

 考试名家指导

MBA/MPA/MPAcc 联考同步复习指导系列

MBA MPA MPAcc

2013 版

数学高分速成

适用专业：

MBA · MPA · MPAcc · 审计 · 工程管理 · 旅游管理 · 图书情报

袁进 等编著



- ◎ 归纳分类典型例题，并给出最快捷的解题方案
- ◎ 适合需要短期突破的考生

第 **2** 版

 **机械工业出版社**
CHINA MACHINE PRESS



 考试名家指导

MBA/MPA/MPAcc 联考同步复习指导系列

MBA MPA 2013 版 MPAcc

数学高分速成

袁进 等编著



NLIC2970819007

第 **2** 版



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

本书是根据最新的管理类联考考试大纲编写而成的，主要由两部分组成。第一部分系统地介绍了联考中所涉及的相关数学基础知识，对相关典型例题进行了归纳分类并给出了最简单、快捷的解题方案。第二部分介绍了处理考试中难题的三大方法（归纳法、代入法和穷举法），以及快速选择条件充分性判断题答案的方法。

本书针对联考的特点介绍了每类考试内容所涉题目能采用的最快速的解题方案，有助于考生在短期内提高解题的效率。

本书适合于复习时间短，有一定数学基础的考生。

图书在版编目（CIP）数据

2013MBA MPA MPAcc 联考同步复习指导系列·数学
高分速成 / 袁进等编著. —2 版. —北京：机械工业出版社，2012.7
ISBN 978-7-111-39245-3

I. ①2… II. ①袁… III. ①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 IV. ①G643

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 170105 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）
责任编辑：孟玉琴 杨晓昱 责任印制：杨 曦
保定市市中画美凯印刷有限公司印刷

2012 年 8 月第 2 版·第 1 次印刷

184mm×260mm·11 印张·267 千字

0001—6000 册

标准书号：ISBN 978-7-111-39245-3

定价：25.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务

网络服务

社服务中心：(010) 88361066

门户网：<http://www.cmpbook.com>

销售一部：(010) 68326294

教材网：<http://www.cmpedu.com>

销售二部：(010) 88379649

读者购书热线：(010) 88379203

封面无防伪标均为盗版

丛 书 序

这是一套针对 MBA、MPA、MPAcc 联考与经济类联考选拔性应试的必备丛书。

本套丛书由北京大学、清华大学、中国人民大学、北京理工大学、西安交通大学、北京交通大学、上海交通大学、同济大学等高校的 MBA、MPA、MPAcc 辅导名师和资深命题专家联合编写，分为“MBA、MPA、MPAcc 联考英语专项训练系列（英语（二）各专业适用）”、“MBA、MPA、MPAcc 联考与经济类联考同步复习指导系列”、“MBA、MPA、MPAcc 联考模拟试卷系列”3 个系列，共 13 本。本套丛书具有以下特点：

一、一流的编写者队伍

本套丛书的编写者均是从全国 MBA 辅导名师中精心挑选出来的。他们多年来一直从事 MBA 考前辅导和命题研究工作，既能把握考生需求与应试精髓，又能洞悉 MBA 命题规律与趋势。

讲课↔著书↔研究，紧密结合，相互推动，在讲课中实践，在著书中提炼，在研究中升华。这是一流应试辅导丛书品质保证的基石。

二、紧扣 MBA、MPA、MPAcc 联考与经济类联考最新考试大纲

丛书紧扣最新考试大纲，精心研制的例题与习题在难度上等同或略高于真题，在题型设置上与大纲保持一致，其中《数学分册》（针对管理类联考）中含有许多作者原创性的考试应对技巧和经验介绍。我们不鼓励“题海战术”，而是立足于帮助考生在深入研究最新考试大纲和历年试题的基础上，准确把握 MBA、MPA、MPAcc 联考的难点、重点和命题趋势。

三、体系明晰，精讲精练，为考生提供标准化解决方案

“MBA、MPA、MPAcc 联考英语专项训练系列”适用于所有参加英语（二）考试的专业学位硕士考生，包括《英语词汇实战宝典》、《英语阅读理解 100 篇精粹》、《满分翻译与写作》、《英语历年真题精解》4 本书。该系列图书实用性强，可以使考生针对英语弱项进行专项强化提高，快速突破英语难关。

“MBA、MPA、MPAcc 联考与经济类联考同步复习指导系列”包括《英语分册》、《数学分册》（针对管理类联考）、《逻辑分册》、《逻辑应试教程》、《写作分册》、《面试分册》、《数学高分速成》（针对管理类联考）7 本书。其中逻辑类图书因老师的授课思路、写作风格不同而分为 2 本。该体系与最新考试大纲相配套，精讲精练，突出应试难点与重点，洞悉历年试题，强化训练提高，应试针对性极强。

“MBA、MPA、MPAcc 联考模拟试卷系列”包括《英语分册》、《综合能力分册》（针

对管理类联考) 2 本书, 严格按照 MBA、MPA、MPAcc 联考最新考试大纲和命题趋势精心设计, 融会了众多作者多年教学、辅导、命题研究的心血和智慧, 考点分布合理, 试卷难度等同或略高于真题难度。

一套好的辅导教材需要具备四个要素: ① 严格遵循最新考试大纲; ② 具有前瞻性, 能针对正规的考试; ③ 作者真正透彻了解联考的要求, 内容的难度与联考试卷相符或略高; ④ 满足考生的需求, 突显了为考生备考服务的宗旨。

本套丛书很好地体现了这四个方面的要求, 每道试题都是众多辅导名师和专家教学经验的结晶。往届高分考生的经验说明, “三道题做一遍不如一道题做三遍”, “三本书各读一遍不如一本书读三遍”。通过对本套丛书的认真阅读和演练, 相信考生必将会为顺利考入名校打下坚实的基础。

希望通过我们不懈的努力和二十多位 MBA 联考辅导专家的倾情奉献, 能够为考生顺利突破联考助一臂之力。

丛书编委会

前言

我国的管理类专业学位硕士联考始于1997年。2008年以前,联考中数学部分主要由高等数学中的微积分、线性代数及概率论组成,初等数学只占考题的20%。2007年7月,联考数学考试大纲进行了自联考以来最大的调整。从2008年1月开始,联考中的数学部分主要由初等数学的代数学、几何学及概率初步组成。2010年,数学大纲又新增了函数、立体几何、数据描述及条件概率四部分内容。本书是根据最新考试大纲编写而成的。

从2010年开始,虽然联考中数学部分的难度正在逐步降低,但数学仍然是能否通过联考的关键。不管是以高等数学为主,还是以初等数学为主,联考的目的不仅是考查考生对数学基础知识的掌握,更重要的是考查考生的智力,考查考生应用数学知识分析与解决问题的能力,考查考生的快速反应能力。为了使考生尽快了解联考数学的内容,掌握应试技巧,顺利通过联考,作者根据多年的经验编写了本书。

本书主要由两部分组成:

(1) 第一章~第九章,系统地介绍了联考中所涉及的相关数学基础知识,对相关典型例题进行了归纳分类并给出了最简单、快捷的解题技巧。

(2) 第十章介绍了处理考试中难题的三大方法(归纳法、代入法和穷举法),以及快速选择条件充分性判断题答案的一些方法。

本书的主要特点是:

(1) 精讲精练。针对考生平时工作忙、复习时间有限的特点,本书遵从由浅入深、简单易懂、突出重点的原则,帮助考生在短时间内尽快掌握考试内容。

(2) 掌握思想、打开思路。数学是一种思想,是一种美丽的游戏规则。只要掌握了最核心的思想,理解了每种考点的游戏规则,就可以以不变应万变,打开做题思路。

本书力求以数学思想为主导,提高考生分析问题和解决问题的能力,避免考生陷入题海战术的误区以及把联考数学当做“奥数”来做。

(3) 归纳技巧、提高速度。针对联考的特点,本书介绍了每类考试内容所涉及的题目能采用的最快速的解题技巧,有助于考生在短期内提高解题效率。

本书适合于复习时间短,有一定数学基础的考生。

由于时间仓促,本书难免存在疏漏之处,欢迎批评指正。

在本书的编写过程中,马雅莉、周保源、李亚莉、马建科、王丹红、崔保军、贾晓明、杨雅林、张淑静、张作铨也进行了部分资料的整编及编写工作,在此,一并致谢。

袁 进

条件充分性判断题的解题说明

一、充分条件

由条件 A 成立, 就可以推出结论 B 成立 (即 $A \Rightarrow B$), 则称 A 是 B 的充分条件. 若由条件 A , 不能推出结论 B 成立 (即 $A \not\Rightarrow B$), 则称 A 不是 B 的充分条件.

二、条件充分性判断题的解题说明

本题要求判断所给出的条件能否支持题干中的结论, 阅读每小题中的条件 (1) 和条件 (2) 后进行选择.

- (A) 条件 (1) 充分, 但条件 (2) 不充分
- (B) 条件 (2) 充分, 但条件 (1) 不充分
- (C) 条件 (1) 和条件 (2) 单独都不充分, 但条件 (1) 和条件 (2) 联合起来充分
- (D) 条件 (1) 充分, 条件 (2) 也充分
- (E) 条件 (1) 和 (2) 单独都不充分, 条件 (1) 和条件 (2) 联合起来也不充分.

注: 本书中, 所有条件充分性判断题中 A, B, C, D, E 这 5 个选项所规定的含义, 均以此为准, 以后不再重复说明.

例 1 (条件充分性判断) 方程 $x^2 - 3x - 4 = 0$

- (1) $x = -1$ (2) $x = 3$

解 由条件 (1) $x = -1$, 可知 $x^2 - 3x - 4 = (-1)^2 - 3 \times (-1) - 4 = 0$, 所以条件 (1) 充分.

由条件 (2) $x = 3$, 可知 $x^2 - 3x - 4 = 9 - 9 - 4 = -4 \neq 0$, 因此条件 (2) 不充分.
答案应为 A.

例 2 (条件充分性判断) 要使 $\frac{1}{a} \geq 1$

- (1) $a \leq 1$ (2) $a \geq 1$

解 由 $a \leq 1$, 不能推出 $\frac{1}{a} \geq 1$, 例如取 $a = -1$, 即条件 (1) 不充分.

由 $a \geq 1$, 则有 $\frac{1}{a} \leq 1$, 也不能推出 $\frac{1}{a} \geq 1$ 成立, 即条件 (2) 也不充分.

联合条件 (1) 和条件 (2), 则 $a \leq 1$ 且 $a \geq 1$, 从而 $a = 1$, $\frac{1}{1} = 1$ 成立,

因此条件 (1) 和条件 (2) 单独都不充分, 但条件 (1) 和条件 (2) 联合起来充分.
答案应为 C.

三、特别提示

对条件充分性判断的解题规则，给出两点提示：

1. 要说明条件是不充分的，只要举出一个反例即可，但要说明条件是充分的，需给出证明.
2. 条件充分性判断题是判断由下面所给条件能否推出上面题干成立，但在实际过程中，有时需首先理解题干的要求，再进行判断.

例3 (条件充分性判断) $-1 \leq 3x < 1$

$$(1) x \in \left(0, \frac{1}{3}\right] \quad (2) x \in \left(-\frac{1}{3}, 0\right)$$

解 题干要求推出 $-\frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{3}$,

则 条件(1)和条件(2)中 x 所取范围哪个是 $-\frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{3}$ 的子集合，则该条件就是充分的，从而条件(1)不充分，但条件(2)是充分的. 答案应为 B.

目 录

从书序

前言

条件充分性判断题的解题说明

第一章 实 数	1
1 整数	1
2 有理数	4
3 实数及其性质	5
4 绝对值	7
5 练习一	14
第二章 函 数	16
1 函数及其性质	16
2 一元二次函数及其图像	17
3 指数函数与对数函数	19
4 整式	21
5 分式	26
6 练习二	30
第三章 方程、不等式	32
1 一元二次方程	32
2 一元二次不等式	38
3 练习三	45
第四章 数 列	47
1 基本概念	47
2 等差数列	49
3 等比数列	54
4 练习四	60
第五章 应用题	62
1 比及比例	62
2 行程问题	68
3 工程问题	72
4 浓度问题	74

5	一次方程组及其他	76
6	练习五	79
第六章	平面几何与立体几何	82
1	平面几何	82
2	立体几何	89
3	练习六	91
第七章	解析几何	94
1	平面直角坐标系及基本公式	94
2	直线方程	96
3	圆的方程	102
4	练习七	109
第八章	排列组合与概率	112
1	排列组合	112
2	事件的运算及概率	121
3	条件概率及乘法公式	129
4	事件的独立性及贝努利试验	131
5	练习八	138
第九章	平均值与数据描述	140
1	平均值	140
2	数据描述	143
3	练习九	145
第十章	应对难题的几种解题技巧	147
1	归纳法	147
2	代入法	150
3	穷举法	153
4	解答条件充分性判断题的几点建议	156
5	练习十	159
附录	2012 年管理类专业学位硕士全国联考综合能力试卷数学试题	161

第一章

实数

1 整数

整数包括正整数、负整数和零. 对于任意两个整数 a, b , $a+b$, $a-b$, ab 都是整数, 但 $\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$) 不一定是整数. 关于整数有以下三个考点.

一、整除与带余除法

1. (整除) 设 a, b 是任意两个整数, 如果存在一个整数 q , 使得等式

$$a = bq$$

成立, 则称 b 整除 a [或 a 能被 b 整除]. 若 b 整除 a , 则称 b 是 a 的因数 (或约数), 称 a 是 b 的倍数.

2. (带余除法) 对任意两个整数 a, b ($b > 0$), 一定存在整数 q, r 使得

$$a = qb + r, (0 \leq r < b)$$

成立, 而且 q, r 唯一.

由整除与带余除法可知: $\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$) 是整数的充分必要条件是 b 整除 a ; b 整除 a 的充分必要条件是带余除法中余数 $r = 0$.

二、质数与合数

1. (质数) 设 a 为整数, 且 $a \geq 2$, 若 a 只有两个正因数, 即 1 和 a , 则称 a 为质数. 质数有无穷多个, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ... 均为质数. 最小的质数为 2, 2 也是唯一的一个偶数质数, 其余质数都是奇数.

2. (合数) 设 a 为整数, 且 $a \geq 2$, 若 a 至少有三个正因数, 则称 a 为合数 (或复合数).

在正整数中, 1 既不是质数也不是合数.

3. (算术基本定理) 设 a 为整数, 且 $a \geq 2$, 则有

$$a = p_1 p_2 \cdots p_m \quad (\text{其中 } p_1, p_2, \cdots, p_m \text{ 均为质数})$$

即任一大于1的整数都能表示成几个质数的乘积.

4. 设 p 为质数, $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是 n 个整数,若 p 整除 $a_1 a_2 \cdots a_n$,则 p 至少整除 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 中的一个.

三、最大公因数与最小公倍数

1. (最大公因数) 设 a, b 是两个整数,若整数 c 整除 a ,且 c 整除 b ,则称 c 是 a, b 的公因数[由于1整除 a 且1整除 b ,因此 a, b 一定有公因数]. a, b 的所有公因数中最大的数叫做 a, b 的最大公因数,记为 (a, b) . 若 $(a, b) = 1$,则称 a, b 互质.

2. (最小公倍数) 设 a, b 是两个整数,若 c 为整数,满足 a 整除 c ,且 b 整除 c ,则称 c 是 a, b 的公倍数[由于 ab 是 a, b 的公倍数, ab 的任意倍数都是 a, b 的公倍数,因此 a, b 的公倍数有无穷多个]. a, b 的所有公倍数中最小的正整数叫做 a, b 的最小公倍数,记为 $[a, b]$.

关于最大公因数和最小公倍数有以下四个考点:

(1) 对于任意正整数 a, b ,有 $ab = (a, b)[a, b]$ 成立.

当 $(a, b) = 1$ 时, $[a, b] = ab$.

(2) a, b 的所有公倍数就是 $[a, b]$ 的倍数.

(3) 若 c 整除 ab ,且 $(c, a) = 1$,则有 c 整除 b .

(4) 对于任意正整数 a, b ,求 (a, b) 及 $[a, b]$.

例 1.1 若 n 为任意正整数,则 $n^2 + n$ 一定()

- A. 为偶数 B. 为奇数 C. 与 n 的奇偶数相同
D. 与 n 的奇偶性不同 E. 无法判断

解 $n^2 + n = n(n+1)$, 对任意正整数 n , $n = 2q$ 或 $n = 2q+1$ (q 为整数), 因此 $n+1 = 2q+1$ 或 $n+1 = 2q+2 = 2(q+1)$, 即 $n, n+1$ 中至少一个是偶数.

因此 $n^2 + n$ 一定是2的倍数, 从而 $n^2 + n$ 一定为偶数

[在整数中, 被2整除的为偶数, 被2除余数为1的称为奇数].

答案为A.

例 1.2 若 n 是除以5余3, 且除以7余2的最小正整数, 则 n 的各位数字之积为()

- A. 8 B. 12 C. 9 D. 6 E. 10

解 由题意知 $n = 5q_1 + 3$, $n = 7q_2 + 2$ (这里 q_1, q_2 均为非负整数).

因此 $5q_1 + 3 = 7q_2 + 2$,

即 $5q_1 + 1 = 7q_2$,

依次取 $q_1 = 1, 2, 3, 4$, 知 $q_1 = 4$ 时 $5q_1 + 1$ 是7的倍数,

从而 $n = 4 \times 5 + 3 = 23$. 各位数字之积为 $2 \times 3 = 6$.

答案为D.

例 1.3 已知 p_1, p_2, p_3 为三个质数, 且满足 $p_1 + p_2 + p_3 + p_1 p_2 p_3 = 99$, 则 $p_1 + p_2 + p_3 =$ ()

- A. 19 B. 25 C. 27 D. 26 E. 23

解 若 p_1, p_2, p_3 均为奇数或 p_1, p_2, p_3 中只有一个为偶数, 则 $p_1 + p_2 + p_3 + p_1 p_2 p_3$ 必为偶数, 与已知条件矛盾.

从而 p_1, p_2, p_3 中应为两偶一奇.

但偶数中只有 2 为质数, 因此不妨设 $p_1 = p_2 = 2$,

则 $2 + 2 + p_3 + 4p_3 = 99$, 解得 $p_3 = 19$.

从而 $p_1 + p_2 + p_3 = 2 + 2 + 19 = 23$.

答案为 E.

例 1.4 $(140, 810), [140, 810]$ 分别为 ()

A. 10, 11220

B. 15, 11220

C. 10, 11340

D. 15, 11340

E. 以上答案均不正确

解 由算术基本定理 $140 = 2 \times 2 \times 5 \times 7$, $810 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5$ (从最小质数开始, 依次分解),

从而 $(140, 810) = 2 \times 5 = 10$, $[a, b] = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 = 11340$.

答案为 C.

例 1.5 (2008 年) (条件充分性判断) $\frac{n}{14}$ 是一个整数

(1) n 是一个整数, 且 $\frac{3n}{14}$ 也是一个整数.

(2) n 是一个整数, 且 $\frac{n}{7}$ 也是一个整数.

解 $\frac{n}{14}$ 是整数的充分必要条件是 14 整除 n .

由条件 (1), 14 整除 $3n$, 但 $(14, 3) = 1$, 因此必有 14 整除 n , 从而条件 (1) 是充分的.

在条件 (2) 中, 取 $n = 7$, 则满足条件 (2), 但 $\frac{7}{14} = \frac{1}{2}$ 不是一个整数, 因此条件 (2) 不是充分的.

答案为 A.

注: (2008 年) 表示此题为 2008 年联考原题.

例 1.6 (条件充分性判断) 正整数 n 是奇数

(1) n 被 3 除时, 其余数为 1

(2) n 被 6 除时, 其余数为 3

解 令 $n = 4$, 则 $n = 1 \times 3 + 1$ 满足条件 (1),

但 $n = 4$ 不是奇数, 因此条件 (1) 不充分.

由条件 (2), $n = 6q + 3 = 2(3q + 1) + 1$ (q 为整数),

即 n 为奇数, 从而条件 (2) 是充分的.

答案为 B.

注：条件充分性判断解题说明请看第VI页。

例 1.7 (条件充分性判断) $n = 156$

(1) 自然数 n 加上 100 是一个完全平方数

(2) 自然数 n 加上 168 是一个完全平方数

解 令 $n = 21$, 则 $n + 100 = 121 = (11)^2$ 是一个完全平方数;

令 $n = 1$, 则 $n + 168 = 169 = (13)^2$ 是一个完全平方数,

但 $n \neq 156$, 因此条件 (1) 和条件 (2) 单独都不充分.

联合条件 (1) 和条件 (2), 则有

$$\begin{cases} n + 100 = a^2 \\ n + 168 = b^2 \end{cases}$$

因此

$$b^2 - a^2 = (b - a)(b + a) = 68 = 2 \times 2 \times 17$$

但 $b - a$, $b + a$ 有相同的奇偶性, 从而 $b - a = 2$, $b + a = 34$, 得 $b = 18$, $n = 156$.

答案为 C.

注：条件充分性判断解题说明请看第VI页。

例 1.8 (2009 年) (条件充分性判断) $a + b + c + d + e$ 的最大值是 133

(1) a, b, c, d, e 是大于 1 的自然数, 且 $abcde = 2700$

(2) a, b, c, d, e 是大于 1 的自然数, 且 $abcde = 2000$

解 由条件 (1), $abcde = 2700 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5$

则当 $a = b = 2$, $c = d = 3$, $e = 3 \times 5 \times 5 = 75$ 时,

$a + b + c + d + e = 2 + 2 + 3 + 3 + 75 = 85$ 是 $a + b + c + d + e$ 的最大值.

因此条件 (1) 不充分.

由条件 (2), $abcde = 2000 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$

则当 $a = b = c = d = 2$, $e = 5 \times 5 \times 5 = 125$ 时,

$a + b + c + d + e = 2 + 2 + 2 + 2 + 125 = 133$ 是 $a + b + c + d + e$ 的最大值.

答案为 B.

2 有理数

整数和分数统称为有理数. 任何一个有理数都可表示为 $\frac{m}{n}$ 的形式 (这里 m, n 均为整数, $n \neq 0$). 因为分数与有限小数和无限循环小数可以互化, 所以又称有限小数和无限循环小数为有理数.

对于任意有理数 a, b , $a + b$, $a - b$, ab , $\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$) 都是有理数. 有理数的考点主要

是有理式的计算.

例 2.1 $\frac{1}{18} + \frac{1}{54} + \frac{1}{108} + \cdots + \frac{1}{990} = (\quad)$

- A. $\frac{11}{98}$ B. $\frac{13}{98}$ C. $\frac{10}{99}$ D. $\frac{13}{99}$ E. $\frac{20}{97}$

解 原式 $= \frac{1}{3 \times 6} + \frac{1}{6 \times 9} + \frac{1}{9 \times 12} + \cdots + \frac{1}{30 \times 33}$
 $= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{9} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{12} \right) + \cdots + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{30} - \frac{1}{33} \right)$
 $= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{27} - \frac{1}{30} + \frac{1}{30} - \frac{1}{33} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{33} \right) = \frac{10}{99}$

答案为 C.

例 2.2 (条件充分性判断) $x = \frac{99}{100}$ 成立

(1) $x = \frac{1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots + 2009 - 2010 + 2011 - 2012}{(2012 + 2010 + 2008 + \cdots + 4 + 2) - (2011 + 2009 + \cdots + 3 + 1)}$

(2) $x = 1 + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{99 \times 100}$

解 由条件 (1), 分母 $= (2012 - 2011) + (2010 - 2009) + \cdots + (2 - 1) = 1006$.

分子 $= (1 - 2) + (3 - 4) + \cdots + (2011 - 2012) = -1006$,

从而 $x = -1 \neq \frac{99}{100}$, 即条件 (1) 不充分.

由条件 (2), $x = 1 + \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100} \right) = 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = 2 - \frac{1}{100} = \frac{199}{100} \neq \frac{99}{100}$, 因此条件 (2) 也不充分.

由于条件 (1) 与条件 (2) 矛盾, 不能选 C, 因此答案为 E.

注: 条件充分性判断解题说明请看第 VI 页.

3 实数及其性质

无限不循环小数被称为无理数. 有理数和无理数统称为实数. 实数有两个考点.

一、实数的性质

1. 对任意实数 a, b , 有 $a + b, a - b, ab, \frac{a}{b}$ ($b \neq 0$) 都是实数.

2. 对于任意无理数 a, b , 有 $a + b, a - b, ab, \frac{a}{b}$ 不一定是无理数.

3. 对于任意有理数 a 及无理数 b , 有 $a+b$, $a-b$ 一定是无理数.

对于 ab , $\frac{a}{b}$, 当 $a=0$ 时为有理数, 当 $a \neq 0$ 时为无理数.

4. 实数可以比大小; 实数具有正、负性; 实数可取绝对值 (复数没有此性质).

二、实数 x 的整数部分 $[x]$ 和小数部分 $\{x\}$

对于任意实数 x , 用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数; 令 $\{x\} = x - [x]$, 称 $\{x\}$ 是实数 x 的小数部分.

例 $[\pi] = 3$, $[\sqrt{5}] = 2$, $[6] = 6$, $[-3] = -3$, $[2.7] = 2$, $[0.9] = 0$, $[-2.7] = -3$, $[-0.9] = -1$.

例 3.1 已知 x 是无理数, 且 $(x-1)(x-3)$ 是有理数, 则

(1) x^2 是无理数

(2) $(x+1)(x+3)$ 是有理数

(3) $(x+1)^2$ 是无理数

(4) $(x-1)^2$ 是有理数

以上结论正确的有 () 个

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

E. 4

解 由已知 x 是无理数, $(x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3$ 是有理数, 则有 $-4x + 3$ 是无理数, 因此 x^2 一定是无理数.

$(x+1)(x+3) = x^2 + 4x + 3 = (x^2 - 4x + 3) + 8x$ 是无理数

$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 = (x^2 - 4x + 3) + (6x - 2)$ 是无理数

$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 = (x^2 - 4x + 3) + (2x - 2)$ 是无理数

因此 (1), (3) 是正确的

答案是 C.

例 3.2 (2009 年) 若 x, y 是有理数, 且满足 $(1+2\sqrt{3})x + (1-\sqrt{3})y - 2 + 5\sqrt{3} = 0$, 则 x, y 的值分别为 ()

A. 1, 3

B. -1, 2

C. -1, 3

D. 1, 2

E. 以上结论都不正确

解 原等式为 $(x+y-2) + (2x-y+5)\sqrt{3} = 0$.

若 $2x-y+5 \neq 0$, 则 $(x+y-2) + (2x-y+5)\sqrt{3}$ 必为无理数,

即 $(x+y-2) + (2x-y+5)\sqrt{3} \neq 0$,

因此必有 $2x-y+5 = 0$, 从而 $x+y-2 = 0$.

解得 $x = -1, y = 3$

答案为 C.

例 3.3 设 $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ 的整数部分为 a , 小数部分为 b , 则 $a+3b = ()$

A. 3

B. -3

C. $-3\sqrt{3}$

D. $3\sqrt{3}$

E. $\sqrt{3}$

$$\text{解 } \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = 2+\sqrt{3},$$

$$\text{从而 } a = \left[\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \right] = [2+\sqrt{3}] = 3$$

$$b = 2 + \sqrt{3} - 3 = \sqrt{3} - 1,$$

$$\text{即 } a + 3b = 3 + 3(\sqrt{3} - 1) = 3\sqrt{3}$$

答案为 D.

例 3.4 (2008 年) (条件充分性判断) $ab^2 < cb^2$

(1) 实数 a, b, c 满足 $a+b+c=0$

(2) 实数 a, b, c 满足 $a < b < c$

解 取 $a=b=c=0$, 则 $a+b+c=0$, 但 $ab^2 < cb^2$ 不成立, 因此条件 (1) 不充分.

取 $a=-1, b=0, c=1$, 则 $a < b < c$, 但 $ab^2 < cb^2$ 也不成立, 从而知条件 (2) 不充分.

取 $a=-1, b=0, c=1$, 则条件 (1) 和条件 (2) 都成立, 即 $a+b+c=0$, $a < b < c$, 但 $ab^2 < cb^2$ 不成立.

答案为 E.

例 3.5 (2008 年) (条件充分性判断) $a > b$

(1) a, b 为实数, 且 $a^2 > b^2$

(2) a, b 为实数, 且 $\left(\frac{1}{2}\right)^a < \left(\frac{1}{2}\right)^b$

解 取 $a=-2, b=-1$, 则 $a^2 > b^2$, 但 $a > b$ 不成立, 即条件 (1) 不充分.

由条件 (2), $2^a > 2^b$, 从而 $a > b$, 即条件 (2) 是充分的

答案为 B.

4 绝对值

画一条水平直线, 在直线上取一点表示 0 (叫做坐标原点), 选取某一长度作为单位长度, 规定直线上向右的方向为正方向, 则得到如图 1-1 所示的数轴.

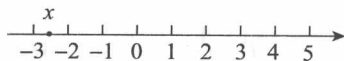


图 1-1

数轴上的点与实数之间存在着一一对应关系. 数轴上的每一个点都表示一个实数; 反过来, 每一个实数都可以在数轴上找到一个确定的点与它对应. 实数 x 的绝对值 $|x|$ 即为 x 到坐标原点 0 的距离. 因此, 对任意实数 a 有

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{当 } a > 0 \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } a = 0 \text{ 时} \\ -a, & \text{当 } a < 0 \text{ 时} \end{cases}$$