MATHEMATICAL ANALYSIS

# 数学分析

2

王学武 郭林 孙喜东 编

清华大学出版社

MATHEMATICAL ANALYSIS

# 数学分析 2

王学武 郭林 孙喜东 编

清华大学出版社
北京

# 前 言

FOREWORD

自从数学家欧拉编写了第一本微积分教科书以来，就有人说："后来的数学分析教科书，或者是抄袭欧拉的，或者是抄袭抄袭欧拉的．"但因为有不同风格的数学分析教师，也有不同需要的学生，所以估计中国有多少所重点大学，就有多少套数学分析教材．目前数学分析的教材已经很多了，其中有些教材已经成了经典教材．本书是众多数学分析教材中又多出来的一套，但它也并不是可有可无．

本书是在高等教育由精英教育逐渐演化为大众教育的背景下，考虑到山东工商学院数学系正在进行的围绕通识教育为核心的教学改革之需要，由函数论教研室的几位数学分析任课教师共同编写而成的．

数学分析课程是数学系的核心基础课程，对于培养严谨的思维习惯和专业素养有着决定性的作用，它的重要性是毋庸置疑的．传统大学开设数学分析的时间达到连续 4 个学期，目前国内一些高校虽缩短了课时，但也至少是 3 个学期．各高校数学系都十分重视数学分析课程的教学和研究，各大学也都对此给予了大力的支持．按照通识教育的要求，数学系入学第一年讲授的数学知识是一般性的基本知识，到了二年级再进行专业分流，这就引出了一个无法回避的问题：数学分析课程应该怎样设置？如果按照传统方式先连续开设两个学期，那么大多数专业分流以后，不选择数学专业的学生不再学习数学分析，而两个学期的数学分析又根本涵盖不了高等数学的基本内容，也达不到基本的要求．如果前两个学期选择开设公共高等数学，那么选修数学专业的学生第三学期再学数学分析，感觉是"接不上头"，教师也不知道该怎么讲才能前后内容贯通．数学课程不同于其他课程的根本在于知识结构的逻辑性，逻辑性不完善是会影响学习效果的．为此我们试图编写一套适合通识教育背景下的数学分析教材，共分 3 册，要求内容翔实、难度适中，适合我校和同类院校的学生使用．其知识体系完整，各部分内容既相对独立又有紧密联系．这就不能照搬以往的数学分

析或者高等数学教材．其中第 1 册、第 2 册既适合数学系学生，又适合对数学程度要求较高的理工科专业的学生使用．

本书不同于以往常见的数学分析教科书之处在于：它并不是按照知识体系中的先后逻辑次序来编写内容，而是按照学生的接受能力和专业选择来安排知识的排列次序．本书的第 1 册与第 2 册足以满足经济类各专业的学生学习微积分基本知识的要求，加上第 3 册的第 14 章，就足以满足理工科非数学专业的学生学习高等数学使用．全书包括了传统数学分析的主要内容，考虑到目前大学生课业繁重，因此没有安排涉猎过多的专题内容和应用问题，也没有配备大量的课后习题．全书适合各类大学尤其教学型大学的数学系学生使用．

由于平时教学科研任务繁重，用在编写教材上的精力有限，有道是“书不尽言言不尽意”，加之时间仓促，所以认知上的失误不敢保证没有，出错亦在所难免，恳请各位同行及读者批评指正．

全套书由王学武、郭林主笔，王利珍、孙喜东、刘柏峰参与了部分章节的编写和部分课后习题的解答工作．全书由郭林进行统稿整理．

编　者

2011 年 6 月于山东烟台

CONTENTS

# 目 录

第 7 章　数项级数 …… 1

7.1　数项级数的收敛性 …… 1

7.1.1　数项级数的概念 …… 1

7.1.2　收敛级数的性质 …… 4

习题 7-1 …… 6

7.2　正项级数 …… 7

习题 7-2 …… 16

7.3　变号级数 …… 18

7.3.1　交错级数 …… 19

7.3.2　一般变号级数 …… 20

7.3.3　一般项为“积”的变号级数 …… 22

习题 7-3 …… 25

第 8 章　函数项级数 …… 27

8.1　函数项级数的一致收敛性 …… 27

8.1.1　函数项级数的概念 …… 27

8.1.2　函数列的一致收敛性 …… 28

8.1.3　函数项级数的一致收敛性 …… 31

8.1.4　和函数的分析性质 …… 35

习题 8-1 …… 37

8.2　幂级数 …… 39

8.2.1　幂级数的收敛半径、收敛区间和收敛域 …… 39

8.2.2　幂级数的和函数的分析性质 …… 43

习题 8-2 …… 46

8.3 函数的幂级数展开 …… 47
8.3.1 泰勒级数与麦克劳林级数 …… 47
8.3.2 常见初等函数的麦克劳林级数 …… 49
8.3.3 函数的麦克劳林级数展开 …… 53
8.3.4 函数的泰勒级数展开 …… 56
习题 8-3 …… 57
8.4 和函数与数项级数和 …… 58
8.4.1 和函数 …… 58
8.4.2 数项级数的和 …… 61
习题 8-4 …… 65

第 9 章 傅里叶级数 …… 67

9.1 周期为 $2\pi$ 的周期函数的傅里叶级数 …… 67
9.1.1 三角函数系及其正交性 …… 67
9.1.2 函数的傅里叶级数展开 …… 68
习题 9-1 …… 74
9.2 正弦级数和余弦级数 …… 75
习题 9-2 …… 79
9.3 一般周期函数的傅里叶级数 …… 80
9.3.1 周期为 $2l$ 的周期函数的傅里叶级数 …… 80
9.3.2 偶函数与奇函数的傅里叶级数 …… 81
习题 9-3 …… 83

第 10 章 多元函数微分学 …… 84

10.1 多元函数的基本概念 …… 84
10.1.1 平面点集 …… 84
10.1.2 二元函数 …… 87
习题 10-1 …… 88
10.2 二元函数的极限及累次极限 …… 89
10.2.1 二元函数的极限 …… 89
10.2.2 累次极限 …… 91
习题 10-2 …… 92
10.3 二元函数的连续性 …… 93

10.3.1 二元连续函数的概念 …… 93
10.3.2 有界闭区域上二元连续函数的性质 …… 94
习题 10-3 …… 95
10.4 偏导数 …… 96
10.4.1 偏导数的概念 …… 96
10.4.2 高阶偏导数 …… 99
习题 10-4 …… 101
10.5 全微分 …… 102
10.5.1 全微分的定义 …… 102
10.5.2 可微的条件 …… 103
10.5.3 全微分在近似计算中的应用 …… 106
习题 10-5 …… 107
10.6 多元复合函数的求导法则 …… 108
10.6.1 多元复合函数的求导法则 …… 108
10.6.2 链式求导法 …… 111
10.6.3 全微分形式不变性 …… 113
习题 10-6 …… 114
10.7 方向导数与梯度 …… 115
10.7.1 方向导数 …… 115
10.7.2 梯度 …… 118
习题 10-7 …… 120

第 11 章 隐函数 …… 121

11.1 隐函数的存在性 …… 121
11.1.1 由一个方程确定的隐函数 …… 121
11.1.2 由方程组确定的隐函数组 …… 124
习题 11-1 …… 128
11.2 偏导数在几何中的应用 …… 129
11.2.1 空间曲线的切线与法平面 …… 129
11.2.2 曲面的切平面与法线 …… 133
习题 11-2 …… 136
11.3 二元函数的极值与最值 …… 137
11.3.1 无条件极值 …… 137

11.3.2 条件极值 …… 140
11.3.3 二元函数的最值 …… 144
习题 11-3 …… 147

第 12 章 重积分 …… 148

12.1 二重积分的概念与性质 …… 148
12.1.1 二重积分的概念 …… 148
12.1.2 二重积分的性质 …… 151
习题 12-1 …… 153
12.2 二重积分的计算 …… 154
习题 12-2 …… 161
12.3 二重积分的变量替换 …… 163
12.3.1 一般情况下变量替换 …… 163
12.3.2 极坐标变量替换 …… 165
习题 12-3 …… 169
12.4 三重积分及其计算 …… 171
12.4.1 三重积分 …… 171
12.4.2 三重积分的性质 …… 172
12.4.3 三重积分的计算 …… 172
12.4.4 三重积分的换元 …… 177
习题 12-4 …… 184
12.5 重积分的应用 …… 185
12.5.1 曲面的面积 …… 185
12.5.2 重心 …… 187
12.5.3 转动惯量 …… 188
习题 12-5 …… 190

习题参考答案与提示 …… 191

# 第 7 章

# 数项级数

无穷级数表示无穷多项之和. 它既可以为无穷多个数相加，这样的级数称为数项级数，也可以是无穷多个函数相加，这样的级数称为函数级数. 显然数项级数是函数级数的特殊情形. 级数是表示函数、研究函数性质以及用于数值计算的一个重要的数学工具，不但在数学本身，而且在自然科学、工程技术等领域中都有广泛的应用. 在本章首先讨论数项级数.

## 7.1 数项级数的收敛性

### 7.1.1 数项级数的概念

设 $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$ 是一个数列，对它的各项依次用加号连接起来的表达式

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

称为**数项级数**，简称**级数**，记作 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots, \tag{1}$$

其中 $u_n$ 称为级数的**通项**或**一般项**.

实际上由于无法直接对无穷多个实数进行加法运算，甚至难以想象何为无穷多个数的和，所以必须对上述级数求"和"运算给出合理的定义.

对于级数(1)，前 $n$ 项之和

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

称为级数(1)的**前 $n$ 项和**或**部分和**. 这是有限多项相加，当 $n$ 依次取 $1, 2, 3, \cdots$ 时，它们构成一个数列

$$S_1 = u_1, S_2 = u_1 + u_2, \cdots, S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \cdots.$$

于是，级数(1)的前 $n$ 项和组成一个数列 $\{S_n\}$，称为级数(1)的(有限)**部分和数列**.

**定义** 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛于 $S$(有限数)，则称此**级数收敛**，且称 $S$ 为级数(1) 的**和**，记为

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n.$$

如果部分和数列$\{S_n\}$发散，则称此**级数发散**.

**例 1** 等比数列的所有项之和组成的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}=a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}+\cdots$$

称为**几何级数**. 试讨论几何级数的收敛性.

**解** (1) 如果$|q|\neq1$，级数的前 $n$ 项和

$$S_n=a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}=\frac{a(1-q^n)}{1-q}=\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q}.$$

当$|q|<1$时，

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q}\right)=\frac{a}{1-q},$$

所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$收敛于$\frac{a}{1-q}$，记作

$$\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}=\frac{a}{1-q},\quad |q|<1;$$

当$|q|>1$时，由于$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{aq^n}{1-q}=\infty$，所以部分和数列$\{S_n\}$发散，于是级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$发散.

(2) 如果$|q|=1$，有两种情况：

当$q=1$时，$S_n=a+a+a+\cdots+a=na$，显然，部分和数列$\{S_n\}$发散；

当$q=-1$时，$S_n=a-a+a-\cdots+(-1)^{n-1}a$，此时，部分和数列$\{S_n\}$也发散.

于是当$|q|=1$时，级数发散.

根据例 1，我们得到下面的结论.

**几何级数在公比的绝对值小于 1 时收敛，在其他情形发散.**

**例 2** 讨论数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$$

的收敛性.

**解** 级数的一般项

$$u_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

于是

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}.$$

由于

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1,$$

因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 收敛，其和为 1.

在例 1 和例 2 中，都是利用定义讨论级数的收敛性，也就是把部分和表示为关于 $n$ 的代数式，判断部分和数列是否收敛，从而确定级数是否收敛，这是研究级数收敛性的一个基本方法——**定义法**. 但很多级数的部分和数列很难有初等的表达式，因此定义法有很大的局限性.

由于级数的收敛或发散（简称敛散性）是由它的部分和数列来确定的，因而级数与它的部分和数列具有相同的敛散性. 根据数列收敛的柯西准则，不难得到有关级数的收敛定理.

**定理 1（级数收敛的柯西准则）** 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件是：对任意的 $\varepsilon > 0$，总存在正整数 $N$，对任意的 $n > N$ 和任意的正整数 $p$，都有

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon.$$

**证明** 根据级数收敛的定义，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件是部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛. 又根据数列收敛的柯西准则，数列 $\{S_n\}$ 收敛的充要条件是：$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+, \forall n > N$ 和 $\forall p \in \mathbb{Z}^+$，都有

$$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon.$$

由于 $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, S_{n+p} = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}$，从而有

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon.$$

柯西准则可以理解为，数项级数收敛当且仅当充分远处任意有限片段的数值和可以任意小.

根据定理 1，可以得到如下推论.

**推论 1（级数发散的充要条件）** 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散的充要条件是：存在 $\varepsilon_0 > 0$，使得对任意的正整数 $N$，总存在 $n > N$ 和正整数 $p$，使得

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| \geqslant \varepsilon_0.$$

**推论 2（级数发散的充分条件）** 若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

**证明** 假如级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，根据级数收敛的柯西准则，对任意 $\varepsilon > 0$，存在正整数 $N$，对

任意的 $n>N$ 和 $p=1$，有 $|u_{n+1}|<\varepsilon$，于是 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，这和假设矛盾，于是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

根据推论 2，显然有下面的推论.

**推论 3（级数收敛的必要条件）** 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

**例 3** 证明调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

发散.

**证明** 因为 $\forall n\in\mathbb{Z}^+$，有

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+n}|=\left|\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right|\geqslant\frac{1}{2},$$

所以，取 $\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}$，则对任何正整数 $N$，只要 $n>N$ 和 $p=n$，就有

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+n}|\geqslant\varepsilon_0.$$

根据推论 1，调和级数发散.

应当指出的是：$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ 仅仅是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的必要条件，并非充分条件. 也就是说，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 既可能收敛，如例 2；也可能发散，如例 3.

**例 4** 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2n+1}$ 的敛散性.

**解** 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+1}=\dfrac{1}{2}\neq0$，根据推论 3，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2n+1}$ 发散.

到目前为止，判别级数的敛散性，有如下几个方法：

**1. 定义法**：部分和数列 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 具有相同的敛散性.

**2. 级数收敛的充要条件**：即级数收敛的柯西准则.

**3. 级数发散的充分条件**：若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

### 7.1.2 收敛级数的性质

**性质 1** 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛于 $S$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ku_n$ 也收敛，且其和为 $kS$.

**证明** 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ku_n$ 的部分和分别为 $S_n$ 和 $T_n$，则

$$T_n=ku_1+ku_2+\cdots+ku_n=k(u_1+u_2+\cdots+u_n)=kS_n,$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} kS_n = k\lim_{n\to\infty} S_n = kS.$$

**注** 根据性质 1,级数的各项同乘(除)**非零常数**,不影响(改变)级数的敛散性.

**性质 2** 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 分别收敛于 $S$ 和 $T$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 也收敛,且其和为 $S \pm T$.

**证明** 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的部分和分别为 $S_n$ 和 $T_n$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 的部分和

$$\begin{aligned} W_n &= (u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \cdots + (u_n \pm v_n) \\ &= (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) \pm (v_1 + v_2 + \cdots + v_n) = S_n \pm T_n, \end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} W_n = \lim_{n\to\infty}(S_n \pm T_n) = \lim_{n\to\infty} S_n \pm \lim_{n\to\infty} T_n = S \pm T.$$

**性质 3** 在级数中去掉、加上或改变有限项,不会改变级数的敛散性(可能改变级数的和).

**证明** 根据级数收敛的柯西准则,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 敛散性取决于:对任意的 $\varepsilon > 0$,是否存在充分大的正整数 $N$,使得当 $n > N$ 和对任意的正整数 $p$,有

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon.$$

由此可见,一个级数是否收敛与级数前有限项的取值无关. 所以在级数中去掉、加上或改变有限项,并不会改变级数的敛散性.

**性质 4** 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,则对这个级数的项任意加括号后所组成的新级数收敛,且其和不变.

**证明** 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$,加括号后形成的新级数的前 $k$ 项和为 $T_k$,则

$$T_k = (u_1 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}) + \cdots + (u_{n_{k-1}+1} + \cdots + u_{n_k}) = S_{n_k}.$$

于是,新级数的部分和数列 $\{T_k\}$ 是原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 的子数列. 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,所以部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛,因此数列 $\{S_n\}$ 的子数列 $\{T_k\}$ 也收敛,且也收敛于数列 $\{S_n\}$ 的极限,所以新级数收敛,且其和不变.

**注** 对于有限和来说,不仅能随意加括号,而且还可以随意去括号. 但在无穷级数中需要注意:

1. 收敛级数可以任意加括号(无限多个),但是不能任意去括号. 也就是说,收敛级数任意加无限多个括号后组成的新级数仍是收敛的,且其和不变;但是,若去掉原收敛级数的无

限多个括号后，所组成的新级数可能发散.

2. 发散级数可以任意去括号（无限多个），但是不可以任意加括号. 也就是说，发散级数去掉无限个括号后，组成的新级数仍是发散的；但是若对发散级数加无限个括号，组成的新级数可能收敛.

例如，级数

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$$

收敛于 0，但是去掉所有括号之后的级数

$$1-1+1-1+\cdots+1-1+\cdots$$

却是发散的. 反之，发散级数

$$1-1+1-1+\cdots+1-1+\cdots$$

任意加无限个括号后，组成的新级数

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$$

却是收敛的.

## 习题 7-1

1. 证明下列级数收敛，并求其和：

(1) $\dfrac{1}{1\times3}+\dfrac{1}{3\times5}+\dfrac{1}{5\times7}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$；

(2) $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{3^n}\right)+\cdots$；

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$；

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$.

2. 证明：若数列 $\{a_n\}$ 收敛于 $a$，则级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})=a_1-a$.

3. 证明：已知数列 $\{na_n\}$ 收敛，若级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})$ 也收敛.

4. 证明：若级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，则级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛.

5. 证明：若级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$ 和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 收敛，则级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛.

6. 证明：若级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n-a_{n-1}|$ 收敛，则数列 $\{a_n\}$ 也收敛.

7. 证明：若数列 $\{a_n\}$ 非负单调减少，且级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$.

8. 证明：将收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 相邻的奇偶项交换位置得到的新级数也收敛，且其和不变.

9. 应用级数收敛的柯西准则或级数发散的充分条件，判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n}$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$；　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

10. 证明下列级数发散：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi}{6}$.

## 7.2 正项级数

关于数项级数，通常要解决两个问题：

1. 如何判别数项级数的敛散性？

2. 在收敛情况下，如何求数项级数的和？

解决这两个问题并非容易的事情，为此我们遵循研究问题由简到繁的原则，从最简单的正项级数入手.

**定义** 若数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的每一项 $u_n \geqslant 0, n=1,2,\cdots$，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为**正项级数**；若 $u_n \leqslant 0, n=1,2,\cdots$，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为**负项级数**. 正项级数和负项级数统称为**同号级数**.

由于负项级数的每一项乘以 $-1$ 后就变成正项级数，而且它们具有相同的敛散性，因而可只研究同号级数中的正项级数的敛散性.

对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，由于 $u_n \geqslant 0$，则部分和数列 $\{S_n\}$ 有

$$S_1 \leqslant S_2 \leqslant \cdots \leqslant S_n \leqslant \cdots,$$

所以正项级数的部分和数列 $\{S_n\}$ 是单调增加的. 因此，如果正项级数的部分和数列有上界，则部分和数列收敛，从而正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；反之，如果正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则部分和数列 $\{S_n\}$ 也收敛. 根据收敛数列的性质知，数列 $\{S_n\}$ 有界，当然有上界. 于是我们得到下面的定理.

**定理 1** *正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件是：它的部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界.*

根据正项级数的特点，**如果正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则部分和数列趋于正无穷大**，这是正

项级数和一般数项级数的一个主要区别.

根据定理1,可得到关于正项级数敛散性的一个判别法.

**定理2(比较判别法:不等式形式)** 设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$是两个正项级数,且

$$u_n \leqslant v_n, \quad n = 1,2,\cdots.$$

(1) 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛,则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$也收敛;

(2) 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散,则级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$也发散.

**证明** (1) 设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$的部分和$T_n$收敛于$T$,则正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的部分和

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \leqslant v_1 + v_2 + \cdots + v_n = T_n \leqslant T, \quad n = 1,2,\cdots,$$

所以正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的部分和数列$\{S_n\}$有上界. 由定理1,正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛.

(2) 若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散,则它的部分和数列$\{S_n\}$无界. 又由于

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \leqslant v_1 + v_2 + \cdots + v_n = T_n, \quad n = 1,2,\cdots,$$

所以正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$的部分和数列$\{T_n\}$也无界. 根据定理1,正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散.

定理2可大致表述为:**若较大的正项级数收敛,则较小的正项级数一定收敛;若较小的正项级数发散,则较大的正项级数也一定发散**. 当然,正项级数的大小是依据一般项的比较而言的.

根据收敛级数的性质知,级数的各项同乘(除)非零常数$k$,以及去掉、改变级数的有限项,均不会影响级数的敛散性. 又根据定理2,我们又得到如下结论.

**定理3(比较判别法:不等式推广形式)** 设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$是两个正项级数,$k$是非负常数,且存在正整数$N$,有

$$u_n \leqslant k v_n, \quad n \geqslant N.$$

(1) 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛,则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$也收敛;

(2) 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散,则级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$也发散.

事实上,不论比较法的不等式形式(定理2)还是不等式推广形式(定理3),都是对两个级数的一般项进行直接比较,其实质是对所研究级数的一般项进行放缩,依据放缩后的级数的敛散性,确定所讨论级数的敛散性. 只是不等式的推广形式更实用些.

**例 1** 讨论 $p$-级数(又称广义调和级数)

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$$

的敛散性,其中常数 $p>0$.

**解** 当 $p\leqslant 1$ 时,$\frac{1}{n}\leqslant\frac{1}{n^p}$,由于调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散.

当 $p>1$ 时,利用拉格朗日中值定理可得:

$$\frac{1}{n^p}<\frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{(n-1)^{p-1}}-\frac{1}{n^{p-1}}\right],\quad \forall n\geqslant 2.$$

于是,当 $n\geqslant 2$ 时,有

$$\begin{aligned}S_n&=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}\\&<1+\frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{1^{p-1}}-\frac{1}{2^{p-1}}\right)+\frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{2^{p-1}}-\frac{1}{3^{p-1}}\right)+\cdots+\frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{(n-1)^{p-1}}-\frac{1}{n^{p-1}}\right]\\&=1+\frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{n^{p-1}}\right)<1+\frac{1}{p-1}=\frac{p}{p-1}.\end{aligned}$$

因此,部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界,从而数列 $\{S_n\}$ 收敛.所以当 $p>1$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛.

**综上所述,当 $p>1$ 时,$p$- 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛;当 $p\leqslant 1$ 时,$p$- 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散.**

$p$- 级数是一个很重要的级数,在讨论正项级数的敛散性时,常常把 $p$- 级数和几何级数作为比较对象,因为不论 $p$- 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 的 $p$ 和几何级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}aq^n$ 的公比 $q$ 是什么数值,它们的敛散性都是已知的.

**例 2** 判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n(n-1)}}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{3^n}$.

**解** (1) 因为 $n(n-1)<n^2$,所以

$$\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}<\frac{1}{\sqrt[3]{n(n-1)}},\quad n\geqslant 2.$$

已知 $p$- 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$ 发散,根据比较判别法(不等式形式)知,级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n(n-1)}}$ 发散.

(2) 由于

$$\frac{2^n+1}{3^n}\leqslant\frac{2^n+2^n}{3^n}=2\left(\frac{2}{3}\right)^n,\quad n\geqslant 1,$$

已知几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 收敛,根据比较判别法(不等式的推广形式)知,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{3^n}$