

物理学研究生教学丛书

物理学中的群论

Group Theory in Physics

陶瑞宝 编著



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书是《物理学研究生教学丛书》中的一本。书中对有限群、李群和李代数的基本理论作了导论性的介绍。第一至第十四章对物理学中常遇到的一些群的结构和表示作了比较详细的描述,其中包括点群、空间群、磁点群、磁空间群、置换群、 $SU(2)$ 群、 $R(3)$ 群、旋转双值群和双值点群以及洛伦兹群、 $SU(M)$ 和 $GL(M)$ 群等。第十五至第二十一章,重点介绍点群和空间群在分子和固体物理中的应用,包括群论在分子和固体中电子和振动态以及半导体中电子自旋-轨道的耦合、环境场的对称破缺、朗道相变理论等领域的应用。

本书可作为物理专业的高年级学生和研究生的教材和教学参考用书,也可供从事凝聚态物理工作的读者参考。

图书在版编目(CIP)数据

物理学中的群论/陶瑞宝著. —北京:高等教育出版社, 2011. 7

ISBN 978-7-04-031205-8

I. ①物… II. ①陶… III. ①群论-应用-物理学-高等学校-教材 IV. ①O411.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第098397号

策划编辑 高建

责任编辑 张海雁

封面设计 杨立新

版式设计 王艳红

插图绘制 杜晓丹

责任校对 金辉

责任印制 刘思涵

出版发行 高等教育出版社
社址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印刷 北京人卫印刷厂
开本 787×960 1/16
印张 54.5
字数 930 000
购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598
网址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
版次 2011年7月第1版
印次 2011年7月第1次印刷
定价 78.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物料号 31205-00

序

物理学的进展日新月异,物理学的影响日益扩大,无论在理论上或技术上新的发现、发明都如百花齐放,竞相争艳。物理学的分科愈来愈细,而各分科之间的渗透日益加深,物理学对其他学科以及应用技术的贡献逐渐增加。面对这种情况,从事物理学研究的新手在浩如烟海的文献之前需要引导;在某一方面有些经验的物理学工作者要了解其他相关领域中有启发性的结果,也需要有一定的教材提供适当的资料。

编写这套《物理学研究生教学丛书》的宗旨就是为了适应这种实际需要,这样既能使刚参加物理学研究工作的人有门径可循,又可使广大的物理学工作者通过它来加深对于本分支学科的新发展的理解和掌握,并及时了解其他领域中的进展和成果,扩大视野,相互启发。这套教学丛书还将注意沟通物理学与其他学科之间的联系,促进边缘学科的成长。

物理学作为严格的、定量的自然科学的带头学科,一直在科学技术的发展中发挥着极其重要的作用。过去是如此,现在是如此,展望将来亦复是如此。从17世纪牛顿力学构成体系,到麦克斯韦统一电磁场理论,再到热力学两大定律的确立,经典物理学取得了辉煌的成就。19世纪至20世纪初,相对论的诞生消除了经典物理学的内在矛盾,量子论开启了微观物理学的新天地。此后物理学进入了百花齐放的高速发展阶段:一代代的加速器为核物理和粒子物理的研究立下了汗马功劳;巨型望远镜、射电望远镜和空间望远镜的出现,使得天体物理学的发展一日千里;激光技术引起了光学和光谱学的一场革命,导致了量子光学的诞生;许多新的物理效应的发现,诸如整数与分数量子霍尔效应、介观量子输运等,显示了凝聚态物理正大有可为。而大统一理论、超弦理论和宇宙大爆炸理论,同样也为物理学的发展画下了浓墨重彩的一笔。物理学一直是一门生机勃勃的学科,这和它具有高度的开放性是密切相关的。它和技术并没有截然的分界线,它和其他的自然科学也没有截然的分界线。它的门户总是开放的,鼓励跨学科的交流与沟通。

物理学和技术关系密切。当今的许多工程学科都是植根于经典物理学的某一分支。而20世纪的物理学诱发了许多新兴的技术科学,如原子能技术、微电子技术、光电子技术、磁电子技术等。即使像高能物理学

那样的以基础研究为主的学科,由于它采用了大量和高技术有关的研究手段,因而并不出人意料之外,它会对当代信息、网络技术做出重要的贡献。能源的取得和利用是工业生产的头等大事。20世纪物理学的一项重大贡献就在于核能的利用。这可以说是由基础研究生长出来的全新的技术部门。20世纪四五十年代,对于锗、硅等半导体的研究,揭开了材料技术的新篇章。从七十年代起,江崎和朱兆祥提出了半导体超晶格的理论设想,后又将设想与人工材料制备融为一体,巧夺天工,开启人工材料设计的奥秘,成为当今材料科学的热点。随着凝聚态物理学逐步深入到复杂结构的材料和非平衡态的体系,相应地也发展了许多新型材料,例如金属玻璃、非晶半导体、高电导聚合物、氧化物陶瓷超导体、纳米固体等。而2004年,石墨烯的发现,打破了二维晶体无法真实存在的理论预言,使它成为继富勒烯和碳纳米管后又一个里程碑式的新材料。信息技术、通信技术和控制技术已经从根本上改变了当代社会的面貌。如果说第一次工业革命是动力或能量的革命,那么第二次工业革命就是信息或负熵的革命。应该强调地指出,整个信息技术离不开物理学。1947年贝尔实验室的巴丁、布拉顿和肖克莱发明了晶体管,标志了信息时代的开始,高锟等发展了光纤通信技术使信息技术发展如虎添翼。除了信息、材料、能源技术之外,医疗卫生技术也是物理学发挥作用甚大的领域:诸如X射线透视和层析技术,核磁共振透视与层析技术等,引发了诊断技术的革命;放射元素和加速器提供了治疗癌症有效的手段。这里就不加以详述了。

为了适应世界正在兴起的新技术革命的需要,促进我国物理学研究的进一步发展,形成物理学类研究生的教育体系,《物理学研究生教学丛书》有望成为国内一套涵盖面广,内容紧跟物理学研究前沿,并且由知名专家学者执笔的教学丛书。本教学丛书包括多位院士多年科研工作的结晶,既新颖可喜,又脚踏实地,希望它的出版能有助于推动我国物理学事业的发展,为建设有中国特色的社会主义社会做出贡献。

前 言

在物理学研究的各个层次上,群论已经是一种常用的数学工具,它已被用来揭示物理体系的对称性所蕴藏的深层含义.经过几十年的积累,群论的一些术语和记号现在已经成为物理工作者的通用语言.本书是在我1986年和1989年由上海科技出版社出版的《物理学中的群论》(上、下册)一书的基础上,参考了近二十多年来群论在凝聚态物理方面的某些应用的深入和开拓,经一些修改和更新而成.由于我自己专业的局限性,本书确切地说是仅为从事凝聚态物理研究的工作者,特别是从事分子和固体物理研究的工作者而编写的,是一部物理学中的群论基础及其在分子和固体物理中的某些应用的书.因此本书无论在群论的基础部分还是应用部分,都主要集中在与分子和固体对称性相关的群的结构、表示和应用方面,对点群和空间群(包括磁点群和磁空间群)、 $SU(2)$ 群的结构及其表示作了较为详尽的介绍,应用也主要限于分子和固体中振动态和电子态相关的对称性理论方面.

本书的前面一至十四章是群论的数学基础部分,其理论框架都比较成熟,本书的改动只是一些技术性的.在这方面,国际上的一些为物理学家而写的群论专著,都有各自的侧重点,在不同的侧重点上,表现了各自的特色.本书在这些专著的基础上,尽量用我对它们理解的语言把有关群的结构和表示表述清楚.例如,三维晶体为什么只有14种晶格结构型式和230个空间群的推演,从教学的角度一直是较难能简单论证和说清的内容,受Lyubarski, O. Ya. 一书(1958)(书末参考文献[43])的启示,我采用了几何和代数相结合的方法给出了有关空间群结构的比较完整和清晰的推演,并通过对一个典型空间群的练习性的代数推导,给读者一个清晰而严格的示范,使得初学者学了这部分以后相信只要自己愿意,也是可以毫无疑问地推导出所有其他空间的结构,从而对晶体的结构有清晰的了解.同时在这次改编后的本书中,考虑到低维物理的迅速发展,我添加了对17个二维空间群的完整推演.至于有关空间群和磁空间群的表示和共表示的理论部分,本书没有作多大改动,内容仍然是主要参考了Bradley, J. C. 和 Cracknell, A. P. (1972)(书末参考文献[12])的名著,在基于Kovalev, O. V. (1961)表(书末参考文献[38])和投影表示的理论框

架, 给予空间群和磁空间群的表示一个严格而系统的介绍, 并通过具体例子来引导读者掌握如何从现有的 Kovalev 投影表示表来建造空间群的表示. 现在固体极化材料的研究愈来愈重要, 时间反演操作在凝聚态物理的研究中愈来愈重要, 因此在修改后的本书中, 我继续保留较大的篇幅介绍具有反么正操作的磁群和与它相关的共表示理论, 这部分内容, 在本书第二十一章晶体晶格振动的理论中也有明显的应用.

有关连续群部分, 根据以往的教学经验, 本书删除了原书中有关拓扑空间等两节的内容, 直接从李群出发, 并适当改写了无穷小产生子和无穷小算子部分的内容. 本书仍然保留了李代数的结构和李代数表示这两章的基本内容, 因为它不单在粒子、核和场论等领域得到大量应用, 现代凝聚态理论的发展, 也愈来愈需要李代数及其表示的理论的帮助.

本书的后面七章是关于群论在物理学中的某些应用. 首先把原来书中的“群论与量子力学”及“固体的宏观对称性”合并成第十五章的“群论与物理体系的对称性”, 添加了量子力学中的守恒量和守恒流、辫子群的简单介绍和它的一维表示、任意子统计的概念等内容. 第十六章是有关分子中电子态的对称理论, 与原来相比, 本书作了较大的精简, 重点放在分子多电子波函数的组成和分子中电子轨道的杂化等与群论紧密相关的问题. 第十七章是有关原子和离子的电子态在环境场下的对称破缺, 加重了从球对称自旋无关的高对称场下的电子态在引入各种相互作用后“对称破缺链”的对称群演化的详细描述. 改动较大的章节是第十九章有关二级相变理论和第二十章的晶体中的电子态, 在第十九章中有关朗道相变的基本理论框架, 我改为采用我们在 1989 年(书末参考文献 [58]) 所作的关于朗道相变理论的推导的工作. 此外添加了一节“非均匀相变和相动力学演化的朗道理论的推广”, 因为基于序参量时空演化的推广了的理论, 现在有着非常广泛的应用. 在第二十章中, 除了保留紧束缚近似、 $k \cdot p$ 方法外, 删除了那些比较陈旧的内容, 并以较大的篇幅添加了半导体中的自旋-轨道耦合, 从群论方法推导了目前广为应用的自旋-轨道耦合的有效哈密顿(像 Rashba, Dresselhaus 和 Lüttinger 自旋-轨道耦合哈密顿等).

我希望修改后的这部《物理学中的群论》对物理专业的研究生和青年研究工作者, 特别是在凝聚态物理领域的工作者和学生, 无论是初学者或已经有了群论基础的研究工作者有用, 希望本书的应用部分的章节可以有助于青年理论工作者深入进行研究工作.

最后我要对我的一些研究生: 马晓华、徐祖力、李易、李炜、王会平等许多同学, 在 Latex 的技术指导、初稿的阅读校对、某些图形的制作等

方面所给的帮助致以由衷的感谢。我在此也要对高等教育出版社的高建编辑的全力合作和巨大的帮助表示深深的谢意。

陶瑞宝

2011年2月于上海复旦大学

目 录

第一章 群及其基本代数性质	1
§1.1 集合、等价关系、映照	1
§1.2 群的定义	6
§1.3 群的例子	10
§1.4 群的共轭类和单旁集	14
§1.5 不变子群、中心和商群	16
§1.6 同态、同构和扩张	18
§1.7 直积群	22
习题一	24
第二章 有限群表示论基础	26
§2.1 群表示	26
§2.2 有限群表示论的一些基本定理	32
§2.3 正则表示	43
§2.4 特征标表	45
§2.5 直积群的不可约表示及内直积群表示的约化	49
§2.6 同构操作群与它的基	55
§2.7 投影算子	58
§2.8 Clebsch-Gordan 系数	60
§2.9 对称算子和不可约张量算子	67
§2.10 实表示	69
习题二	72
第三章 诱导表示和投影表示的理论	74
§3.1 基础表示	74
§3.2 分导表示和诱导表示	75
§3.3 诱导表示的几个定理	78
§3.4 有限群的投影表示	81

§3.5	投影表示的因子组	83
§3.6	投影表示的正交性关系	86
§3.7	覆盖群及不可约投影表示的构造方法	89
	习题三	95
第四章	点群	97
§4.1	点群的对称操作和对称元素	97
§4.2	对称操作的几个组合公式	100
§4.3	类的划分	103
§4.4	第一类点群的结构	106
§4.5	第二类点群的结构	112
§4.6	晶体 32 点群的国际符号和晶系	120
§4.7	点群的特征标表	121
§4.8	第二类点群的完整导出	124
	习题四	128
第五章	空间群的结构	129
§5.1	欧几里得群	129
§5.2	空间群	130
§5.3	系: 平移子群对旋转元素的限制	133
§5.4	型: 旋转元素对平移群型式的限制	137
§5.5	螺旋轴、滑移面和空间群的记号	143
§5.6	230 个三维空间群推引的举例	146
§5.7	17 个二维平面空间群结构和的推引	150
	习题五	155
第六章	空间群的表示	157
§6.1	平移群的表示	157
§6.2	空间群的布里渊区域	160
§6.3	小群和波矢量 $\{k^*\}$	163
§6.4	小表示和投影表示	169
§6.5	空间群的不可约表示	175
§6.6	空间群 $O_h^5(Fm\bar{3}n)$ 和 $O_h^3(Pm\bar{3}n)$ 的一些不可约表示举例	182
§6.7	空间群不可约表示实性的判据	190

§6.8 空间群内直积表示的简约系数	192
§6.9 不可约表示的 Herring 方法	194
§6.10 Herring 方法的举例	198
习题六	200
第七章 磁群的结构	202
§7.1 点群和空间群向磁群的推广	202
§7.2 磁点群的结构	205
§7.3 磁空间群的结构	208
习题七	215
第八章 磁群的共表示理论	216
§8.1 具有反么正元素群的共表示	216
§8.2 有限群表示论在共表示情况下的推广	219
§8.3 诱导共表示 $\widehat{H} \uparrow M$	228
§8.4 $\widehat{H} \uparrow M$ 的可约性和不可约性的判据	233
§8.5 共表示的约化和内直积的分解	241
§8.6 不可约共表示基的正交性	242
§8.7 磁点群的共表示	247
§8.8 磁空间群的共表示	251
习题八	259
第九章 置换群	261
§9.1 置换	261
§9.2 类、分法和杨氏图	265
§9.3 Frobenius 公式和不可约表示维数的图形方法	269
§9.4 计算置换群不可约表示特征标的图形方法	273
§9.5 特征标按子群元素的约化公式	278
§9.6 标准基	281
§9.7 标准不可约表示的矩阵	283
§9.8 杨氏算符和非标准基	289
§9.9 全反对称基的构成	294
§9.10 外积	298
§9.11 群 G 的 n 次对称幂和反对称幂表示的特征标公式	303
习题九	307

第十章 连续群 —— 李群	309
§10.1 李群	309
§10.2 群上不变积分	316
§10.3 无穷小群和无穷小产生子	320
§10.4 无穷小变换和无穷小算子	329
§10.5 一些变换李群的无穷小算子	334
习题十	339
第十一章 $SU(2)$、$R(3)$、双值群和洛伦兹群	341
§11.1 $SU(2)$ 群和 $R(3)$ 群	341
§11.2 $SU(2)$ 群的不可约表示	346
§11.3 旋转群 $R(3)$ 表示和旋转双值群 $R^*(3)$	351
§11.4 双值点群	353
§11.5 角动量	359
§11.6 二角动量耦合和 $SU(2)$ 群内直积表示的约化	366
§11.7 $SU(2)$ 群的 C-G 系数	369
§11.8 Lorentz 群	375
§11.9 $SL(2, C)$ 群的不可约表示	382
习题十一	384
第十二章 $GL(M, C)$ 群和 $SU(M)$ 群的张量表示	385
§12.1 $GL(M, C)$ 群的协变张量表示	385
§12.2 $GL(M, C)$ 群的逆变和混合张量表示	388
§12.3 $GL(M, C)$ 群不可约表示的维数	391
§12.4 $SU(M)$ 群的张量表示	394
§12.5 $SU(M)$ 群不可约表示内直积的分解	398
习题十二	400
第十三章 李代数的结构	401
§13.1 李代数的定义和一些名称	401
§13.2 度规张量和 Casimir 算子	409
§13.3 半单李代数的标准形式	414
§13.4 根系的性质	420
§13.5 秩 $l \leq 2$ 根向量的图形表示	426
§13.6 单根系	429

§13.7 单李代数的结构和 Dynkin 图	434
习题十三	442
第十四章 李代数的表示	443
§14.1 权与权空间	443
§14.2 半单李代数的表示	447
§14.3 不可约表示的维数	452
§14.4 李代数的不可约表示和举例	456
习题十四	462
第十五章 群论与物理体系的对称性	464
§15.1 薛定谔方程与对称算子	464
§15.2 本征函数和群表示的基	466
§15.3 微扰对简并的影响	468
§15.4 时间反演对称和附加简并	470
§15.5 量子力学中的守恒量和守恒流	474
§15.6 全同粒子交换对称性、辫子群和任意统计	480
§15.7 宏观物理体系中物理张量的分类	483
§15.8 宏观物理性质张量的时空和热力学内部对称性	484
§15.9 晶体对称性对物理张量的影响	488
§15.10 物理性质张量的约化和独立分量数	496
习题十五	501
第十六章 分子中电子态	503
§16.1 原子轨道波函数的空间分布和变换性质	504
§16.2 分子轨道波函数和 LCAO 近似	508
§16.3 成键和反键态以及 σ 键和 π 键	513
§16.4 C_nH_n 分子的分子轨道理论	517
§16.5 分子组态和分子波函数	524
§16.6 AB_n 型分子的杂化轨道	533
§16.7 杂化波函数	538
§16.8 AB_n 型分子的分子轨道理论	545
习题十六	551

第十七章 原子和离子电子态在环境场下的对称破缺 . . .	552
§17.1 哈密顿、对称破缺和群链	553
§17.2 自由原子或离子的多电子组态	558
§17.3 原子谱项在环境场情况下的分裂	565
§17.4 有效晶体场	572
§17.5 d^1 系的能级在环境场下的分裂	578
§17.6 d^2 系的能级在环境场下的分裂	585
习题十七	591
第十八章 分子振动的对称模式	592
§18.1 运动方程	592
§18.2 正则振动的对称分类和对称化坐标	595
§18.3 正则振动对称分解和对称坐标计算的实例	605
§18.4 力常数矩阵和对称性	614
§18.5 力常数矩阵计算的例子	622
§18.6 振动状态的对称性及分子光谱选择规则	635
§18.7 Jahn-Teller 效应	643
习题十八	650
第十九章 第二类相变的对称理论和晶体结构对称破缺 . . .	652
§19.1 朗道相变理论: 一维模型	652
§19.2 非均匀相变和相动力学演化的朗道理论推广	655
§19.3 朗道结构相变的对称理论	657
§19.4 朗道理论中一些群论的计算公式	667
§19.5 Molien 函数	674
§19.6 $O_h^3-P_{m3n}$ Γ 点的不可约表示的不变量	681
§19.7 O_h^3 群的子群及子群判据	687
§19.8 对称破缺方向的确定	691
习题十九	698
第二十章 晶体中的电子态	699
§20.1 晶体中电子运动的哈密顿和独立粒子近似	700
§20.2 固体能带	702
§20.3 平面波展开方法	708
§20.4 紧束缚近似	714

§20.5	$k \cdot p$ 微扰方法	723
§20.6	具有自旋轨道耦合的半导体能带和组态混合	727
§20.7	具有自旋-轨道耦合的 n 型半导体带底附近的 哈密顿矩阵	738
§20.8	p 型半导体价带顶附近的哈密顿矩阵和 Luttinger 模型哈密顿	743
	习题二十	746
第二十一章 晶格振动 747		
§21.1	力常数、动力学矩阵的对称性和正则振动	747
§21.2	对称化基及久期方程的约化	755
§21.3	时间反演对称性	765
§21.4	金刚石正则振动对称分解和对称化基	773
§21.5	金刚石结构力常数矩阵的约化	784
§21.6	金刚石结构的动力学矩阵 —— Γ 点和 Σ 线	794
§21.7	晶格谐振动在长波长区的声学模传播和 它的速度表述	802
	习题二十一	805
附录一 矩阵的直和、直积和超矩阵 807		
附录二 基和坐标的线性变换 810		
附录三 张量 815		
附录四 点群特征标表 820		
附录五 O_h 类中 48 个点操作 $\alpha_j (j = 1, 2, \dots, 48)$ 826		
附录六 O_h 类中元素 $\alpha_j (j = 1, 2, \dots, 24)$ 的乘法表 827		
附录七 D_{6h} 类中 24 个点操作 $\alpha_j (j = 1, 2, \dots, 24)$ 828		
附录八 D_{6h} 类中元素 $\alpha_j (j = 1, 2, \dots, 24)$ 的乘法表 829		

附录九 各种型式晶格的基矢	830
附录十 230 格空间群底结构 (摘自 Kovalev 表)	831
附录十一 磁点群的共表示结构	837
附录十二 本书一些符号的说明	842
各章主要参考资料	844
参考文献	846

第一章 群及其基本代数性质

§1.1 集合、等价关系、映照

(一) 集合

集合这个概念,大家在中学都已经学过.初等代数就是在数的集合基础上,引入(定义)了元素(数)之间的“加、减、乘、除”的操作后形成的.本书中,常常用大写字母 A, B, X, Y 等来标记集合;用小写字母 a, b, x, y 等来标记元素;用 $a \in A$ 来标记元素 a 属于集合 A ;用 $a \notin A$ 来标记元素 a 不属于集合 A .用 R 来标记数的集合时是指由实数全体所组成的集合,有时也称实数域或实域;用 C 来标记数的集合时,是指由复数全体所组成的集合,有时称复数域或复域.一个元素也没有的集合称为空集,常记作 \emptyset .

对于一个特定的集合,通常有两种标记方法:一种方法是把这个特定的集合中的所有元素都列出来,像实域 R 中由元素 1、3、9、14 这四个元素所组成的集合 A 可记为

$$A = \{1, 3, 9, 14\} \quad (1.1.1)$$

这种记法往往对于元素较少的简单集合比较适用.另一种记法是

$$B = \{x : x \in X, P(x)\} \quad (1.1.2)$$

它是表示集合 B 是由那些属于 X 且使命题 $P(x)$ 成立的元素组成,例如

$$\{1, -1\} = \{x : x \in R, x^2 = 1\}$$

现在关于 x 的命题 $P(x)$ 是 $x^2 = 1$.从上面的两个例式 (1.1.1) 和 (1.1.2),很自然地看到,集合 A 是属于实数集合 R 的,集合 B 是属于集合 X 的.我们称 A 是 R 的子集, B 是 X 的子集,记作 $A \subset R$ 和 $B \subset X$.由此我们可以对子集下一个定义.

子集:凡属集合 A 中的任何元素必属集合 B ,则 A 称为 B 的子集,记作 $A \subset B$.

如果我们记 $\forall a \in A$ 表示 A 中所有元素 a , 那么上述子集的定义可以用数学式表成: $\forall a \in A \Rightarrow a \in B$, 则 $A \subset B$. 这里 “ \Rightarrow ” 代表由左边的性质必导致右边的性质. 如果由左边性质导致右边性质, 又由右边性质导致左边性质, 则记作 “ \Leftrightarrow ”.

两个集合 A 和 B 相等, 它意味着对于任意一个元素 a , 存在 $a \in A \Leftrightarrow a \in B$, 记作 $A = B$. 因此由 $A \subset B$ 及 $B \subset A$, 可知 $A = B$.

若一个集合中不同元素的数目是有限的, 则称为有限集, 否则称为无限集.

和集: 两个集合 A 和 B 的和集是指或属于 A , 或属于 B 的所有元素所组成的集合, 记作 $A \cup B$. 数学符号可记为

$$A \cup B =_D \{x : x \in A \text{ 或 } x \in B\} \quad (1.1.3)$$

有时简单地记为 $A + B$.

交集: 两个集合 A 和 B 的交集是指既属于 A 同时又属于 B 的所有元素所组成的集合, 记作 $A \cap B$, 有

$$A \cap B =_D \{x : x \in A \text{ 和 } x \in B\} \quad (1.1.4)$$

差集: A 与 B 的差集是指属于 A 但不属于 B 的元素所组成的集合, 记为 $A \setminus B$, 有

$$A \setminus B =_D \{x : x \in A, x \notin B\} \quad (1.1.5)$$

又称为集合 B 相对于 A 的余集, 有时简单地记为 $A - B$.

余集: 集合 A 的余集是由那些不属于 A 的元素所组成的, 记为 A^c , 有

$$A^c =_D \{x : x \notin A\} \quad (1.1.6)$$

从上面的定义, 我们立即可知: $A \cup A = A, A \cap A = A$.

直积集: 集合 A 和 B 的直积是一个集合, 这一集合中的元素是一个有序对 (a, b) , 其中第一个元素 a 是规定一定属于集合 A 的, 而第二个元素 b 一定是属于集合 B . 记此直积集合为 $A \times B$, 有式

$$A \times B =_D \{(a, b) : a \in A, b \in B\} \quad (1.1.7)$$

在 $A \times B$ 中二个元素 (a, b) 和 (c, d) 相等, 意味着

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c, b = d$$