相对论调制相互作用及非线性坍塌

李晓卿 刘三秋 著

中国科学技术出版社
CHINA SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

相对论调制相互作用及非线性坍塌

李晓卿　刘三秋　著

中国科学技术出版社
·北　京·

图书在版编目(CIP)数据

相对论调制相互作用及非线性坍塌/李晓卿,刘三秋著.
—北京:中国科学技术出版社,2012.4
ISBN 978-7-5046-6076-3

Ⅰ.①相…　Ⅱ.①李…　②刘…　Ⅲ.①相对论天体物理学-研究　Ⅳ.①P142

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 072850 号

出　　版	中国科学技术出版社
发　　行	科学普及出版社发行部
地　　址	北京市海淀区中关村南大街 16 号
邮　　编	100081
发行电话	010-62173865
传　　真	010-62179148
投稿电话	010-62103182
网　　址	http://www.cspbooks.com.cn

开　　本	787mm×1000mm　1/16
字　　数	500 千字
印　　张	24
版　　次	2012 年 5 月第 1 版
印　　次	2012 年 5 月第 1 次印刷
印　　刷	北京金信诺印刷有限公司

书　　号	ISBN 978-7-5046-6076-3/P·151
定　　价	72.00 元

致　谢

感谢国家自然科学基金项目

（项目编号：11178002）对本专著出版的资助！

序

2003 年，南昌大学有一个机会，让我们能搭建一块讲学传承、交流访问和培育硕博学子的平台，这就是三湖秋月书院。书院是开放的研究基地——在这里，你可以就读硕博研究生课程，能自由地听各种学术讲演和报告，也可以正式或非正式地来此讨论、访学或合作研究。书院的研究环境很好，有资深的导师，有独树一帜的前沿研究方向和课题，有各种计算设备和图书资料；此外，还有一个对外开放的学术网站：www.sqprt.com。书院的学子大多是 80 后，朝气蓬勃，青春向上。

至此，我们想起，在古代，江西书院林立，声名显赫。随着历史的变迁，江西书院式微了，现代甚至难觅踪迹；留下的只是让人缅怀的遗址，辉煌的江西书院早已葬在人们的记忆里了！

几年来，三湖秋月书院有了长足的发展；书院学子取得了优秀的科研成绩，可以说是硕果累累。这本新著以较大的篇幅展示、评述和深化这些成果。在此专著即将付梓之时，我们，李晓卿和刘三秋，愿意对书院莘莘学子表示由衷的谢意！对于本书的出版，希望海内外朋友喜欢。

是为序。

作者 谨识于三湖秋月书院

2011 年 10 月

引 论

世界的永恒之谜在于它是否可以被理解。

——爱因斯坦

我想知道上帝的构思，其他的都是细节。

——爱因斯坦

1844 年英国科学家兼诗人 Russell 在《波动论》一文中，报告了 10 年前他观察到在河道中快速运动的圆柱形孤波；对于这种突显局域非均匀结构和花样，国际物理界沉默了。直到 60 年后，即 1895 年，荷兰著名数学家 Koreweg 和他的学生 de Vries 建立了 KdV 方程 (Koreweg & de Vries, 1895)，并找到孤波解，从此，物理学家开始认真研究这种非均匀的孤波现象。20 世纪 50 年代，通过一台计算机，Fermi, Pasta 和 Ulam 研究了所谓 FPU 问题(Fermi，et al., 1955)：64 个质点用非线性弹簧连成一条振动弦；初始给某质点能量，于是弦上所有质点都动起来；计算机经几万次循环后，最后数值实验结果却出人意料：能量重又回到原先那个质点上，其余质点仅只有百分之几的能量。这时，人们开始意识到，原先认为均匀分布(均分态)是稳定的平衡态，不对了！存在局域非均匀花样才是 FPU 问题的正确答案。

事实上，宇宙各处都展现各种非均匀结构，均匀宇宙早已成昨日的黄花了。20 世纪 50 年代到 60 年代末，太阳大气存在非常均匀的磁场为多数天文学家所认同；随着观测技术的发展和概念的更新，这种均匀场的观点受到质疑。现在很清楚，完全均匀的场是一种臆猜的理想的场，它并非是一种实在。近代的观测表明，太阳上的磁场都有结构，而且所有磁结构，除黑子以外，都有相当小的尺度，为目前仪器所不能分辨；即便是黑子，内部也存在小尺度强场区和大间隙弱场区这样的非均匀结构。这种元磁流的磁流力学过程却是统一理解太阳物理的关键。

太阳系内行星的分布，所谓提丢斯—波德定则，提供了又一例证。原来初始均匀的太阳星云盘在演化进程中出现非均匀性，分裂为几个有规律分布的环带，它们最后演变为行星体。美丽的土星光环的情况也是类似的。

宇宙有一类活动的天体，包括 X-射线源，灾变变星、年轻星、类星体

和活动星系核，它们的辐射谱与所预期的中心天体（致密星、黑洞和中子星）有不同的特征；此外，偶然地也观测到双峰的谱线轮廓。据此，天文学家相信，这类中心天体吸积外围物质，形成一种绕转的盘结构。最近，从哈勃空间望远镜传送回来的照片清晰地展现了活动星系核 NGC4261 中心美丽的盘结构。天文学家的推断正确无误。最近一个报告指出，活动星系核的吸积盘几乎有和太阳相类似的大气结构；盘内也应该有目前更难用仪器分辨的强间歇磁流，或“磁涡”；确实，已经查明，在吸积盘内，脉动小尺度磁场比宏观磁场高出几个量级。最为重要的是，吸积盘的黏性是反常的，至少比通常物质大 8 个量级以上。如此巨大的反常黏滞是怎样产生的，一直困扰着天体物理学家。黄金律启示我们，作为中心剧变天体表现活动的大舞台，吸积盘内应有局域不均匀性的磁结构，**正是这种凹凸不平表现为粗糙性的磁结构间的“内摩擦”，导致了吸积盘物质的巨大黏性。**

茫茫宇宙，朗朗乾坤；浩瀚无垠的宇宙中，繁星灿烂。用现代科学语言，我们可以说，宇宙到处呈现物质成团的非均匀。现在可看到，如果没有非均匀，也即没有成团性，那么就不会有星系，没有银河，没有太阳系，就更没有我们赖以生存的地球了，人类也就不存在了。

繁星点点的银河，伸展了两条瑰丽的旋臂，呈现了相当大的非均匀性。有报告说，猎户分子云的条状结构呈现为规则分布的碎片，碎片间的距离约为 1pc 。和旋臂相似，它也是某种非线性作用导致的自组织现象，形成有规则分布的局域结构花样。

1953 年 4 月 25 日，英国的《自然》杂志刊登了美国的沃森（J. D. Watson）和英国的克里克（F. Crick）的研究成果：DNA 双螺旋结构的分子模型，这一成果后来被誉为 20 世纪以来生物学方面最伟大的发现。一种微型的星系不均匀的旋涡结构。

在 1959 年，俄国化学家别洛索夫(Belousov, 1959) 首先观察到并随后为扎鲍廷斯基(Zhabotinskii, 1964) 深入研究的一种化学振荡现象——溶液在无色和淡黄色两种状态间进行着规则的周期振荡——原来均匀态并不总是稳定的。

不仅自然界如此：一个不争的事实是，正是不足人口的 20%的富豪拥有全世界的 80%财富。据现代统计，80%的重要科研成果发表在不足 20%的 SCI 刊物上——在这里，我们引用俄国杰出的地球化学创始人维尔纳茨基(V.I.Vernadsky)在某个地方说过的话：“ **科学历史的每一步都证明了:**

少数人的概念比整个科学派别或成千上万个研究者的更为正确……在描述现代科学宇宙观的时候，我们不可避免地应该涉及到的正是这些少数研究者的思想、概念和著作”。1971 年诺贝尔经济学奖得主西蒙·史密斯·库兹涅茨（Simon Smith Kuznets）于 1955 年提出了收入分配状况随经济发展过程而变化的曲线——倒 U 曲线——“库兹涅茨曲线”：有差距的分配是常态。如果还要深究下去，可以说，社会各个层面非均匀常态是发展的最或然的趋势。至此，我们想起，“让少数人先富起来”，恐怕是发展社会经济的正确选择。

原来，自然界存在有一条普适规律，称之为**黄金律(universal law)**：**20%的人喝掉了80%啤酒**。对物理学，这条规律意味着，***重要的物理过程通常发生在有结构花样的局部体积内*** (Yankov, 1997)。黄金律对我们的启迪是直接的：***探究局域非均匀性和与它们密切相关的重要过程***，也许就能在被爱因斯坦称为“谜样”的宇宙浩瀚大海所冲刷的沙滩上拾到一两个晶莹的贝壳。这就是本专著的中心内容，也就是我们潜心研究的焦点。

因此，在宇宙中，不论是以电磁作用为主的还是以引力作用为主的系统，都普遍呈现了非均匀性，即到处存在局域有结构的花样。黄金律告诉我们，这种局域结构虽然占有很小的体积，但却是最为重要的实体(entities)。这种重要性有两方面的意义。其一，这些结构花样(patterns)一定是非线性实体，它们之间相互作用很弱，因而，一旦形成后，作为呈现非均匀性的标识而长久保存下来，不像稍纵即逝的漂荡云层；其次，正是由于它们的存在，各类研究对象方才表现出各种各样的活动，诸如爆发、辐射精细结构、自坍塌、成丝、自聚焦、反常黏滞、周期或规则的物质分布等。此外，黄金律还告诉我们，导致形成标识非均匀的局域结构的过程是重要的过程，不待言，这一定是某种非线性过程。That is all——这就是黄金律给我们的全部启示录(Revelation)。

那么，为什么总会出现非均匀性？与它们密切相关的重要过程是什么？这就是我们天体物理研究者所要探究的。本书的主要内容，也即我们多年来专心研究的方向，都聚焦到这两个互有联系的重要课题。在书中相关章节，对许多迥然各异的情况，读者都可以找到我们给出的答案。

目 录

第一章　电磁-伏拉索夫系统

麦克斯韦方程……“不正是上帝写下的符号?”

——玻尔兹曼

1.1　等离子体介质中电磁场

按照电动力学的观点，等离子体首先是一种介质，但是它又不是一种普通的介质。对等离子体介质，除了时间色散以外，还必须引入空间色散。换句话说，等离子体中的介电张量不仅依赖于频率ω，而且与波矢$\mathbf{k}$也密切有关。因而有必要对这种介质的电动力学性质作概略的叙述。

作为一种介质，在场的作用下，其内会出现感应电荷和感应电流，它们之间满足如下方程：

$$\mathrm{div}\mathbf{E} = 4\pi(\rho + \rho_0), \qquad \mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}(\mathbf{j} + \mathbf{j}_0), \qquad \mathrm{div}\mathbf{B} = 0. \tag{1.1}$$

式中的ρ_0和$\mathbf{j}_0$是外场源的电荷密度和电流密度。同时，ρ_0和$\mathbf{j}_0$以及感应的电荷密度ρ和电流密度$\mathbf{j}$之间的关系可从上式得到

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{j} = 0, \tag{1.2a}$$

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{j}_0 = 0. \tag{1.2b}$$

在介质中，通常的麦克斯韦（Maxwell）方程组为：

$$\mathrm{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho_0, \qquad \mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_0, \qquad \mathrm{div}\mathbf{B} = 0; \tag{1.3}$$

$$\mathbf{j} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + c\,\mathrm{rot}\mathbf{M}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}. \tag{1.4}$$

(1.4) 式规定了电感应矢量 **D**、磁场强度 **H** 与电场强度 **E** 及磁感应矢量 B 之间的关系。应该指出，上面两组麦氏方程是等价的。例如，我们从(1.1)式并利用(1.4)式便可得到(1.3)式。然而，在第二组麦氏方程(1.3)和(1.4)中，我们引进 rot**M** 这一项。在缓变场情况下，由于极化矢量时变项，$\partial \mathbf{P}/\partial t$ 较小，**M** 作为物体的单位体积磁矩，有其确定的物理意义。事实上，在此情况下，从(1.4)式有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2c}\int(\mathbf{r}\times\mathbf{j})\mathrm{d}V &= \frac{1}{2}\int[\mathbf{r}\times(\nabla\times\mathbf{M})]\mathrm{d}V \\ &= \frac{1}{2}\oint[\mathbf{r}\times(\mathrm{d}\mathbf{S}\times\mathbf{M})] - \frac{1}{2}\int(\mathbf{M}\times\nabla)\times\mathbf{r}\,\mathrm{d}V \\ &= -\frac{1}{2}\int(\mathbf{M}\times\nabla)\times\mathbf{r}\mathrm{d}V = \int\mathbf{M}\mathrm{d}V,\end{aligned}$$

由于在导体外 $\mathbf{j}=0$， $\mathbf{M}=0$ ，故上式面积分为零；利用如下公式：

$$(\mathbf{M}\times\nabla)\times\mathbf{r} = -\mathbf{M}\nabla\cdot\mathbf{r} + \mathbf{M} = -2\mathbf{M},$$

最后的积分等式是明显的。众所周知，环流量 $\mathbf{r}\times\mathbf{j}/2c$ 是导体的磁矩，因而 **M** 是单位磁矩。但在交变电磁场，尤其是在快变场情况下，$\partial \mathbf{P}/\partial t$ 不可忽略，**M** 就失去了它的明确的物理意义。因而，在所研究的情况下，以下一套方程是合适的：

$$\begin{aligned}&\mathrm{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho_0, \qquad \mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ &\mathrm{rot}\mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_0, \qquad \mathrm{div}\mathbf{B} = 0.\end{aligned} \tag{1.5}$$

利用如下关系：

$$\mathbf{D}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(\mathbf{r},t) + 4\pi\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}t'\mathbf{j}(\mathbf{r},t') \tag{1.6}$$

并考虑到电荷连续性方程(1.2)，就容易将(1.5)式化为(1.1)式。这就是说，方程(1.5)、(1.6)以及(1.2)与场方程(1.1)是完全等价的。

自然，方程组(1.5)并不是完全的。我们还必须考虑介质的电磁响应：引进描述介质电磁性质的本构方程。在等离子体介质中，交变场的变化时标往往小于介质的特征弛豫时标，介质的状态不仅取决于时刻 t 的场，而且也依赖于以前时刻的场；另一方面，由于场在空间上的变化，远点场对给定空间点的介质电磁性质亦有影响。因此，本构方程表示了场 **E** 及 **D** 的一种非局域的关系。在线性电动力学框架内，这种一般的非局域关系为

$$D_i(\mathbf{r},t)=\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}t'\int\mathrm{d}\mathbf{r}'\varepsilon_{ij}(t-t',\mathbf{r},\mathbf{r}')E_j(\mathbf{r}',t'), \tag{1.7}$$

式中张量$\varepsilon_{ij}(t-t',\mathbf{r},\mathbf{r}')$为响应函数，描述介质对电磁响应的性质。它对时间宗量$(t-t')$的依赖形式，是考虑到介质的时间均匀的结果：没有一个时刻是特殊的。如果介质对空间亦是均匀的，则上式可写为

$$D_i(\mathbf{r},t)=\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}t\int\mathrm{d}\mathbf{r}'\varepsilon_{ij}(t-t',\mathbf{r}-\mathbf{r}')E_j(\mathbf{r}',t'), \tag{1.8}$$

因此，在等离子体介质中，场方程(1.5)、本构方程(1.8)、电荷连续性方程(1.2)以及(1.6)，便是一套适合于我们目的的麦氏方程组(Silin V.P., Rukhadze, 1961)。

然而，这套麦氏方程是超定的：包括分量方程在内，共有 15 个方程；而未知场量($\mathbf{D},\mathbf{E},\mathbf{B},\mathbf{j},\rho$)只有 13 个。一般来说，超定方程组是没有自洽解的。但对麦氏方程，取(1.5)第二式的散度可得$\partial(\mathrm{div}\mathbf{B})/\partial t=0$；于是，只要在初始时刻磁感应矢量是无散的管量场，则它在任意时刻都是无散的。注意到这点，我们就可把(1.5)第四式看成为初值条件。类似地，我们取(1.5)第三式的散度，并利用式(1.2b)，可得$\partial/\partial t(\mathrm{div}\mathbf{D}-4\pi\rho_0)=0$；于是，$\mathrm{div}\mathbf{D}-4\pi\rho_0=C$，$C$为与时间无关的常数；如果初始时刻，(1.5)第一式成立，则任何时刻也成立。因而，我们也可把(1.5)第一式看成为另一个初值条件。除开这两个初始条件，这套麦克斯韦方程组就是适定的：13 个方程决定 13 个未知场量。

自从 1865 年 Maxwell 引进位移电流，对安培定律作出修正后，麦克斯韦方程是非常完备和辉煌的，多次修改麦氏方程为非线性场方程的企图都没有成功。众所周知，**麦氏方程以及洛伦兹力方程：**

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t}=q(\mathbf{E}+\frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B})$$

具有协变性或形式不变性，满足相对论的要求。事实上，两个齐次麦氏方程，它们只确定磁场对时间的变化但并没有确定导数$\partial\mathbf{E}/\partial t$，

$$\mathrm{rot}\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},\quad \mathrm{div}\mathbf{B}=0,$$

可写为

$$\partial^\alpha F^{\beta\gamma}+\partial^\beta F^{\gamma\alpha}+\partial^\gamma F^{\alpha\beta}=0,$$

其中，$\partial^\alpha\equiv\partial/\partial x_\alpha=(\partial/\partial x^0,-\nabla)$，以及

$$F^{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}0 & -E_x & -E_y & -E_z\\ E_x & 0 & -B_z & B_y\\ E_y & B_z & 0 & -B_x\\ E_z & -B_y & B_x & 0\end{pmatrix}$$

是四维($x^0=ct,x^1,x^2,x^3$) Minkovskii 空间的反对称二秩场强张量；而另外两个非齐次方程

$$\mathrm{rot}\mathbf{B}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\tilde{\mathbf{j}},\quad \mathrm{div}\mathbf{E}=4\pi\tilde{\rho}\,,$$

可表示为

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta}=\frac{4\pi}{c}J^\beta\,,$$

其中，J^α 是四维电流：$J^\alpha=(c\tilde{\rho},\tilde{\mathbf{j}})$。因而麦氏方程被表示为两个张量(二阶和一阶)方程。Minkovskii 空间的张量代数的基本定理是，如果，例如有一个张量方程，$T^\alpha_\beta=G^\alpha_\beta$，则在坐标变换下 $x^\alpha\to x'^\alpha=\Lambda^\alpha_\beta x^\beta$，

$$T'^\alpha_\beta=\Lambda^\alpha_\gamma\Lambda^\delta_\beta T^\beta_\delta=\Lambda^\alpha_\gamma\Lambda^\delta_\beta G^\beta_\delta=G'^\alpha_\beta\,;$$

也就是说，张量方程是协变的，即在通过变换与之相联系的任何惯性坐标系中方程形式不变。因此，麦氏方程具有相对论不变性。不难验证，洛伦兹力方程是如下协变的一阶张量方程

$$\frac{\mathrm{d}P^\alpha}{\mathrm{d}s}=\frac{q}{c}F^{\alpha\beta}U_\beta$$

的空间分量部分，这里，$P^\alpha=(p_0,\mathbf{p})$ 是四维矢量，$cp_0=\varepsilon$ 是能量；而 $U^\alpha=(\gamma_u c,\gamma_u\mathbf{u})$ 是四维速度，$\gamma_u=(1-u^2/c^2)^{-1}$。这个验证留给读者去做。因此，洛伦兹力方程也是相对论不变的。可以说，麦氏方程，这块等离子体物理的基石，是相当坚固的。

1.2 介电张量和空间色散

作为时空坐标点的连续函数的电磁场，我们可以通过傅里叶(Fourier)变换，把它分解为各种频率和波矢的谐波叠加，这就是谱分析。本书采用的傅里叶变换及相应的逆变换为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\int\mathbf{A}(\omega,\mathbf{k})\mathrm{e}^{-i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\mathbf{k}\,,\quad \mathbf{A}(\omega,\mathbf{k})=\int\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\mathrm{e}^{i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}\frac{\mathrm{d}t\mathrm{d}\mathbf{r}}{(2\pi)^4}.\quad(1.9)$$

除特别声明情况外，没有标出积分上、下限的，通常是指积分展布在无限大的时空区域；上式中函数 $A(\omega,\mathrm{k})$是函数 $A(\mathrm{r},t)$ 的傅里叶变换的核，两者绝不相同，只是出于一种书写上方便的考虑。此变换存在的必要条件是积

分 $\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}z\int_{-\infty}^{\infty}|\mathbf{A}(\mathbf{r},t)|\mathrm{d}t$ 收敛。我们对真实的场量，总认为满足自然边界条件，即在时空的无限远点处，一切场量及其各阶导数都趋于零。因此，在通常意义下存在这种傅里叶变换。写下两个函数乘积的傅里叶展式：

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t')G(\mathbf{r}',t') &= \int \mathrm{d}\omega\mathrm{d}\mathbf{k}\mathrm{d}\omega'\mathrm{d}\mathbf{k}'\\ &\times\exp[i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')-i\omega(t-t')]\cdot\exp[i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}'-i\omega't']F(\omega,\mathbf{k})G(\omega',\mathbf{k}')\end{aligned}$$

利用 δ 函数定义

$$\delta(\omega)\delta^3(\mathbf{k})\equiv\delta(\omega)\delta(k_x)\delta(k_y)\delta(k_z)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\int\mathrm{d}\mathbf{r}\exp(i\omega t-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}),\quad(1.10)$$

可得

$$\begin{aligned}&\int\mathrm{d}t'\int\mathrm{d}\mathbf{r}'F(r-r',t-t')G(\mathbf{r}',t')\\ &=(2\pi)^4\int\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\mathbf{k}\exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)]F(\mathbf{k},\omega)G(\mathbf{k},\omega),\end{aligned}\quad(1.11\mathrm{a})$$

或它的一维形式，

$$\int\mathrm{d}t'F(t-t')G(t')=2\pi\int\mathrm{d}\omega\exp[-i\omega t]F(\omega)G(\omega).\quad(1.11\mathrm{b})$$

这就是所谓的卷积定理。

现在我们对(1.8)式中的电矢量场进行傅里叶变换，

$$\begin{aligned}D_i(\mathbf{r},t)&=\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}t'\int\mathrm{d}\mathbf{r}'\int\mathrm{d}\mathbf{k}\mathrm{d}\omega\varepsilon_{ij}(t-t',\mathbf{r}-\mathbf{r}')\mathrm{e}^{-i(\omega t'-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}')}E_j(\omega,\mathbf{k})\\ &=\int\mathrm{d}\mathbf{k}\mathrm{d}\omega\left[\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}t'\int\mathrm{d}\mathbf{r}'\varepsilon_{ij}(t-t',\mathbf{r}-\mathbf{r}')\mathrm{e}^{i\omega(t-t')+i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}'-\mathbf{r})}E_j(\omega,\mathbf{k})\right]\mathrm{e}^{-i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})},\end{aligned}$$

根据傅氏表象 (1.9) 式，这就得到

$$D_i(\omega,\mathbf{k})=\int_0^{\infty}\mathrm{d}t\int\mathrm{d}\mathbf{r}\varepsilon_{ij}(t,\mathbf{r})\mathrm{e}^{i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}E_j(\omega,\mathbf{k}),$$

即

$$D_i(\omega,\mathbf{k})=\varepsilon_{ij}(\omega,\mathbf{k})E_j(\omega,\mathbf{k}),\quad(1.12)$$

式中

$$\varepsilon_{ij}(\omega,\mathbf{k})=\int_0^{\infty}\mathrm{d}t\int\mathrm{d}\mathbf{r}\varepsilon_{ij}(t,\mathbf{r})\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+i\omega t).\quad(1.13)$$

我们称 $\varepsilon_{ij}(\omega,\mathbf{k})$ 为介质的介电张量。它对频率 ω 的依赖关系确定频率的色散，对波矢量 $\mathbf{k}$ 的关系则表征空间色散。

类似于(1.8)式，我们可以认为感应流 $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ 是介质对电磁扰动 $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ 的线性响应结果，它们之间的一般线性非局域关系为

$$j_i(\mathbf{r},t)=\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}t'\int\mathrm{d}\mathbf{r}'\sigma_{ij}(t-t',\mathbf{r}-\mathbf{r}')E_j(\mathbf{r}',t');\quad(1.14)$$

谱分解以后得到

$$j_i(\omega,\mathbf{k})=\sigma_{ij}(\omega,\mathbf{k})E_j(\omega,\mathbf{k}),\tag{1.15}$$

其中

$$\sigma_{ij}(\omega,\mathbf{k})=\int_0^\infty \mathrm{d}t\int \mathrm{d}\mathbf{r}\sigma_{ij}(t,\mathbf{r})\mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+i\omega t},$$

类似于(1.12)式及 (1.13)式。我们称$\sigma_{ij}(\omega,\mathbf{k})$为电导率张量。它与介电张量$\varepsilon_{ij}(\omega,\mathbf{k})$有如下关系($\omega\neq 0$)

$$\varepsilon_{ij}(\omega,\mathbf{k})=\delta_{ij}+\frac{4\pi i}{\omega}\sigma_{ij}(\omega,\mathbf{k}).\tag{1.16}$$

事实上，利用(1.6)式，

$$\int[\mathbf{D}(\omega,\mathbf{k})-\mathbf{E}(\omega,\mathbf{k})]\mathrm{e}^{-i\omega t+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\mathbf{k}=4\pi\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}t'\mathbf{j}(\mathbf{r},t'),$$

对t微商，

$$\int(-i\omega)[\mathbf{D}(\omega,\mathbf{k})-\mathbf{E}(\omega,\mathbf{k})]\mathrm{e}^{-i\omega t+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\mathbf{k}=4\pi\mathbf{j}(\mathbf{r},t),$$

即

$$\mathbf{D}(\omega,\mathbf{k})=\mathbf{E}(\omega,\mathbf{k})+\frac{4\pi i}{\omega}\mathbf{j}(\omega,\mathbf{k});\tag{1.17}$$

考虑到(1.12)式和(1.17)式，得到(1.16)式。

现在，利用(1.12)式来把(1.8)式写成另一种有用的形式。由(1.12)式，

$$\begin{aligned}D_i(\mathbf{r},t)&=\int\varepsilon_{ij}(\omega,\mathbf{k})E_j(\omega,\mathbf{k})\mathrm{e}^{-i\omega t+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\mathrm{d}\mathbf{k}\mathrm{d}\omega\\&=\int K_{ij}(\omega,\mathbf{k})E_j(\omega,\mathbf{k})\mathrm{e}^{-i\omega t+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\mathrm{d}\mathbf{k}\mathrm{d}\omega+E_i(\mathbf{r},t)\end{aligned}$$

其中

$$K_{ij}(\omega,\mathbf{k})=\varepsilon_{ij}(\omega,\mathbf{k})-\delta_{ij};\tag{1.18}$$

利用(1.11)式，

$$D_i(\mathbf{r},t)=E_i(\mathbf{r},t)+\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t'\int\mathrm{d}\mathbf{r}'K_{ij}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t')E_j(\mathbf{r}',t')\frac{1}{(2\pi)^4}.\tag{1.19}$$

同时，(1.13)式可写为

$$\varepsilon_{ij}(\omega,\mathbf{k})=\delta_{ij}+\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau\int\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}K_{ij}(\boldsymbol{\rho},\tau)\mathrm{e}^{i(\omega\tau-\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\rho})}.\tag{1.20}$$

(1.19)式给出了$\mathbf{D}$和$\mathbf{E}$的非局域关系，由此可看出，t时刻的$\mathbf{D}$与t以外的其他时刻的$\mathbf{E}$有关。但是，物理上的因果关系要求，t时刻的$\mathbf{D}$仅由t时刻以前的场决定。这就意味着(1.19)式积分核

$$K_{ij}(\boldsymbol{\rho},\tau)=\int\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\mathbf{k}[\varepsilon_{ij}(\omega,\mathbf{k})-\delta_{ij}]\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\rho}-\omega\tau)}$$

包含一个阶跃函数因子$\theta(\tau)$，当$\tau<0$时，$\theta(\tau)=0$；当$\tau>0$时，$\theta(\tau)=1$。