



上海市普教系统
名校长名师培养工程
优秀成果精选



虞 涛 / 编著

Shuxue Sixiangfangfa de Renwen Jiedu

数学思想方法的人文解读



上海教育出版社
SHANGHAI EDUCATIONAL
PUBLISHING HOUSE

上海市普教系统名校长名师培养工程
优秀成果精选

成长文库

(第二期 第一辑)

数学思想方法的人文解读

虞 涛/著

上海教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学思想方法的人文解读 / 虞涛编著. —上海:

上海教育出版社, 2011.7

ISBN 978-7-5444-3256-6

I. ①数... II. ①虞... III. ①数学—通俗读物 IV. ①O1-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第111739号

责任编辑 余海峰

封面设计 周 亚

插 图 唐 杰

上海市普教系统名校长名师培养工程优秀成果精选

成长文库(第二期 第一辑)

数学思想方法的人文解读

虞 涛 编 著

出版发行 上海世纪出版股份有限公司

上 海 教 育 出 版 社

易文网 www.ewen.cc

地 址 上海永福路 123 号

邮 编 200031

经 销 各地新华书店

印 刷 江苏启东人民印刷有限公司

开 本 700×1000 1/16 印张 12.75 插页 2

版 次 2011 年 7 月第 1 版

印 次 2011 年 7 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5444-3256-6/G·2496

定 价 29.00 元

(如发现质量问题,读者可向工厂调换)

上海市普教系统名校校长名师培养工程
优秀成果精选

成 长 文 库

上海市教育委员会组编

上海教育出版社出版

上海市普教系统名校校长名师培养工程
优秀成果精选

成 长 文 库

编审委员会

主 任	薛明扬	李骏修		
副主任	周国明	俞玲萍		
编 委	顾鸿达	张跃进	包南麟	王耀东
	徐崇文	王志刚	郑少鸣	洪东府
	顾志跃	陈 军	徐 虹	

上海市普教系统名校长名师培养工程

优秀成果精选

成长文库

出版前言

人才资源是第一战略资源。对于教育事业来说,最重要的是教师队伍建设。教师队伍的素质决定着教育的质量和水平。上海教育事业“十一五”规划纲要提出,到2010年,上海将在全国率先基本实现教育现代化。实现这一目标的前提是,必须造就一批具有良好师德修养、先进教育理念、厚实专业素养、开阔国际视野和较强国际交往能力,具有良好教育研究能力和教育创新能力的优秀校长和教师,并充分发挥其示范和辐射作用,带动上海教师队伍整体素质的提高。

2005年上海市在全国率先启动的普教系统“名校长名师培养工程”就是促进上海教育现代化的重要举措,它为高端教育人才的培养提供了全方位的锻造平台。该工程包括多个校长培养基地和多个教师培养基地,各培养基地以学习研修为阶梯,以课堂教学为阵地,以教育科研为抓手,通过专家引领、教学研讨、名著研读、案例分析、课题研究、访学考察等培养形式,促进中青年校长、教师迅速成长,教学能力、管理能力、教育研究能力不断提高。

为使优秀校长和教师们先进的教育思想、丰富的实践经验、高超的教学技能成为共同的社会财富,也为了探寻他们成长的轨迹,上海市教育委员会专门设立了“上海市普教系统名校长名师培养工程文库出版项目管理组”,文库出版项目管理组按既定的工作方案分阶段实施文库项目出版的具体工作,组织专家和领导严格论证和审定了列选的文库出版项目,力求反映当前本市最优秀的教育科研成果,并将文库定名为《成长文库》。收入《成长文库》的专著内容宽泛,涉及普教系统的多个方面。既有对教育教学或学校管理中的重点、难点及其对策的研究,又有对教育教学改革前沿问题的探索;既突出方法上的指导,又立足实践、

注重内容的实用性。

《成长文库》的出版,有利于推广本市一批优秀校长和教师先进的教育理念、成功的教学和管理经验、突出的教研成果,发挥典型的示范作用,同时也可以为广大幼儿园、中小学教师搭建展示成果、交流心得、切磋技能的教研平台,推动我们的教育理论研究、教学和管理实践向更深层次发展。

《成长文库》既可用作在职教师培训的生动教材和教师职前培养的重要学习内容,又可以为广大教育科研人员提供丰富的教学信息 and 研究资源,有助于教育理论研究更好地为教育教学实践服务。

《成长文库》将随着上海市普教系统名校长名师培养工程的不断推进,分辑分批出版。在它正式出版之际,我们要真诚地感谢上海市普教系统名校长名师培养基地的所有专家、学者和领导对基地学员的培养所付出的辛勤劳动,同时还要感谢其他所有给予我们热心帮助和支持的同行和朋友,让我们携手为上海教育事业的发展作出更大的贡献。

希望这套《成长文库》能成为广大教师和教育工作者的良师益友。

由于我们的认识和水平有限,《成长文库》会有许多不足之处,恳请广大读者批评指正。

上海市教育委员会

上海教育出版社

2008年12月

上海市普教系统名校长名师培养工程

优秀成果精选

成长文库

总序

《成长文库》和大家见面了,我在此表示热烈祝贺!

《成长文库》是上海市普教系统名校长名师培养工程的又一重要成果,是优秀中青年教师在导师指导下学习、思考、实践、研究的结晶。

我们提倡教师在搞好教学的同时,要学会研究,要深入研究教育教学中的实际问题,研究学生、研究课堂、研究教材、研究课程,研究学生如何轻松地学,研究教师如何高效地教,努力寻找解决实际问题的策略、方法,在实践探索 and 改革创新中促进专业成长。

《成长文库》的一本本著作正是上海市优秀中小学、幼儿园教师研究和探索结出的硕果,是他们教育教学经验的提炼,是他们成长之路的回望和解析。

成长是一个过程,是一种阅历的积累。不能浮躁,不能急功近利,不要为名利所累。要踏实认真,追求一种水到渠成的效果,追求从容淡定的境界。在成长的过程中,要读书,要思考,要践行,要用心去感悟,感悟人生的真谛,感悟教育的真谛。

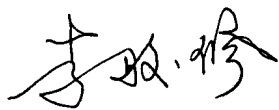
成长是生命的律动,成长也是生命的延展,只要你有对生命的热爱和敬畏,你就能体验到成长的乐趣,收获成功的喜悦,就能实现生命的一次次升华和超越。

成长就是不断地超越,超越前人,超越成见,超越世俗,超越自我,追求“海到尽头天做岸,山登绝顶我为峰”的大境界,逐渐成长为一名身正学高、善

教学、会研究的优秀人民教师。

名校长名师培养工程促进了中青年校长、教师的专业成长,但教师的成长归根结底还是为了每一个学生的成长,为了祖国的未来和希望的成长。

我衷心祝愿《成长文库》健康成长,祝愿教育事业薪火相传、一代代一批批优秀教师健康成长,更祝愿中小學生、幼儿园的孩子们幸福快乐地成长。

A handwritten signature in black ink, appearing to read '李锐' (Li Rui), with a stylized flourish at the end.

2008 年 12 月

自序

当前的中学数学教育,存在着与人文教育脱节的现象.一部分学生学习数学就是做“解题机器”.这样的学生往往基础实、知识窄、分数高,但缺乏想象力和创造力,具有“好胜心”,却缺乏“好奇心”;还有一部分学生则把数学看成升学的“拦路虎”,不得已而学之.在他们的眼里,数学是一门枯燥、乏味、抽象的学科.其实,数学与文学同为人类文明的瑰宝.它们共同的基础是人类的创造力.数学思维与文学修养都是现代人不可缺少的素质.也许在许多人的心目中,数学与文学处在人类文明的两极,前者依靠形象思维,后者有赖于理性思维,似乎两者不可兼得.

先看几位名家关于数学与人文的远见卓识:

著名华裔物理学家杨振宁说:“站在制高点,文学与数学是相通的.”

我国数学家杨乐院士说:“自然科学与人文、社会科学之间,许多基本点是相通的.”

法国著名文学家雨果说:“数学到了最后阶段就遇到想象,在圆锥曲线、对数、概率和微积分中,想象成了计算的系数,于是数学也成了诗.”

法国著名评论家福楼拜说:“越往前走,艺术越要科学化,同时,科学也要艺术化,两者从山麓分手,又在山顶汇合.”

我国著名科学家钱学森提出:现代科学六大部门(自然科学、社会科学、数学科学、系统科学、思维科学、人体科学)应当和文学艺术六大部门(小说杂文、诗词歌赋、建筑园林、书画造型、音乐、综合)紧密携手,才能有大的发展.

如此看来,数学与文学,看似风马牛不相及,实则有着奇妙的同一性.数学与文学的同一性源于人类两种基本思维方式——艺术思维与科学思维的同一性.文学是以感觉经验的形式传达人类理性思维的成果,而数学则是以理性思维的形式描述人类的感性经验.数学和文学在审美情趣上、在思维模式上有许多相通之处.文学是“以美启真”,数学则是“以真启美”,虽然方向不同,实质则为同一.

人类文明经历了两次分化——艺术与科学的分化及艺术、科学本身的分化。如今又在进行两次综合——艺术本身的综合及文学(艺术)与数学(科学)的综合。在日益飞速发展的现代社会中,大力提倡培养学生的创新意识和综合素质的今天,这种学科的综合越发显得极其重要。

中国历史悠久,文化丰厚。成语典故、唐诗宋词、文学名著,千百年来一直传诵不衰。在数学学习,我们为何不借助这些精妙的素材,阐释一些抽象的数学方法?一方面,可以在轻松愉快的人文阅读的气氛中感悟数学的魅力;另一方面,又可以通过数学的理性思考,在更广阔、更深邃的层面上理解文学。

成语——用最简洁的语言,阐述一个深刻的哲理或讽刺一种社会现象。我们可以借此剖析数学与文学在研究问题和表述问题上的相似之处。

典故——常常涉及人类发展历史中,人在自然、生活中积累的宝贵经验。我们可以寻觅数学解题方法和策略的蛛丝马迹。

唐诗宋词——言简意赅、琅琅上口、意境优美。在朗朗吟诵之时,我们可以从理性思维的角度去欣赏、评论和感受相应数学思想的意境。

小说故事——精心编造了动人心弦、悬念迭起的事件。在饶有兴味的阅读中,我们可以琢磨其中的动人情节与数学学习中共同的思维模式。

读名著,可以怡情;学数学,可以睿智。让我们在课堂上,或在课外的教与学中,有意识地引导学生从文学情韵中感悟数学思想,在数学思维中欣赏文学情境。让学生在快乐、健康的成长中,体会到文学的魅力与数学的无限价值,拥有“数学的精神、数学的思维方法、研究方法、推理方法和看问题的着眼点,使他们终生受益。”(日本著名数学教育家米山国藏)以此目的,期望能编写成一部文理交融的作品。

在成书的过程中,得到我的导师顾鸿达先生的亲切教诲,导师邱万作先生的悉心指导,在此深表感谢!

作者水平有限,不足之处,恳请读者给予指正。

虞涛

2011年3月

目 录

自序	► i
第一章 中学数学知识体系中的思想方法	► 1
第一节 计数思想——一二三四五六七	► 1
第二节 数学表示——一片花飞减却春	► 4
第三节 数学运算——百鸟归巢	► 8
第四节 集合思想——伯乐相马	► 11
第五节 命题思想——邓析赎尸诡	► 13
第六节 方程思想——墓碑谜语	► 16
第七节 函数思想——大战牛魔王	► 19
第八节 周期思想——春风吹又生	► 22
第九节 运筹思想——大破连环马	► 24
第十节 算法思想——韩信点兵	► 27
第十一节 无限思想——不尽长江滚滚来	► 31
第十二节 概率思想——呼么喝六	► 34
第十三节 统计思想——买梨尝梨	► 37
第十四节 公理化思想——道生一	► 40
第十五节 曲线方程思想——守株待兔	► 42
第十六节 空间几何思想——执竿入城	► 45
第十七节 等价思想——独树临江夜泊船	► 47
第十八节 几何变换思想——迂公移瓮	► 50
第十九节 坐标思想——笛卡尔梦境	► 51

第二十章 结构思想——山雨欲来风满楼	► 54
第二十一章 同构思想——卷土重来未可知	► 58
第二十二章 射影思想——举杯邀明月	► 61
第二十三章 代换思想——醉月频中圣	► 64
第二十四章 构造思想——封神演义	► 66
第二十五章 祖暅原理——游子身上衣	► 69
第二十六章 染色原理——绿蚁新醅酒	► 71
第二十七章 同余原理——七星瓢虫	► 73
第二十八章 对偶原理——明月松间照	► 75
第二十九章 抽屉原理——二桃杀三士	► 79
第三十章 辅助元法——巧借东风	► 82
第三十一章 反证法——道旁李苦	► 84
第三十二章 数学归纳法——三重楼喻	► 86

第二章 一般科学方法的数学表现 ► 91

第一节 演绎——老马识途	► 91
第二节 推理——舟人夜语觉潮生	► 94
第三节 想象——千里莺啼绿映红	► 97
第四节 转化——塞翁失马	► 100
第五节 观察——二月春风似剪刀	► 102
第六节 实验——巧称面积	► 105
第七节 化归——罗莎烧水	► 108
第八节 归纳——奈何姓万	► 110
第九节 穷举——煮酒论英雄	► 114
第十节 分类——孙子兵法	► 117
第十一节 比较——雪却输梅一段香	► 121
第十二节 类比——我亦举家清	► 123
第十三节 联想——春江水暖鸭先知	► 126
第十四节 设想——望梅止渴	► 129

第十五节	移植——却疑春色在邻家	► 131
第十六节	筛选——只有敬亭山	► 134
第十七节	有序——擒贼先擒王	► 138
第十八节	逆向——司马光砸缸	► 140
第十九节	检验——亡羊补牢	► 142
第二十节	质疑——月黑雁飞高	► 146
第二十一节	反例——农夫与蛇	► 149
第二十二节	倒溯——管仲辨人	► 151
第二十三节	直觉——大陆漂移说	► 156
第二十四节	极端化——更无一个是男儿	► 158
第二十五节	符号化——鸿爪雪泥	► 161
第二十六节	特殊化——调羹先遣小姑尝	► 164
第二十七节	和谐美——山意冲寒欲放梅	► 167
第二十八节	对称美——照在绿波中	► 171
第二十九节	简单美——长河落日圆	► 174
第三十节	奇异美——玉环飞燕谁敢憎	► 179
第三十一节	不变量——勇斗二郎神	► 181
附录 数学之道——非常道		► 185
参考文献		► 188

第一章 中学数学知识体系中的思想方法

第一节 计数思想——一二三四五六七

“数统治着宇宙。”

——古希腊哲学家、数学家毕达哥拉斯(Pythagoras, 约公元前 580—公元前 500)

一二三四五六七，
万木生芽是今日。
远天归雁拂云飞，
近水游鱼迸冰出。

唐·罗隐《京中正月初七立春》

这首诗很有特色，一开头从一数到七，既是起兴，也是计数，并用“七”做了这首诗的韵。因为正月初七是立春，人们熬过了冬天的严寒，企盼着春天的到来，焦急地计算着立春的日子，一天、两天……终于盼来了“万木生芽”的今日——立春，所以这样的计数也就显得自然。

像这样以纯粹的计数入诗的并不少见。传说乾隆皇帝游江南时，在杭州西湖遇上大雪，便随口吟出三句诗：

一片一片又一片，
两片三片四五片，
六片七片八九片，

如果单从这几句看实在有点“略输文采”，幸亏陪游的大臣给他续上了最后一句：

飞入芦花皆不见。

这一续突然峰回路转，点石成金，白雪片片落进白色的芦花丛中，顿时融合得不露形迹，动景起了突变，出人意外的收笔产生了奇妙的艺术效果。

我国古代的一首儿歌，与罗隐的这首诗有些类似：

一二三四五，金木水火土。

天地分上下，日月成今古。

这首诗短短的 20 个字中，包含了极为丰富的思想内容。一、二、三、四、五是除零以外最小的几个自然数，它一方面像诗歌的“起兴”一样，有总起全诗的作用，另一方面也泛指一切数量关系。第二句用金木水火土代表物质世界；第三句描写宇宙空间的广阔；第四句描写时间的永恒。中国古代也有用自然数来表示天地的做法。如《周易》中就有“天一，地二；天三，地四；……”的说法。这样，物质世界，空间的位置，日月的运行都通过数学方法来描述了。可见，在这首儿歌中，把数量、物质、时间、空间都通过数量关系联系在一起了，缤纷灿烂的物质世界，浩瀚神奇的宇宙空间，都统一于数量之中，你能觉得它不美吗？

计数是一种最基本的数学方法，也是产生最早的数学方法之一。人类在考察狩猎、捕鱼、采集果实的劳动中出现了人与物的数目对应问题，逐渐产生了最初的数的概念——自然数；实践中反复出现某些东西，从无到有，又从有到无，便产生了零的概念；解决度量中量不尽的问题，产生了分数；探讨无公度线段的比，产生了无理数；研究代数方程解法的一般理论问题，产生了负数和虚数，从而在数概念逐步扩展的基础上建立起复数系统。1843 年英国数学家哈密尔顿提出了四元数，用它来描述三维空间的旋转。与四元数相近的还有多元数，它们构成超复数，我们把复数和超复数称为狭义数，它们都有相应的运算法则，而且还扩展到许许多多更广义的“数”。这些“数”，都有某些类似于一般数的“运算”。例如，在力学中可以把力用一个向量表示，两个力 $\vec{F}_1$ 和 $\vec{F}_2$ 的合力是 $\vec{F}_3$ 时，可以记作 $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_3$ ，而这种加法也遵循交换律和结合律。于是，数学中出现的许多带有某种“运算”性质的事物，如向量、张量、矩阵，还有带有某种运算的数的集合称

为代数系统,如群、环、域,我们把这些数称为广义数.狭义数与广义数构成数系.

在注重定量研究的当今,将研究对象量化,即赋予研究对象数量特征是一种重要思想.数量特征就是用数量描述对象的特征.一个数量特征一般包括数与单位两个部分.单位也称为量纲,计量的基本标准数是用这个量纲去衡量对象后得到的数值或大小.一些对象本身具有明显的数量特征,而有些对象本身的数量特征并不明显,通常采用赋值的方法,给以数量特征.如开关电路,开关有开和关两种状态,规定闭合为1,断开为0,就可将开关状态数字化了,这样,可进一步将开关的串并联与布尔代数联系起来,使得这些代数结论能够用到数字电路的设计和分析中.又如各种评判,电视歌手大奖赛,歌手唱得好坏,都是通过数量化——评分制来进行操作评判的.赋值的实质是构造对象的一个特征到数的一一对应,即对象中的每一个个体或状态都有唯一确定的一个数与之对应,而且不同的个体或状态对应着不同的数.可以说,一个时代人们对于数的认识与应用,以及数系理论的完善程度,反映了这个时代数学发展的水平.

例 对可以进行数学运算的数进行分类.

解 如下表:

