

俄罗斯数学
教材选译

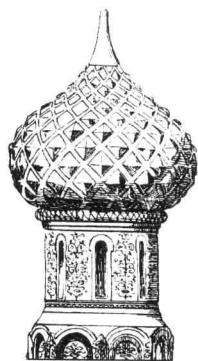
微分几何与 拓扑学习题集

(第2版)

□ A. C. 米先柯 Ю. П. 索洛维约夫 A. T. 福明柯 著
□ 王耀东 译



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS



俄罗斯数学
教材选译

● 数学天元基金资助项目

微分几何与 拓扑学习题集

Weifen Jihe Yu Tuopuxue Xitiji

(第2版)

□ A. C. 米先柯 Ю. П. 索洛维约夫 A. T. 福明柯 著

□ 王耀东 译



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

图字: 01-2009-0616 号

Originally published in Russian in the title
Problems on the Differential Geometry and Topology
By A. S. Mishenko, Yu. P. Solov'ev, A. T. Fomenko
All Rights Reserved

图书在版编目 (CIP) 数据

微分几何与拓扑学习题集. 第 2 版 / (俄罗斯) 米先柯, (俄罗斯) 索洛维约夫, (俄罗斯) 福明柯著; 王耀东译. — 北京: 高等教育出版社, 2010.6

ISBN 978-7-04-028888-9

I. ①微... II. ①米...②索...③福...④王... III.
①微分几何-研究生-习题②拓扑-研究生-习题 IV.
①O186.1-44②O189-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第056478号

策划编辑 赵天夫 责任编辑 赵天夫 封面设计 张楠
责任绘图 尹莉 责任印制 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	400-810-0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn http://www.hep.com.cn
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landaco.com http://www.landaco.com.cn
印 刷	北京联兴盛业印刷股份有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	787×1092 1/16	版 次	2010 年 6 月第 1 版
印 张	22.25	印 次	2010 年 6 月第 1 次印刷
字 数	400 000	定 价	49.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究
物料号 28888-00

《俄罗斯数学教材选译》序

从上世纪 50 年代初起,在当时全面学习苏联的大背景下,国内的高等学校大量采用了翻译过来的苏联数学教材.这些教材体系严密,论证严谨,有效地帮助了青年学子打好扎实的数学基础,培养了一大批优秀的数学人才.到了 60 年代,国内开始编纂出版的大学数学教材逐步代替了原先采用的苏联教材,但还在很大程度上保留着苏联教材的影响,同时,一些苏联教材仍被广大教师和学生作为主要参考书或课外读物继续发挥着作用.客观地说,从解放初一直到文化大革命前夕,苏联数学教材在培养我国高级专门人才中发挥了重要的作用,起了不可忽略的影响,是功不可没的.

改革开放以来,通过接触并引进在体系及风格上各有特色的欧美数学教材,大家眼界为之一新,并得到了很大的启发和教益.但在很长一段时间中,尽管苏联的数学教学也在进行积极的探索与改革,引进却基本中断,更没有及时地进行跟踪,能看懂俄文数学教材原著的人也越来越少,事实上已造成了很大的隔膜,不能不说是一个很大的缺憾.

事情终于出现了一个转折的契机.今年初,在由中国数学会、中国工业与应用数学学会及国家自然科学基金委员会数学天元基金联合组织的迎春茶话会上,有数学家提出,莫斯科大学为庆祝成立 250 周年计划推出一批优秀教材,建议将其中的一些数学教材组织翻译出版.这一建议在会上得到广泛支持,并得到高等教育出版社的高度重视.会后高等教育出版社和数学天元基金一起邀请熟悉俄罗斯数学教材情况的专家座谈讨论,大家一致认为:在当前着力引进俄罗斯的数学教材,有助于扩大视野,开拓思路,对提高数学教学质量、促进数学教材改革均

十分必要.《俄罗斯数学教材选译》系列正是在这样的情况下,经数学天元基金资助,由高等教育出版社组织出版的.

经过认真选题并精心翻译校订,本系列中所列入的教材,以莫斯科大学的教材为主,也包括俄罗斯其他一些著名大学的教材.有大学基础课程的教材,也有适合大学高年级学生及研究生使用的教学用书.有些教材虽曾翻译出版,但经多次修订重版,面目已有较大变化,至今仍广泛采用、深受欢迎,反射出俄罗斯在出版经典教材方面所作的不懈努力,对我们也是一个有益的借鉴.这一教材系列的出版,将中俄数学教学之间中断多年的链条重新连接起来,对推动我国数学课程设置和教学内容的改革,对提高数学素养、培养更多优秀的数学人才,可望发挥积极的作用,并起着深远的影响,无疑值得庆贺,特为之序.

李大潜

2005 年 10 月

前 言

这本《微分几何与拓扑学习题集》(下称《习题集》)预期的目标是满足大学和高等师范学校的数学和力学专业的微分几何与拓扑学课程教学的需要. 无论在新大纲方面, 还是在数学的其他课程及物理和力学方面, 《习题集》都力图反映微分几何与拓扑学课程的本质需求. 此外, 《习题集》使得广大的数学工作者容易懂得在微分几何、拓扑学、代数和力学领域研究主要学问的新的科学方法.

《习题集》可以作为大学和高等师范学校的数学和力学专业的微分几何与拓扑学课程的习题课的基础. 无论在俄罗斯, 还是独联体国家——诸如白俄罗斯、乌克兰、哈萨克斯坦、土库曼斯坦、立陶宛——近年来预定这类习题集的定单纷至沓来.

本书还可以用来作为学习涉及近代几何及其在力学和数学物理中的应用的众多内容的多门专业课程的辅助读物.

《习题集》由两部分组成. 第一部分包含关于微分几何与拓扑学的标准章节的习题, 这些材料超过标准几何与拓扑学课程所要求的必须的最低限度的习题. 第二部分包含为深入掌握近代几何及其应用所需的习题.

书中涵盖下列题材: 曲线论 (包括渐屈线和渐伸线)、曲面论、坐标系、黎曼几何、古典度量 (球面, 罗巴切夫斯基平面上的, 等等)、拓扑空间、流形 (包括纤维丛 (空间)、相空间和构形空间初步)、二维曲面的拓扑、三维欧几里得空间中的二维曲面、李群和李代数 (包括低维李群及其经常用于力学的参数表示)、向量场和张量、微分形式 (包括积分和德拉姆理论)、联络和平行移动、测地线、曲率张量、代数拓扑基础 (欧拉示性数、向量场的指标、相交指数等).

书中同样包含与第一部分题材有关的补充习题, 以及涉及更深刻的微分几何与拓扑学问题新的题材的习题. 出现在第二部分的新题材包括: 计算机几何和拓扑学、运动学和几何、几何结构 (节、施蒂费尔流形和格拉斯曼流形等)、李导数、包装问题、平面上和空间里的组合几何、哈密顿力学基础.

本习题集是 2000 年再版的 A. C. 米先柯和 A. T. 福明柯的教科书《微分几何与拓扑学教程》的自然补充. 在相当大的程度上《习题集》以 A. C. 米先柯、Ю. П. 索洛维约夫和 A. T. 福明柯编写的《微分几何与拓扑学习题集》一书为基础, 后者在 1981 年由莫斯科大学出版社出版. 应当指出, 多年以后, 在 1998 年, A. A. 奥舍姆可夫制作了上述习题集的电子版本. 尔后在 1998—1999 年间在莫斯科大学数学力学系, 由微分几何及其应用教研室发起组织了特别的科学方法讨论班, 旨在编纂新的《微分几何与拓扑学习题集》. A. C. 米先柯、Ю. П. 索洛维约夫教授和 A. T. 福明柯院士领导了讨论班. 有鉴于此, 书的封面列出这三位为编著者. 但事实上, 《习题集》的成书凝聚了在近代几何、拓扑、代数、力学及其应用诸多领域的许多著名学者和杰出专家的集体智慧: 俄罗斯科学院 B. B. 科兹洛夫院士、B. B. 费道尔丘科教授、A. B. 波尔希诺夫教授、Э. П. 罗则道尔恩教授、B. B. 特罗菲莫夫教授、A. A. 包里森科教授 (哈尔柯夫)、И. X. 撒比托夫教授、E. B. 特洛伊茨基教授、A. O. 伊万诺夫教授、A. A. 图日林教授、Г. B. 诺索沃斯基高级研究员、A. И. 沙伐莱维奇研究员、A. A. 奥舍姆可夫副教授、Ф. Ю. 鲍别兰斯基初级研究员、E. A. 库德里亚夫采娃助教.

讨论班事务、习题的拟定及其解答的最积极的参与者事实上是莫斯科大学数学力学系微分几何及其应用教研室的所有大学生和研究生. 我们对他们表示深深谢意.

在微分几何与拓扑学领域有不少习题集、教科书和教学参考书. 在书末我们列出了其中最著名的出版物的一个不大的目录.

应当指出, 近年出版的微分几何与拓扑学习题集的种类很少, 所以实际上业已青黄不接. 更早出版、印数较多的书也几乎售罄, 变得稀少. 此外, 某些书的内容已显陈旧, 需要更新. 这关系到数学课程大纲的完善, 也关系到使用和依赖微分几何与拓扑学方法的其他课程, 这些课程有了显著的改变, 并且加强了对于几门课程的要求. 所有这些使得《习题集》的出版显得格外迫切.

我们从广大“名不见经传”的数学界人士那里收集科学方法的素材. “名不见经传”有种种原因, 主要的是以下几条. 首先, 许多习题出现在前面提到的讨论班的参加者的个人科学研究过程中. 其次, 有些习题产生于讨论班进程中互相切磋的结果. 最后, 相当大量的习题取自古老的数学文献, 它们散落在较早的书刊中而很少被提及, 当代的学生和教师也就无从知晓.

我们正是以这种方式搜集了科学方法的素材, 并形成了本《习题集》.

我们特别要指出: Ф. Ю. 鲍别兰斯基在准备本书出版过程中绝对不可估量的作用. 他在习题的整理、习题的条件和解答的审查, 乃至文本的排版等等方面所完成的工作纷繁浩大, 多亏他的不懈努力, 终于促成本书的问世.

A. C. 米先柯

Ю. П. 索洛维约夫

A. T. 福明柯

莫斯科, 莫斯科大学, 2000 年 5 月

第 2 版前言

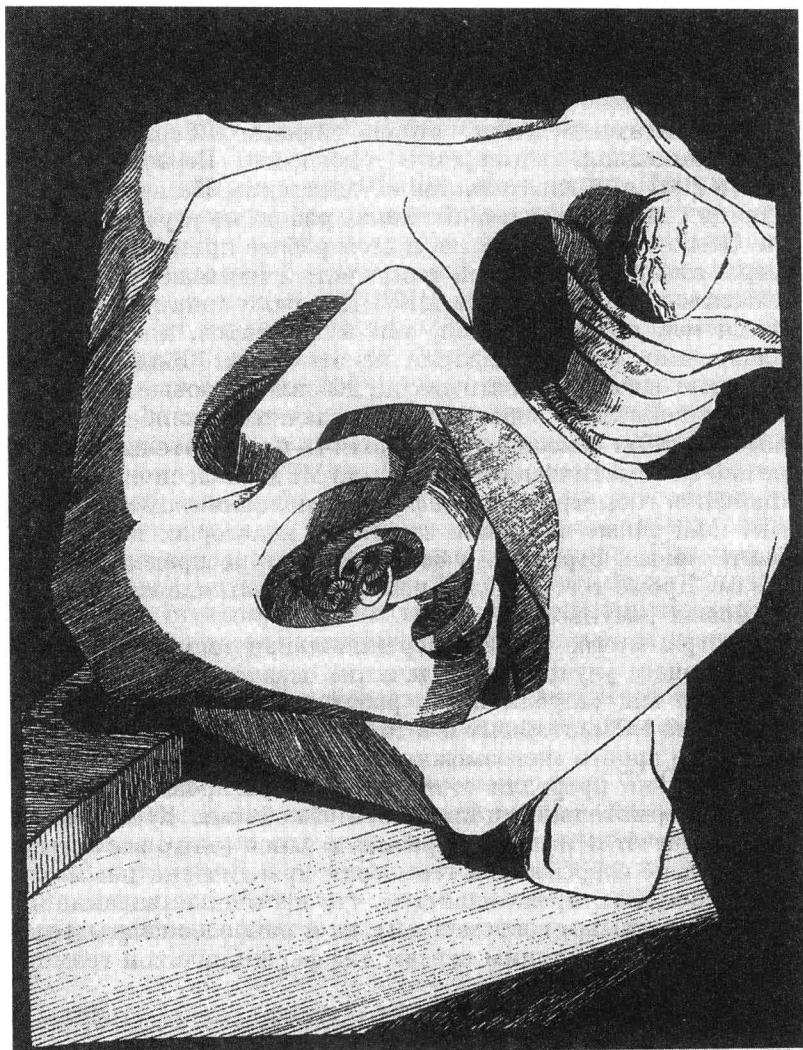
《微分几何与拓扑学习题集》的第 2 版呈现在读者面前. 它的第 1 版于 2001 年由数学物理文献出版社 (Физматлит) 出版. 在随后的两年里, 为改进这本习题集我们做了很多积极的工作, 特别是莫斯科大学数学力学系微分几何及其应用教研室的各位同仁的积极参与. 我们考虑了在课堂上使用第 1 版的教师和学生们的许多需求, 改正了已发现的印刷错误和不妥之处, 补充了新的习题. 这主要涉及习题集的第一部分, 这是在莫斯科大学数学力学系必修课程古典微分几何和微分几何与拓扑学的习题课上使用最多的部分. 我们还改变了某些节的结构并且补充了新的节, 力图更合理地按题材分配习题. 此外补充了许多插图, 以便提高直观性.

尽管微分几何是一门成熟的学科, 习题集的完善过程却不曾停顿. 我们的工作越是深入, 我们就发现越多既比较基本又最有教益、在习题集中非选不可的题目. 我们自觉中止了这个过程, 力求达到用合理的篇幅包含丰富的内容. 此外, 我们也清楚把现代几何的丰富宝藏都反映在一本书里实际上是不可能的. 虽然如此, 我们还是认为, 对于大学微分几何与拓扑学课程, 这一版的习题集不仅是最紧跟时代的, 其内容也是最完备的.

A. T. 福明柯^①

Ф. Ю. 鲍别兰斯基

^① A. T. 福明柯注: 特别要指出, Ф. Ю. 鲍别兰斯基对于准备本版的重要作用. 他不仅分析了大多数习题及其解答, 发现并改正了许多印刷错误和不妥之处, 而且提供了一系列非常有价值的优美的新习题.



亚历山德罗夫球面: 二维球面到 $\mathbb{R}^3$ 中的拓扑嵌入, 在该嵌入下球面在 $\mathbb{R}^3$ 中的像将 $\mathbb{R}^3$ 分成两个开区域. 其中一个为球, 而另一个是非单连通的 (A. T. 福明柯绘制).

相关图书清单

注：书号前缀为 978-7-04-0xxxxx-x

书号	书名	著译者
18303-0	微积分学教程 (第一卷)(第 8 版)	[俄] Г. М. 菲赫金哥尔茨
18304-7	微积分学教程 (第二卷)(第 8 版)	[俄] Г. М. 菲赫金哥尔茨
18305-4	微积分学教程 (第三卷)(第 8 版)	[俄] Г. М. 菲赫金哥尔茨
18302-3	数学分析 (第一卷)(第 4 版)	[俄] В. А. 卓里奇
20257-1	数学分析 (第二卷)(第 4 版)	[俄] В. А. 卓里奇
18306-1	数学分析讲义 (第 3 版)	[俄] Г. И. 阿黑波夫、В. А. 萨多夫尼齐、 В. Н. 丘巴里阔夫
★25439-6	数学分析习题集 (根据俄文 2003 年版翻译)	[俄] Б. П. 吉米多维奇
★	工科数学分析习题集 (根据俄文 2006 年版翻译)	[俄] Б. П. 吉米多维奇
★29531-3	吉米多维奇数学分析习题集学习指引 (第一册)	沐定夷、谢惠民 编著， 卫瑞霞、吴茂庆 审校
★30578-4	复分析导论 (第一卷)(第 4 版)	[俄] Б. В. 沙巴特
22360-6	复分析导论 (第二卷)(第 4 版)	[俄] Б. В. 沙巴特
18407-5	函数论与泛函分析初步 (第 7 版)	[俄] А. Н. 柯尔莫戈洛夫、С. В. 佛明
★29221-3	实变函数论 (第 5 版)	[俄] И. П. 那汤松
18398-6	复变函数论方法 (第 6 版)	[俄] М. А. 拉夫连季耶夫、Б. В. 沙巴特
18399-3	常微分方程 (第 6 版)	[俄] Л. С. 庞特里亚金
22521-1	偏微分方程讲义 (第 2 版)	[俄] О. А. 奥列尼克
25766-3	偏微分方程习题集 (第 2 版)	[俄] А. С. 沙玛耶夫
23063-5	奇异摄动方程解的渐近展开	[俄] А. Б. 瓦西里亚娃、В. Ф. 布图索夫
★27249-9	数值方法 (第 5 版)	[俄] Н. С. 巴赫瓦洛夫、Н. П. 热依德科夫、 Г. М. 柯别里科夫
20525-1	代数学引论 (第一卷) 基础代数 (第 2 版)	[俄] А. И. 柯斯特利金
21491-8	代数学引论 (第二卷) 线性代数 (第 3 版)	[俄] А. И. 柯斯特利金
22506-8	代数学引论 (第三卷) 基本结构 (第 2 版)	[俄] А. И. 柯斯特利金
18946-9	现代几何学：方法与应用 (第一卷) 曲面 几何、变换群与场 (第 5 版)	[俄] Б. А. 杜布洛文、С. П. 诺维可夫、 А. Т. 福明柯

书号	书名	著译者
21492-5	现代几何学：方法与应用 (第二卷) 流形上的几何与拓扑 (第 5 版)	[俄] Б. А. 杜布洛文、С. П. 诺维可夫、А. Т. 福明柯
21434-5	现代几何学：方法与应用 (第三卷) 同调论引论 (第 2 版)	[俄] Б. А. 杜布洛文、С. П. 诺维可夫、А. Т. 福明柯
18405-1	微分几何与拓扑学简明教程	[俄] А. С. 米先柯、А. Т. 福明柯
★28888-9	微分几何与拓扑学习题集 (第 2 版)	[俄] А. С. 米先柯、Ю. П. 索洛维约夫、А. Т. 福明柯
22059-9	概率 (第一卷) (第 3 版)	[俄] А. Н. 施利亚耶夫
22555-6	概率 (第二卷) (第 3 版)	[俄] А. Н. 施利亚耶夫
22554-9	概率论习题集	[俄] А. Н. 施利亚耶夫
22359-0	随机过程论	[俄] А. Б. 布林斯基、А. Н. 施利亚耶夫
22634-8	随机金融基础 (第一卷) 事实、模型	[俄] А. Н. 施利亚耶夫
23983-6	随机金融基础 (第二卷) 理论	[俄] А. Н. 施利亚耶夫
18403-7	经典力学的数学方法 (第 4 版)	[俄] В. И. 阿诺尔德
18530-0	理论力学 (第 3 版)	[俄] А. П. 马尔契夫
22155-8	连续介质力学 (第一卷) (第 6 版)	[俄] Л. И. 谢多夫
22633-1	连续介质力学 (第二卷) (第 6 版)	[俄] Л. И. 谢多夫
★29223-7	非线性动力学定性理论方法 (第一卷)	[俄] Л. Р. Shilnikov 等
★29464-4	非线性动力学定性理论方法 (第二卷)	[俄] Л. Р. Shilnikov 等

说明：加★者为最新出版。

网上购书：academic.hep.com.cn

其他订购办法：

各使用单位可向高等教育出版社读者服务部汇款订购。书款通过邮局汇款或银行转账均可。

购书免邮费，发票随后寄出。

单位地址：北京西城区德外大街 4 号

电 话：010-58581118/7/6/5/4

传 真：010-58581113

通过邮局汇款：

北京西城区德外大街 4 号高教读者服务部

邮政编码：100120

通过银行转账：

户 名：北京蓝畅书店有限责任公司

开 户 行：交通银行北京亚运村支行

马甸分理处

银行账号：110060437018010030287

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话: (010) 58581897/58581896/58581879

传 真: (010) 82086060

E-mail: dd@hep.com.cn

通信地址: 北京市西城区德外大街 4 号

高等教育出版社打击盗版办公室

邮 编: 100120

购书请拨打电话: (010) 58581118

目 录

《俄罗斯数学教材选译》序

前言

第 2 版前言

第一部分	1
§1. 坐标系	1
§2. 曲线和曲面的方程	8
§3. 球面和罗巴切夫斯基平面上的经典度量, 它们的性质	11
§4. 曲线理论	17
§5. 黎曼度量	27
§6. 第二基本形式, 高斯曲率和平均曲率	35
§7. 流形	40
§8. 张量	48
§9. 向量场	52
§10. 联络和平行移动	54
§11. 二维曲面上的测地线	59
§12. 曲率张量	64

§13. 微分形式和德拉姆上同调	68
§14. 拓扑	76
§15. 同伦, 映射度和向量场的指标	81
第二部分	89
§16. 坐标系 (补充习题)	89
§17. 曲线和曲面: 方程和参数表示	90
§18. 曲线论 (补充习题)	101
§19. 黎曼度量 (补充习题)	116
§20. 高斯曲率和平均曲率	124
§21. 著名二维曲面的参数表示	129
§22. $\mathbb{R}^3$ 中的曲面	134
§23. 二维曲面的拓扑	136
§24. 曲面上的曲线	140
§25. 流形 (补充习题)	146
§26. 张量分析	151
§27. 流形上的测地线	154
§28. 曲率张量	157
§29. 向量场	160
§30. 变换群	162
§31. 微分形式	169
§32. 同伦论	171
§33. 覆叠空间和纤维丛	181
§34. 临界点, 映射度, 莫尔斯理论	186
§35. 最简单的变分问题	192
§36. 一般拓扑学	195
部分习题的答案和解答	200
参考文献	340

第一部分

§1. 坐标系

我们观察空间 $\mathbb{R}^n$ 中的区域 U , 在其中给定了笛卡儿坐标 $(x^1, \dots, x^n)$. 假设在另一个带坐标 $(q^1, \dots, q^n)$ 的空间 $\mathbb{R}^n$ 中给定区域 V , 并且在区域 U 和 V 的点之间建立了相互的单值对应. 在这种情形下, 为了给定区域 U 的点, 我们可以利用数组 $(q^1, \dots, q^n)$ —— 区域 V 对应点的笛卡儿坐标. 我们将称 $(q^1, \dots, q^n)$ 是区域 U 的曲线坐标, 如果:

- 1) 给出区域 U 和 V 的点之间的相互单值对应的函数

$$x^i = x^i(q^1, \dots, q^n)$$

在区域 V 具有所有阶的导数;

- 2) 雅可比行列式 $J = \left| \frac{\partial x^i}{\partial q^j} \right|$ 在 V 的所有点异于 0.

注意, 在绝大多数的情形, 只需假定函数 $x^i(q^1, \dots, q^n)$ 有直到三阶的连续导数.

从曲线坐标的定义推出反函数 $q^i(x^1, \dots, x^n)$ 同样在区域 U 有所有阶的导数, 并且雅可比行列式 $J' = \left| \frac{\partial q^i}{\partial x^j} \right|$ 异于 0 (它等于 J^{-1}).

对于函数 $x^i = x^i(q^1, \dots, q^n)$, $i = 1, \dots, n$, 同时考察它们会显得方便, 为此利用向量函数

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^1, \dots, q^n), \quad \text{其中} \quad \mathbf{r} = (x^1, \dots, x^n).$$

在区域 U 中, 条件 $q^i = \text{常数}$ 定义了 n 组超曲面. 同一组的超曲面互不相交. 分属不同组的任意 $n-1$ 个坐标超曲面沿某一条曲线相交. 称这样的曲线为坐标曲线.

向量 $\mathbf{r}_k = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^k}$ 沿坐标曲线的切线方向. 在区域 U 的每个点这些向量线性无关. 它们在

点 $M(q^1, \dots, q^n)$ 的某个邻域中定义无穷小向量

$$d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i dq^i.$$

它的用曲线坐标表示的长度的平方由等式

$$ds^2 = \langle d\mathbf{r}, d\mathbf{r} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i dq^i, \sum_{j=1}^n \mathbf{r}_j dq^j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dq^i dq^j$$

确定, 其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的数量积.

数量 $g_{ij} = g_{ji} = \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j \rangle$ 定义曲线坐标系 $(q^1, \dots, q^n)$ 中的度量.

坐标系称为 正交坐标系, 如果它满足满足条件

$$g_{ij} = \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ H_i^2, & i = j. \end{cases}$$

量 $H_i > 0$ 称为拉梅 (Lamé) 系数. 它们等于向量 $\mathbf{r}_i$ 的长度:

$$H_i = |\mathbf{r}_i| = \sqrt{\left(\frac{\partial x^1}{\partial q^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^2}{\partial q^i}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial x^n}{\partial q^i}\right)^2}.$$

在正交曲线坐标系中, 线性元的平方由下式表示:

$$ds^2 = H_1^2 (dq^1)^2 + H_2^2 (dq^2)^2 + \dots + H_n^2 (dq^n)^2.$$

在习题 1.1–1.5 中, 对于下列曲线坐标系 (u_1, u_2) :

- 确定由笛卡儿坐标表达平面 $\mathbb{R}^2$ 的点的曲线坐标的公式, 及其逆;
- 求曲线的长度;
- 计算行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{vmatrix},$$

并且查明在 $\mathbb{R}^2$ 的哪些点, 其曲线坐标和笛卡儿坐标之间的相互单值对应遭破坏.

1.1. 由等式 $\frac{x_1}{a_1} + i \frac{x_2}{a_2} = u_1 e^{iu_2}$ 定义的广义极坐标, 其中 $0 \leq u_1 < \infty$, $-\pi < u_2 \leq \pi$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$. 在什么条件下, 这些坐标同普通极坐标一致?

1.2. 由等式 $x_1 + iu_2 = \operatorname{ch}(u_1 + iu_2)$ 确定的椭圆坐标系, 其中 $0 \leq u_1 < \infty$, $-\pi < u_2 \leq \pi$.

1.3. 由等式 $x_1 + iu_2 = (u_1 + iu_2)^2$ 确定的抛物线坐标系, 其中 $-\infty < u_1 < \infty$, $0 \leq u_2 < \infty$.