解题方法,并能举一反三。

小结 综合题分析 作为每一章的综合部分,安排在各节

内容之后,配有一定难度的提高题,强调概念与概念之间的内在联系与区别,强调总体方法上的解题思路、关键步骤和技巧,各章还配有一定数量的练习题和自测题,以测试自己对基本内容掌握程度。附有近期全国性自学考试试题及解答,书末附有习题、自测题答案或提示。我们希望通过《高等数学(一)(财经类)学习指导》,使广大学员熟练掌握高等数学的基本内容,提高解题能力、分析问题和应用的能力。

书中标有※号的内容、例题只作一般要求,可供有余力的学员选读。

本书由徐淑娟任主编,王明华、陈幸龄、赵焰任副主编。其中第一章、第五章、第六章由陈幸龄执笔;第二章、第七章由赵焰执笔;第三章、第四章由王明华执笔;第八章、第九章由徐淑娟执笔。书中插图由臧小峰绘制。

本书在编写中,得到中南财经大学成人教育学院和经济信息系领导的大力支持和帮助,在此表示衷心的感谢。

由于我们的水平有限,加之编写时间仓促,书中不妥之处在所难免,恳请批评指正。

编 者

一九九二年九月于中南财经大学

目 录

第一章 函数	1
一 函数的概念及性质	1
二 反函数	12
三 复合函数与初等函数	15
四 常用经济函数与函数关系式的建立	21
五 小结 综合题分析	25
习题一	35
自测题一	38
第二章 极限与连续	41
一 极限的概念	41
二 无穷小量与无穷大量	48
三 极限的运算法则和两个重要极限	53
四 函数的连续性	63
五 小结 综合题分析	71
习题二	83
自测题二	87
第三章 导数与微分	89
一 导数的概念	89
二 函数的求导方法	97
三 微分	107
四 边际与弹性	112
五 小结 综合题分析	117
习题三	139
自测题三	144
第四章 中值定理与导数应用	147

一 中值定理	147
二 罗必达法则	152
三 函数的增减性	158
四 函数的极值及其应用	161
五 函数作图	165
六 小结 综合题分析	171
习题四	197
自测题四	201
第五章 不定积分	204
一 不定积分的概念	204
二 不定积分的性质及基本积分公式	209
三 换元积分法	215
四 分部积分法	230
五 有理函数的积分	235
六 小结 综合题分析	240
习题五	261
自测题五	264
第六章 定积分	266
一 定积分的概念及性质	266
二 微积分学基本定理	273
三 定积分的换元法与分部积分法	278
四 广义积分	284
五 定积分的应用	290
六 小结 综合题分析	298
习题六	318
自测题六	322
第七章 无穷级数	326
一 无穷级数的概念及基本性质	326
二 正项级数	333

三 任意项级数	339
四 幂级数	345
五 函数的幂级数展开	352
六 小结 综合题分析	360
习题七	386
自测题七	391
第八章 多元函数	394
一 空间解析几何简介	394
二 多元函数的概念	402
三 多元函数的微分法	411
四 多元函数偏导数的应用	427
五 二重积分	434
六 小结 综合题分析	448
习题八	466
自测题八	471
第九章 微分方程初步	476
一 微分方程的基本概念	476
二 一阶微分方程	479
三 二阶微分方程	488
四 微分方程在经济分析中的应用	497
五 小结 综合题分析	500
习题九	506
自测题九	508
一九九一年上半年高等数学(一)自学考试试题	510
自学考试试题参考答案及评分标准	517
习题、自测题参考答案或提示	521

第一章 函 数

函数是对存在于物质世界中的各种变量之间相互依存关系的一种抽象,它是数学分析研究的基本对象,因而是重要概念之一;本章所讨论的函数概念、函数关系及函数性质是以后各章内容的基础,也是学习自然科学和社会科学的必备知识。

一、函数的概念及性质

内 容 概 要

(一) 集合

1. **集合** 指具有某种共同属性的一些对象的全体,常用大写字母 $A, B, C \cdots$ 表示,构成集合的每一个对象称为这个集合的**元素**,用小写字母 $a, b, c \cdots$ 表示。若 a 是集合 A 中的元素,则记作 $a \in A$,读作“ a 属于 A ”;若 a 不是集合 A 中的元素,则记作 $a \notin A$,读作“ a 不属于 A ”。

2. 集合的表示法

(1) **列举法** 按任意顺序列出集合中的所有元素,并用花括号括起来。

(2) **示性法** 把集合中具有某种共同属性描述出来,记作 $A = \{x | x \text{ 具有的某种共同属性}\}$

3. 集合的类型

(1) **有限集** 集合中所包含的元素的个数是有限个,称为有限集。

(2) **无限集** 集合中所包含的元素的个数是无限个,称为无限集。

(3) **空集** 不含有任何元素的集合称为空集,记作 $\emptyset$ 。

(4) **全集** 由所研究的所有事物构成的集合称为全集,记作 U 。

(5) **子集** 设有集合 A 和集合 B , 如果 A 中的任何一个元素都是 B 中的元素, 则称 A 是 B 的子集, 记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$, 读作 A 包含于 B 或 B 包含 A 。

4. 集合的运算

(1) **相等** 集合 A 与集合 B 含有相同的元素, 称 A 与 B 相等, 记作 $A = B$ 。

(2) **并** 集合 A 与集合 B 中所有元素汇总构成的集合, 称为 A 与 B 的并集, 记作 $A \cup B$, 即

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

(3) **交** 既属于集合 A 又属于集合 B 的公共元素汇总构成的集合, 称为 A 与 B 的交集, 记作 $A \cap B$, 即

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

(4) **差** 属于集合 A 而不属于集合 B 的所有元素汇总构成的集合, 称为 A 与 B 的差集, 记作 $A - B$, 即

$$A - B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$$

(5) **补** 全集 U 中不属于集合 A 的所有元素汇总构成的集合, 称为 A 的补集, 记作 A' , 即

$$A' = \{x | x \in U \text{ 且 } x \notin A\}$$

(二) 实数集

1. 实数与数轴 有理数集与无理数集的并集称为实数集。实数集充满整个数轴且具有连续性,全体实数与数轴上的全体点形成一一对应关系。

2. 绝对值定义及运算性质

(1) **绝对值** 任意实数 x 的绝对值,记作 $|x|$ 定义为

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

(2) **运算性质**

$$1) |x| \geq 0$$

$$2) |x| = \sqrt{x^2}$$

$$3) |-x| = |x|$$

$$4) -|x| \leq x \leq |x|$$

$$5) |x+y| \leq |x| + |y|$$

$$6) |x-y| \geq |x| - |y|$$

$$7) |xy| = |x||y|$$

$$8) \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0)$$

$$9) |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \quad (a > 0)$$

$$10) |x| \geq b \Leftrightarrow x \geq b \text{ 或 } x \leq -b \quad (b > 0)$$

符号“ $\Leftrightarrow$ ”表示由左边可推出右边,由右边可推出左边,即左、右两边是等价的。

3. 有限区间

$$(1) \text{ 开区间 } (a, b) = \{x | a < x < b\}$$

$$(2) \text{ 闭区间 } [a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$$

$$(3) \text{ 半开区间 } (a, b] = \{x | a < x \leq b\}$$

或 $[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$

其中 a, b 为任意实数,且 $a < b$ 。

4. 无限区间

$$(1) (a, +\infty) = \{x | x > a\} \quad (2) [a, +\infty) = \{x | x \geq a\}$$

$$(3) (-\infty, a) = \{x | x < a\} \quad (4) (-\infty, a] = \{x | x \leq a\}$$

$$(5) (-\infty, +\infty) = \{x | -\infty < x < +\infty\}$$

5. 邻域 开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x \mid |x - x_0| < \delta, \delta > 0\}$ 称为以 x_0 为中心, δ 为半径的邻域。

(三) 函数的概念及性质

1. 映射 设 X, Y 都是非空集合, 如果存在一种确定的对应关系 f , 使得 X 中的任何一个元素, 通过关系 f , Y 中有唯一确定的元素与它对应, 则称 f 是从 X 到 Y 的映射, 记作

$$f: X \rightarrow Y$$

2. 函数的定义 设 X, Y 都是非空实数集, 如果数集 X 中的任一数 x , 按照确定的对应关系 f 与数集 Y 中唯一确定的数 y 对应, 则称 f 是定义在数集 X 上的函数。这里 X 称为函数的定义域, 记作 $D(f)$ 。与 X 中任一数 x 由关系 f 对应的 y 称为 f 在 x 处的函数值, 记作 $y = f(x)$, 通常称 x 为自变量, y 为因变量。在 x_0 处的函数值记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$ 。

函数值的集合称为函数的值域, 记作 $Z(f)$, 即

$$Z(f) = \{y \mid y = f(x), x \in D(f)\}$$

由于 $Z(f)$ 中的任一数 y 必是 Y 中的数, 所以有 $Z(f) \subset Y$ 。

3. 函数的表示法

(1) 解析法 用解析式表示函数的方法称为解析法。

1) 显函数 函数关系由明显解析式 $y = f(x)$ 所确定, 称为显函数。

2) 分段函数 由两个或两个以上的解析式表示一个函数, 称为分段函数。

3) 隐函数 函数关系由方程式 $F(x, y) = 0$ 所确定, 称为隐函数。

4) 参变量函数 函数关系由参数方程 $x = \varphi(t), y = h(t), t \in T$ (T 为 t 的取值范围) 所确定, 称为参变量函数。

(2) 表格法 用列表的方法表示函数对应关系, 称为表格

法。

(3) **图示法** 用平面坐标系上的曲线图形确定函数关系,称为图示法。

4. 函数的性质

(1) **奇偶性** 设 $f(x)$ 是定义在对称于原点的数集 D 上的函数,如果对任意 $x \in D$,有 $-x \in D$,且

$$f(-x) = -f(x) \quad (\text{或 } f(-x) = f(x))$$

则称 $f(x)$ 为奇函数(或偶函数)。

(2) **单调性** 设 $f(x)$ 是定义在数集 D 上的函数,如果对于任意 $x_1, x_2 \in D$,且 $x_1 < x_2$,有

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (\text{或 } f(x_1) > f(x_2))$$

则称 $f(x)$ 在 D 上单调增加(或单调减少)。

单调增加与单调减少统称为单调。如果 D 是区间,则该区间称为单调区间。

(3) **周期性** 设 $f(x)$ 是定义在数集 D 上的函数,如果存在正数 T ,对于任意 $x \in D$,有 $x + T \in D$,且

$$f(x + T) = f(x)$$

则称此函数为周期函数,使得上式成立的最小正数 T 称为该函数的周期。

(4) **有界性** 设 $f(x)$ 是定义在数集 D 上的函数,如果存在正常数 M ,使得对任意 $x \in D$,有

$$|f(x)| \leq M$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界。

注 释

(一) 集合中元素的属性

集合中每个元素的属性必须是确定而不含混的,即任何一

个元素与已知集合的关系只有两种可能,属于这个集合或者不属于这个集合,二者必居其一,且只居其一。

(二) 绝对值的几何意义

1. 任意实数 x 的绝对值 $|x|$ 表示数轴上的点 x (不论点 x 在原点左边还是右边) 与原点 O 之间的距离。

2. 任意两个实数 x, y (不论是 $x > y$, 还是 $x < y$), 绝对值 $|x - y|$ 表示点 x 与点 y 之间的距离。

(三) 函数概念的要害

1. 自变量 x , 它在函数关系中起主动作用, 定义域 $D(f)$ 是自变量 x 的变化范围; 因变量 y 是被动的, 它的变化依赖于 x , 值域 $Z(f)$ 是因变量 y 的变化范围, 它的确定与定义域 $D(f)$ 是有关的。

2. f 是 y 关于 x 的依存关系, 通过这个关系, y 值就能由 x 值来唯一确定。也就是说, 对任意 $x \in X$, 只能有唯一的 $y \in Y$ 与之对应, 若任意 $x \in X$ 有多个 $y \in Y$ 与之对应, 则不符合函数的定义。例如, $y = \pm \sqrt{x}$ 不符合函数定义, 若拆成两个单支 $y = \sqrt{x}$ 和 $y = -\sqrt{x}$ 则它们在区间 $(0, +\infty)$ 内是符合函数定义的。

3. 函数定义中的对应关系有两种可能:

(1) 不同的 x 值对应不同的 y 值。例如, $f(x) = 2x + 1$, 当 $x_1 \neq x_2$ 时, 就有 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 。

(2) 不同的 x 值对应相同的 y 值。例如, $f(x) = x^2$, 当 $x = a$, $x = -a$ 时, 有 $f(-a) = f(a) = a^2$ 。

4. 确定一个函数的关键因素是对应关系 f 和定义域 $D(f)$, 至于自变量和因变量用什么记号表示, 则无关紧要。如果两个函数的对应关系和定义域都相同, 则称这两个函数相同, 否则就是不同。

5. 函数符号的不同均表示不同的函数意义。例如 $f(x)$ 与 $h(x)$ 表示不同的函数; $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 表示同一个函数在不同点的函数值; $f(x^2)$ 表示自变量平方后的函数值, 而 $f^2(x)$ 却表示自变量的函数值的平方, ... 等等。

(四) 函数的几何性态

1. 函数的图形 用 x 轴上的点表示自变量的值, 用 y 轴上的点表示相应的函数值。这样, $D(f)$ 内的每个 x 及函数值 $f(x)$ 就确定了平面直角坐标系中的一个点 (x, y) , 当 x 在 $D(f)$ 内变动时, 点集 $\{(x, y) | x \in D(f), y = f(x)\}$ 就是函数 $y = f(x)$ 的图形。

2. 函数性质的几何特征

(1) 定义在数集 D 上的奇函数, 其函数图形关于原点对称, 当 D 是对称区间 $[-a, a]$ 时, 图形必经原点; 定义在数集 D 上的偶函数, 其函数图形关于 y 轴对称, 当 D 是对称区间 $[-a, a]$ 时, 图形必经 y 轴。($a > 0$)

(2) 单调增加函数的图形沿 x 轴正向逐渐上升; 单调减少函数的图形沿 x 轴正向逐渐下降。

(3) 在数集 D 上有界函数的图形介于两水平直线 $y = M$ 与 $y = m$ 之间。其中 M 与 m 均为常数。

(4) 周期函数当自变量每增加或减少一个周期时, 图形重复出现。

例题解析

例 1.1 用列举法表示下列集合。

(1) 方程 $x^2 + 2x + 1 = 0$ 的根的集合;

(2) $\{x | |x - 1| \leq 2 \text{ 的整数}\}$ 。

解 (1) 由 $x^2 + 2x + 1 = 0$

得 $(x + 1)^2 = 0$

则方程 $x^2 + 2x + 1 = 0$ 有重根 $x = -1$, 所以该集合用列举法表示为 $\{-1\}$ 。

说明 集合中有两个相同元素时, 可以将它们作为一个元素表示。

$$(2) |x - 1| \leq 2 \text{ 等价于 } -2 \leq x - 1 \leq 2, \text{ 即} \\ -1 \leq x \leq 3$$

满足上式的所有整数构成该集合, 即

$$\{-1, 0, 1, 2, 3\}$$

例 1.2 如果 $A = \{x | 3 < x < 5\}$, $B = \{x | x \geq 4\}$, 求

$$(1) A \cup B \quad (2) A \cap B \quad (3) A - B$$

解 (1) $A \cup B = (3, 5) \cup [4, +\infty) = (3, +\infty)$

$$(2) A \cap B = (3, 5) \cap [4, +\infty) = [4, 5)$$

$$(3) A - B = (3, 4)$$

例 1.3 解下列不等式, 将解集用集合表示。

$$(1) (2x - 1)^2 < 4 \quad (2) |x + 1| \geq 2$$

解 (1) 在不等式两边开平方得

$$\sqrt{(2x - 1)^2} < 2$$

$$\text{即} \quad |2x - 1| < 2$$

$$\text{上式等价于} \quad -2 < 2x - 1 < 2$$

$$\text{移项合并} \quad -1 < 2x < 3$$

$$\text{得} \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$$

$$\text{不等式解集为} \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$(2) |x + 1| \geq 2 \text{ 等价于 } x + 1 \geq 2 \text{ 或 } x + 1 \leq -2$$

$$\text{即} \quad x \geq 1 \text{ 或 } x \leq -3$$

所以不等式解集为

$$(-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$$

例 1.4 (1) 设 $f(x) = \begin{cases} 2-x, & 1 < x \leq 2 \\ \frac{x-2}{x+1}, & 2 < x \leq 3 \end{cases}$

求其定义域及函数值 $f(3)$ 。

(2) 将 $y = 2 - |x + 1|$ 表示为分段函数, 并画出其图形。

解 (1) 函数 $f(x)$ 在区间 $(1, 2]$ 与 $(2, 3]$ 内都有定义, 因此定义域为 $(1, 2] \cup (2, 3] = (1, 3]$

由于 $x = 3 \in (2, 3]$, 所以

$$f(3) = \left. \frac{x-2}{x+1} \right|_{x=3} = \frac{3-2}{3+1} = \frac{1}{4}$$

(2) 根据绝对值的定义得

$$|x+1| = \begin{cases} x+1, & x+1 \geq 0 \\ -(x+1), & x+1 < 0 \end{cases}$$

则当 $x+1 \geq 0$ 时,

即 $x \geq -1$ 时,

$$\begin{aligned} y &= 2 - |x+1| \\ &= 2 - (x+1) \\ &= 1 - x; \end{aligned}$$

当 $x+1 < 0$ 时,

即 $x < -1$ 时,

$$\begin{aligned} y &= 2 + (x+1) \\ &= 3 + x. \end{aligned} \text{ 因此有}$$

$$y = \begin{cases} 1-x, & x \geq -1 \\ 3+x, & x < -1 \end{cases}$$

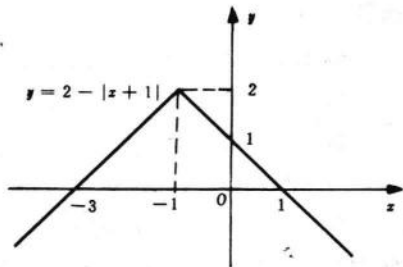


图 1-1

其图形见图 1-1

说明 1) 分段函数是用几个式子合起来表示一个函数, 而不是表示几个函数。其定义域是各段定义域的并集, 其函数值必须按段确定。 2) 化 $|f(x)|$ 为分段函数, 分点是 $|f(x)| = 0$ 的根。