高等学校教材

线性代数

主编 张国印 徐鹤卿
副主编 方芬 伍鸣 汪建 魏广华

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高 等 学 校 教 材

线性代数

Xianxing Daishu

主　编　张国印　徐鹤卿
副主编　方　芬　伍　鸣
　　　　汪　建　魏广华

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书针对应用型人才的培养目标和学习特点，内容深入浅出、理论推导简明、选例鲜活有趣。主要内容包括行列式、矩阵及其运算、向量组的线性相关性与矩阵的秩、线性方程组、特征值与特征向量、矩阵的对角化、二次型、线性空间与线性变换，书后附线性代数实验及部分习题答案。

本书可作为应用型本科院校工学、经济学、管理学、农学等门类专业线性代数课程的教材或参考书，也可供工程技术人员、科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/张国印，徐鹤卿主编. —北京：高等教育出版社，2012.1

ISBN 978-7-04-033799-0

Ⅰ.①线… Ⅱ.①张… ②徐… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 248887 号

策划编辑	张彦云	责任编辑	张彦云	封面设计	于　涛	版式设计	杜微言
插图绘制	黄建英	责任校对	金　辉	责任印制	刘思涵		

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	唐山市润丰印务有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×960mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	14	版　　次	2012 年 1 月第 1 版
字　　数	256 千字	印　　次	2012 年 1 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	21.00 元

物 料 号　33799-00

前　　言

当前我国高等教育理念已经发生了深刻的变化，为适应社会需求，培养全方位、多层次、有较宽广的理论基础和较强应用能力的人才已成为许多高等学校的共识，这种理念的重大转变自然带来了教学内容和教学模式的变化，相应的教材改革不可避免。为适应这一变化，编者分析了曾经使用过的一些教材存在的不足，结合国内外同类优秀教材将科学性、实用性融于一体的成功经验，根据“工科类、经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”，在多年从事线性代数教学的基础上编写了本书。

本书有如下特点：

1. 选取了一些在实际应用中鲜活、有趣的例子，穿插在例题、应用举例和习题中，并力图从实例引入概念和性质，加深学生的理解，将抽象的代数理论具体化。

2. 强调内容的实际背景与几何直观阐述，力求理论推导简单明了。对冗长或难度较大的部分基础理论推证，一般不证明或打“*”号处理。

3. 增加“线性代数实验”作为附录，讲述 MATLAB 在线性代数方面的基本功能与编程方法，培养学生用 MATLAB 解决线性代数问题的能力。

本书的基本教学时数应不低于 36 学时。对打“*”号的内容，教师可根据专业需要另外安排课时选讲，特别是对打“*”号的应用举例部分，可安排学生自学。

本书共七章，其中第一章由汪建编写，第二章由伍鸣编写，第三章由张国印编写，第四、第六章由方芬编写，第五、第七章由徐鹤卿编写，附录由魏广华编写，全书由张国印和徐鹤卿负责统稿。裴青洲和宋丁全对本教材的编写提供了大力支持，并提出了不少建设性意见，高等教育出版社对本书的出版给予了极大的帮助，编者在此一并表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，错漏之处在所难免，恳请专家及使用本书的师生给予批评指正。

编　者

2011 年 9 月于南京

目　　录

第一章　行　列　式

行列式是求解线性方程组的一个重要工具，在其他数学分支及一些实际问题中也常常用到.本章主要介绍行列式的定义、性质、计算方法以及求解 n 元 n 式线性方程组的公式——克拉默(Cramer)法则.

§1.1　n 阶行列式

本节主要介绍 n 阶行列式的定义.

1.1.1　二阶和三阶行列式

现通过二元、三元线性方程组解的表示来探究二阶、三阶行列式的定义.对于一个二元二式的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2, \end{cases} \quad a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0,$$

利用消元法，即在上述方程组第一式两边同乘 a_{22}，第二式两边同乘 a_{12} 后，将所得的两式作差，可得解

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad \text{同理可得}\quad x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

上式中 x_1，x_2 的表示式在一定条件下有其普遍性，但是上述公式不方便记忆.为了克服这一缺点，可以引进**二阶行列式**的概念.用符号 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 代表式子 $ad-bc$，即 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$，称符号 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 为二阶行列式，称上述方程组各变量前系数所在相对位置不变时构成的行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 为**系数行列式**.将上述二元二式的线性方程组的解用二阶行列式语言描述如下：

当系数行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$ 时，其解可写成

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

显然以这种形式给出的解呈现出明显的规律,它可以作为一般二元二式线性方程组的公式解.

例 1 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2=7, \\ 3x_1+5x_2=1. \end{cases}$$

解 方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=2\times5-4\times3=-2\neq0,$$

又
$$D_1=\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=31,\quad D_2=\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-19,$$

则方程组的解为
$$x_1=\frac{D_1}{D}=-\frac{31}{2},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{19}{2}.$$

对于三元三式的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

也有类似结果,即:

记
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}$$
$$-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},$$

称 D 为**三阶行列式**. 也称这个由方程组系数组成的行列式为三元三式线性方程组的**系数行列式**.

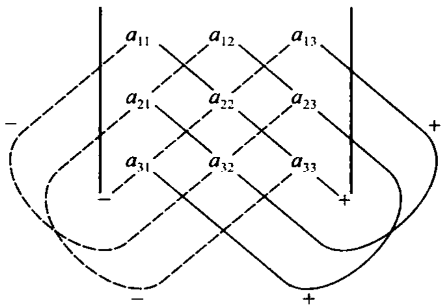
当 $D\neq0$ 时,用类似于二元情形的消元法求解这个方程组可得公式解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

三阶行列式实际上是一个算式，它可以由下面的**对角线法则**得到



$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

在上面的行列式中，每一条实线经过的三个元素的乘积带正号，每一条虚线经过的三个元素的乘积带负号，所得的六项的代数和就是三阶行列式的值.

例 2 求解线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+3x_2+4x_3=1,\\ x_1+2x_2+x_3=3,\\ 3x_1+x_2+2x_3=4.\end{cases}$$

解 由对角线法则容易得到方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}2&3&4\\1&2&1\\3&1&2\end{vmatrix}=2\times2\times2+3\times1\times3+4\times1\times1-4\times2\times3-3\times1\times2-2\times1\times1=-11.$$

同理可得

$$D_1=\begin{vmatrix}1&3&4\\3&2&1\\4&1&2\end{vmatrix}=-23,\quad D_2=\begin{vmatrix}2&1&4\\1&3&1\\3&4&2\end{vmatrix}=-15,\quad D_3=\begin{vmatrix}2&3&1\\1&2&3\\3&1&4\end{vmatrix}=20,$$

则方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{23}{11},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{15}{11},\quad x_3=\frac{D_3}{D}=-\frac{20}{11}.$$

一个自然的问题是，对 n 元 n 式的线性方程组是否有类似的结果？为了回答此问题，有必要将三阶行列式推广到一般情形——n 阶行列式. 需要指出的是，对角线法则只适用于二阶及三阶行列式的定义，下面将通过二阶与三阶行列式、一阶与二阶行列式的关系，找到低阶与高阶行列式之间的规律，进而推出 n 阶行列式的定义.

1.1.2 n 阶行列式的定义

由上面对二阶以及三阶行列式的描述，不难看出：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

上式表明三阶行列式可由二阶行列式得到.

若定义一阶行列式 $|a|=a$,则二阶行列式也可由一阶行列式得到:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}|a_{22}| - a_{12}|a_{21}|.$$

从而可由较低阶的行列式计算高阶行列式,下面采用递归的方法来定义 n 阶行列式.

定义 1.1.1 由 n^2 个元素 $a_{ij}\,(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 n 行 n 列的符号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.1}$$

称为 **n 阶行列式**,并规定:

当 $n=1$ 时,$D=|a_{11}|=a_{11}$;

$$\text{当 } n\geqslant 2 \text{ 时},\ D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}\ , \tag{1.2}$$

其中 $A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$,M_{1j} 为 D 中划去第 1 行、第 j 列的元素后,余下的元素按原来的相对位置不变构成的 $n-1$ 阶行列式,即

$$M_{1j}=\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

并称 M_{1j} 为**元素 a_{1j} 的余子式**,A_{1j} 为 a_{1j} **的代数余子式**,$j=1,2,\cdots,n$. n 阶行列式可简记为 $|a_{ij}|_{n\times n}$ 或 $\det(a_{ij})_{n\times n}$.

由定义易知,n 阶行列式 D 是一数值,该数值等于它的第一行各元素与其对应的代数余子式的乘积之和. 通常所谓计算行列式就是指将(1.1)式写成数值的形式.

一般地,用 $M_{ij}\,(i,j=1,2,\cdots,n)$ 来记在 n 阶行列式 D 中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行、第 j 列元素后,余下的元素按原来的相对位置不变构成的 $n-1$ 阶行列式,并称 M_{ij} 为**元素 a_{ij} 的余子式**,同时称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为**元素 a_{ij} 的代数余子式**.

例如，对行列式 $D=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$,

$$M_{12}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-2,\quad A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=2,$$

$$M_{31}=\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-4,\quad A_{31}=(-1)^{3+1}M_{31}=-4.$$

例 3 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \end{vmatrix}$.

解 $D=1\times\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 8 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix}-0\times\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 8 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}+2\times\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}-4\times\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

$=1\times55-0\times5+2\times(-9)-4\times5=17.$

定理 1.1.1 $n(n\geqslant2)$阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$等于它的第一列各元素与其对应的代数余子式的乘积之和，即

$$D=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}=\sum_{i=1}^{n}a_{i1}A_{i1}. \tag{1.3}$$

证 对 n 用数学归纳法.

当 $n=2$ 时，定理显然成立. 假设对 $n-1$ 阶的行列式成立，下面考虑 n 阶行列式. 由定义(1.2)式知

$$\begin{aligned} D &= a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n} \\ &= a_{11}A_{11}+\sum_{j=2}^{n}a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j}, \end{aligned}$$

其中 $M_{1j}=\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ $(j=2,3,\cdots,n)$为 $n-1$ 阶行列式，由假设，M_{1j}可按第一列展开计算，有

$$M_{1j}=\sum_{i=2}^{n}a_{i1}(-1)^{(i-1)+1}(M_{1j})_{i1}=\sum_{i=2}^{n}a_{i1}(-1)^{i}(M_{1j})_{i1},\quad j\neq 1,$$

其中$(M_{1j})_{i1}$是M_{1j}中元素a_{i1}的余子式($i=2,3,\cdots,n$)，它是D中先划去第一行、第j列($j\neq 1$)，再划去第i行、第一列所得的行列式，它与先划去第i行($i\neq 1$)、第一列，再划去第一行、第j列所得的行列式相同，即$(M_{1j})_{i1}=(M_{i1})_{1j}$，所以

$$\begin{aligned}
D&=a_{11}A_{11}+\sum_{j=2}^{n}a_{1j}(-1)^{1+j}\Big[\sum_{i=2}^{n}a_{i1}(-1)^{i}(M_{1j})_{i1}\Big]\\
&=a_{11}A_{11}+\sum_{j=2}^{n}a_{1j}(-1)^{1+j}\Big[\sum_{i=2}^{n}a_{i1}(-1)^{i}(M_{i1})_{1j}\Big]\\
&=a_{11}A_{11}+\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=2}^{n}(-1)^{1+j+i}a_{1j}a_{i1}(M_{i1})_{1j}\\
&=a_{11}A_{11}+\sum_{i=2}^{n}a_{i1}(-1)^{1+i}\Big[\sum_{j=2}^{n}a_{1j}(-1)^{1+(j-1)}(M_{i1})_{1j}\Big]\\
&=a_{11}A_{11}+\sum_{i=2}^{n}a_{i1}(-1)^{i+1}M_{i1}\\
&=a_{11}A_{11}+\sum_{i=2}^{n}a_{i1}A_{i1}=\sum_{i=1}^{n}a_{i1}A_{i1},
\end{aligned}$$

此式恰好是D按第一列的展开式. 证毕.

定理 1.1.2 $n(n\geqslant 2)$阶行列式 $D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$ 等于它的任意一行(列)各元素与其对应的代数余子式的乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(i=1,2,\cdots,n)\tag{1.4}$$

$$=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad(j=1,2,\cdots,n).\tag{1.5}$$

该定理可类似于定理 1.1.1 证明，此处从略.

例 4 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&0&0&1\\2&1&3&4\\0&2&0&1\\1&0&0&2\end{vmatrix}$.

(为了加深读者对定理 1.1.2 的理解，下面按两种不同的方式分别对行列式进行展开计算.)

解法 1 将行列式D按照第 2 行展开，则有

$$D=2\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}0&0&1\\2&0&1\\0&0&2\end{vmatrix}+1\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&0&1\\0&0&1\\1&0&2\end{vmatrix}+$$

$$3\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&0&1\\0&2&1\\1&0&2\end{vmatrix}+4\times(-1)^{2+4}\begin{vmatrix}1&0&0\\0&2&0\\1&0&0\end{vmatrix}$$

$$=0+0+(-6)+0$$

$$=-6.$$

解法 2 将行列式 D 按照第 3 列展开，则有

$$D=0\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2&1&4\\0&2&1\\1&0&2\end{vmatrix}+3\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&0&1\\0&2&1\\1&0&2\end{vmatrix}+$$

$$0\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&0&1\\2&1&4\\1&0&2\end{vmatrix}+0\times(-1)^{4+3}\begin{vmatrix}1&0&1\\2&1&4\\0&2&1\end{vmatrix}$$

$$=0+(-6)+0+0$$

$$=-6.$$

显然其结果是一致的. 同时从上例可见，在按行(列)展开计算行列式时，选择含有较多零元素的行(列)展开计算行列式较为方便.

n 阶行列式 $|a_{ij}|_{n\times n}$ 中，元素 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 所在的对角线称为行列式的**主对角线**，相应地，$a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 称为**主对角元**. 元素 $a_{n1},a_{n-1,2},\cdots,a_{1n}$ 所在的另一条对角线称为**副对角线**.

主对角线以上元素全为零的行列式(即当 $i<j$ 时，$a_{ij}=0$)

$$\begin{vmatrix}a_{11}&0&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&0&\cdots&0\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&a_{n3}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\quad\left(\text{或简记为}\begin{vmatrix}a_{11}&&&&\\a_{21}&a_{22}&&&\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&&\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\\a_{n1}&a_{n2}&a_{n3}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\right)$$

称为**下三角形行列式**.

例 5 计算 $n(n\geqslant 2)$ 阶下三角形行列式.

$$D_n=\begin{vmatrix}a_{11}&0&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&0&\cdots&0\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&a_{n3}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

解 $D_n = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \cdots$$

$$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

类似地，主对角线以下元素全为零的行列式（即当 $i>j$ 时，$a_{ij}=0$）称为**上三角形行列式**，此时对其可按第一列展开，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

主对角线以外元素都为零的行列式（即当 $i\neq j$ 时，$a_{ij}=0$），称为**对角行列式**，它既是下三角形行列式也是上三角形行列式，故

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

由上面的计算可以看到，**上、下三角形行列式、对角行列式的值都等于主对角线上元素乘积**.

例 6 计算 $D_n = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & \cdots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (n\geqslant 2)$.

解 $D_n = a_{1n}A_{1n} = (-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{2,n-1} \\ 0 & \cdots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} \end{vmatrix}$

$$= (-1)^{1+n}a_{1n}a_{2,n-1}\tilde{A}_{1,n-1} \quad （注：\tilde{A}_{1,n-1}\text{是 } n-2 \text{ 阶行列式}）$$