主编 周春荔 才裕平

CHUZHONGAOSHUQIANTIQIAOJIE

全新版

初中奥数千题巧解

[新题型]

CHUZHONGAOSHUQIANTIQIAOJIE

八年级

BANIANJI

長春出版社

作者权威

丛书主编周春荔是中国数学奥林匹克首批高级教练员,“华罗庚金杯”少年数学邀请赛组织委员会常务委员、命题委员会副主任。所有参编人员均为多年从事奥赛、“华杯”赛、“希望杯”赛的优秀教练员,他们指导的学生在国内外大赛中多次获得金、银、铜牌。

全新的理念

丛书以国家教育部颁布的《课程标准》为纲,以中国数学会普及工作委员会拟定的《中、小学数学奥赛大纲》为准绳,注重素质训练,培养解决实际问题的能力,提高学生对数学的兴趣。

全新的题型

丛书收集并精选了近年来国内外奥赛、“华杯”赛、“希望杯”赛等典型题、创新题,题型新颖,内容丰富,贴近竞赛,帮助数学特长生在数学竞赛中脱颖而出,为特长生冲刺奥数金牌架设桥梁。

解题巧妙

丛书在解题上突出一个“巧”字,特别是一题多变,一题多解,能使学生举一反三,触类旁通。不仅开拓学生思维,更能启迪学生智慧,难题亦能迎刃而解。

循序渐进

丛书从小学一年级到初中三年级,知识系统,由易到难,循序渐进,覆盖全面,编排合理,科学性强。

实用性强

丛书具有很强的实用性,它既可作为课外读物,也可作为数学辅导及数学培训班、数学兴趣小组的适用教材和教师的参考书,适合备战各类数学竞赛。

责任编辑\杜 菲·封面设计\魏金霞

ISBN 978-7-5445-0849-0

初中奥数千题巧解

CHUZHONGAOSHUQIANTIQIAOJIE

定价:16.00 元

初中奥数
千题巧解

八年级

CHUZHONGAOSHUQIANTIQIAOJIE

長春出版社

图书在版编目（CIP）数据

初中奥数千题巧解. 八年级/周春荔，才裕平主编. 长春：长春出版社，2009.5

ISBN 978－7－5445－0849－0

Ⅰ. 初…　Ⅱ. ①周…②才…　Ⅲ. 数学课－初中－解题 Ⅳ. G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 050984 号

初中奥数千题巧解（全新版·八年级）

责任编辑： 杜　菲

封面设计： 魏金霞

出版发行： 長春出版社　　总编室电话：0431－88563443

发行部电话：0431－88561180　　读者服务部电话：0431－88561177

地　　址： 吉林省长春市建设街 1377 号

邮　　编： 130061

网　　址： www.cccbs.net

制　　版： 吉林省久慧文化有限公司

印　　刷： 长春市第十一印刷厂

经　　销： 新华书店

开　　本： 880 毫米×1230 毫米　1/32

字　　数： 365 千字

印　　张： 11.25

版　　次： 2009 年 6 月第 1 版

印　　次： **2010 年 6 月第 6 次印刷**

定　　价： 16.00 元

前 言

《奥数千题巧解》自1996年出版以来经多次修订，重印二十多次，总印数超百万册，已成为奥数学习、辅导的品牌图书，深受师生的好评。

参与本书编写的作者都是长期从事数学奥林匹克研究与教学的优秀教练员，有着丰富的教学经验。他们培养的学生曾多次在国内外奥赛、“华杯”赛、“希望杯”赛等数学竞赛中获金、银、铜牌。如1989年俞杨同学参加国际数学奥赛荣获金牌；第七届“华杯”赛中许宇航同学获得金牌；2004年第九届“华杯”赛中孟繁琪、金玥、李健伟、宋佳琪、宋菲荣等同学获得金牌，苗雨等十名学生获得银牌；第五届青少年数学国际城市邀请赛中孙文博同学获金牌第一名(初中组)，汲翔同学获金牌第三名(初中组)，多人获银牌和铜牌；第47届国际数学奥林匹克竞赛中金龙同学获金牌。

为了让更多师生从此书中受益，我们聘请了在奥赛、“华杯”赛、“希望杯”赛等数学竞赛中颇有影响的中国数学奥林匹克首批高级教练员周春荔教授和原书作者共同对本书进行再次修订，按照国家教育部颁布的《课程标准》要求，以中国数学会普及工作委员会拟定的《中、小学数学竞赛大纲》为准绳，保留原书精华，增加创新内容，遴选各种考试、竞赛中的精华题，分门别类编写。本丛书从小学一年级到初中三年级共九册，由低到高，循序渐进，编排科学实用。每章均含包括知识要点：把教材中的基本点、重点、难点、疑点、考点进行归纳整理，既便于学生学习，也利于教师辅导；典例巧解：精选近年来奥赛、“华杯”赛、中小考优秀真题及创新题，这些题覆盖面广，题型新颖，由易到难，典型实用；例题点拨：解题思路分析透彻，层次分明，解题过程详细、严谨，突出一个“巧”字，注重一题多解，引起学生的学习兴趣，提高其综合学习能力；解题技巧：总结本章知识的内在联系，对其解题思路加以总结，指出解某类题型的技能和窍门，使学生竞赛能力得以升华，这是本丛书的重要特点之一。

竞赛能级训练:为满足不同层次的学生要求,习题部分分A级、B级和能力测试。A级是巩固基础知识、夯实基础,在与课堂紧密结合的基础上有针对性地训练,激活学生的思维,提高学生的解题技巧,达到能力的提高;B级是竞赛部分,试题具有创新性,开拓学生的思维,解题技巧性强,旨在提高学生适应各级竞赛的能力,迎接新的挑战;能力测试:每章后精心设计一套能力测试题,考查学生对本章的重点、难点、疑点、考点的掌握和应用能力。挑战奥赛:每册书后设有三套模拟测试题,对每个年级学生的综合能力进行考查。书后附参考答案,对能级训练、能力测试、模拟测试题给出参考答案,全部给予详解,以便学生自测时参考。

丛书虽然经过精心设计和编写,但难免有疏漏之处,望广大读者批评指正。

MULU

目　录

第一章 因式分解

知识要点

一、概念

1. 因式分解：把一个多项式化成几个整式的积的形式叫做因式分解，也可以叫分解因式.

2. 因式分解是将多项式和差的形式化成整式积的形式，简称“和差化积”，而整式乘法是将多项式积的形式化成和差的形式.

二、常用公式

1. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

2. $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$

3. $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=(a\pm b)^3\mp 3ab(a\pm b)$

4. $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=(a+b+c)^2$

5. $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

6. $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$

7. $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$，其中 n 为正整数.

8. $a^n-b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots+ab^{n-2}-b^{n-1})$，其中 n 为偶数.

9. $a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1})$，其中 n 为奇数.

说明　公式中的字母可以是数字、单项式、多项式、代数式. 因此用公式法分解因式时，要根据多项式的特点正确地选择公式.

三、常用因式分解方法

1. 提取公因式法

2. 运用公式法

3. 十字相乘法$\begin{cases}\text{小十字相乘}\\\text{双十字相乘}\end{cases}$

4. 分组分解法:分组后应能提取公因式或运用公式,组间能继续用提取公因式或公式及十字相乘法.常用分组方法:(1)按系数分组;(2)按字母分组;(3)按次数分组;(4)按符号分组;(5)重新分组.

5. 拆项、添项法

6. 换元法

7. 求根法

8. 待定系数法

第一节　因式分解(一)

典例巧解

一、提取公因式法

例1　分解因式:$x(a-b)^{2n}+y(b-a)^{2n+1}$.

点拨　$(b-a)^{2n}=(a-b)^{2n}$,$(b-a)^{2n+1}=-(a-b)^{2n+1}$,其中 n 为正整数.同时我们把$(a-b)$看做一个整体,则 $x(a-b)^{2n}+y(b-a)^{2n+1}$ 便是关于它(新元)的一个二项式,由于两项都有因式$(a-b)$,所以可以用提取公因式法分解因式.

解
$$\begin{aligned}&x(a-b)^{2n}+y(b-a)^{2n+1}\\=&x(a-b)^{2n}-y(a-b)^{2n+1}\\=&(a-b)^{2n}[x-y(a-b)]\\=&(a-b)^{2n}(x-ay+by).\end{aligned}$$

说明　此例提取的公因式$(a-b)$其本身是一个二项式,以后还会遇到更复杂的公因式.

例2　把下列各式分解因式:

(1)$-\frac{1}{3}x^{2n+2}-\frac{1}{27}x^{2n}+\frac{2}{9}x^{2n+1}$；

(2)$(ax+by)^2+(ay-bx)^2+c^2y^2+c^2x^2$；

(3)$(a^2+ab-ac)+(ab+b^2-bc)+(c^2-ca-cb)$；

(4)$2n(m-2n)(3m-2n)-3m(2n-3m)(2n-m)$.

点拨 (1)观察每一项，可发现有公因式$-\frac{1}{3}x^{2n}$.

(2)将前两个二项式平方展开后，它们中间项可以互相抵消，原式将变形为关于x^2，y^2的齐次式，即可提取公因式.

(3)观察可知，每一括号可分别分解为$a(a+b-c)$，$b(a+b-c)$及$c(c-a-b)=-c(a+b-c)$，即三个括号分解后可提取公因式$(a+b-c)$.

(4)因为$(2n-3m)(2n-m)=[-(3m-2n)][-(m-2n)]=(3m-2n)(m-2n)$，所以两个多项式的公因式为$(m-2n)(3m-2n)$.

解 (1)
$$\begin{aligned}&-\frac{1}{3}x^{2n+2}-\frac{1}{27}x^{2n}+\frac{2}{9}x^{2n+1}\\&=-\frac{1}{3}x^{2n}\left[x^2-\frac{2}{3}x+\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]\\&=-\frac{1}{3}x^{2n}\left(x-\frac{1}{3}\right)^2.\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&(ax+by)^2+(ay-bx)^2+c^2y^2+c^2x^2\\&=a^2x^2+2abxy+b^2y^2+a^2y^2-2abxy+b^2x^2+c^2y^2+c^2x^2\\&=a^2x^2+b^2x^2+c^2x^2+a^2y^2+b^2y^2+c^2y^2\\&=(a^2+b^2+c^2)x^2+(a^2+b^2+c^2)y^2\\&=(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2).\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}&(a^2+ab-ac)+(ab+b^2-bc)+(c^2-ca-cb)\\&=a(a+b-c)+b(a+b-c)-c(a+b-c)\\&=(a+b-c)(a+b-c)\\&=(a+b-c)^2.\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}&2n(m-2n)(3m-2n)-3m(2n-3m)(2n-m)\\&=2n(m-2n)(3m-2n)-3m[-(3m-2n)][-(m-2n)]\\&=2n(m-2n)(3m-2n)-3m(3m-2n)(m-2n)\\&=(m-2n)(3m-2n)(2n-3m)\end{aligned}$$

$=(m-2n)(3m-2n)[-(3m-2n)]$

$=-(m-2n)(3m-2n)^2$.

例 3 分解因式：$(x-y)^{2n+1}-(x-z)(x-y)^{2n}+2(y-x)^{2n}(y-z)$，其中 n 为正整数.

点拨 仔细观察，发现 $(x-y)^{2n}$ 为各项公因式.

解 $(x-y)^{2n+1}-(x-z)(x-y)^{2n}+2(y-x)^{2n}(y-z)$

$=(x-y)^{2n}[(x-y)-(x-z)+2(y-z)]$

$=(x-y)^{2n}(y-z)$

说明 n 是正整数时，$2n$ 是偶数，$(x-y)^{2n}=(y-x)^{2n}$；$2n+1$ 是奇数，$(x-y)^{2n+1}=-(y-x)^{2n+1}$.

例 4 解方程：$(45x+30)(33x+15)-(45x+30)(33x+16)=0$.

点拨 先将左边因式分解，提公因式 $(45x+30)$，再解方程.

解 $(45x+30)(33x+15)-(45x+30)(33x+16)=0$

$\because (45x+30)(33x+15-33x-16)=0$，

$\therefore -(45x+30)=0$.

$\therefore 3x+2=0$，

$\therefore x=-\dfrac{2}{3}$.

说明 运用提公因式法分解因式可进行求解方程，简化运算过程. 关键是观察式子或方程结构，应用因式分解改变运算顺序，以达到化简的目的.

二、运用公式法因式分解

例 5 分解因式：x^7y-xy^7.

点拨 先提取公因式，再用公式分解.

解法一 x^7y-xy^7

$=xy(x^6-y^6)$

$=xy(x^3+y^3)(x^3-y^3)$

$=xy(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$.

解法二 x^7y-xy^7

$=xy(x^6-y^6)=xy[(x^2)^3-(y^2)^3]$

$=xy(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)$

$=xy(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$.

说明 既可用平方差公式又可用立方差公式解题时,用平方差公式较简便.

例 6 分解因式:$(a+2b+c)^3-(a+b)^3-(b+c)^3$.

点拨 从此题结构看,可用公式法和“代换”法分解.

解法一 $(a+2b+c)^3-(a+b)^3-(b+c)^3$

$=(a+2b+c)^3-[(a+b)^3+(b+c)^3]$

$=(a+2b+c)^3-(a+2b+c)[(a+b)^2-(a+b)(b+c)+(b+c)^2]$

$=(a+2b+c)[(a+2b+c)^2-(a+b)^2+(a+b)(b+c)-(b+c)^2]$

$=(a+2b+c)[(2a+3b+c)(b+c)+(a+b)(b+c)-(b+c)^2]$

$=(a+2b+c)(b+c)(2a+3b+c+a+b-b-c)$

$=3(a+2b+c)(b+c)(a+b)$.

解法二 由于$(a+2b+c)+[-(a+b)]+[-(b+c)]=0$,

所以原式$=3(a+2b+c)[-(a+b)][-(b+c)]$

$=3(a+2b+c)(a+b)(b+c)$.

解法三 设 $a+b=A$,$b+c=B$,则 $a+2b+c=A+B$.

原式$=(A+B)^3-A^3-B^3$

$=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3-A^3-B^3$

$=3A^2B+3AB^2$

$=3AB(A+B)$

$=3(a+b)(b+c)(a+2b+c)$.

例 7 分解因式:$(c^2-b^2+d^2-a^2)^2-4(ab-cd)^2$.

点拨 观察上式,符合平方差公式分解.

解 $(c^2-b^2+d^2-a^2)^2-4(ab-cd)^2$

$=[(c^2-b^2+d^2-a^2)+2(ab-cd)][(c^2-b^2+d^2-a^2)-2(ab-cd)]$

$=[c^2-b^2+d^2-a^2+2ab-2cd][c^2-b^2+d^2-a^2-2ab+2cd]$

$=[(c^2-2cd+d^2)-(a^2-2ab+b^2)][(c^2+2cd+d^2)-(a^2+2ab+b^2)]$

$=[(c-d)^2-(a-b)^2][(c+d)^2-(a+b)^2]$

$=(c-d+a-b)(c-d-a+b)(c+d+a+b)(c+d-a-b)$.

说明 在因式分解的过程中,把$(c^2-b^2+d^2-a^2)^2$,$4(ab-cd)^2$ 各看成一项,然后运用平方差公式分解.

例 8 若 $x=\sqrt{2+\sqrt{2}}$,$y=\sqrt{2-\sqrt{2}}$,则 x^6+y^6 的值是________.

点拨　如将 x,y 的值直接代入求值显然不妥，可先将 x^6+y^6 分解因式.

解　x^6+y^6

$=(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$

$=(x^2+y^2)[(x^2+y^2)^2-3x^2y^2]$,

因为 $x=\sqrt{2+\sqrt{2}}, y=\sqrt{2-\sqrt{2}}$,

所以 $x^2+y^2=2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}=4, x^2y^2=(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})=2$,

$x^6+y^6=4\times(4^2-6)=40$.

说明　通过此题，可看出多项式的变形对解题的重要性.

例 9　a,b,c 是 $\triangle ABC$ 的三边长，适合等式 $a^3+b^3+c^3=3abc$. 试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

点拨　判断 $\triangle ABC$ 的形状，可从三角形三边之间的关系确定.

解　已知 $a^3+b^3+c^3-3abc=0$,

亦即 $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$.

$\because a+b+c\neq 0$,

$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$.

则 $2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=0$,

即 $(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)=0$,

$\therefore (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$.

又 $\because (a-b)^2\geqslant 0, (b-c)^2\geqslant 0, (c-a)^2\geqslant 0$,

$\therefore (a-b)^2=(b-c)^2=(c-a)^2=0$.

$\therefore a=b=c$,

$\therefore$ 此三角形为等边三角形.

说明　怎样才能举一反三、触类旁通呢？

(1)将此题延展：若四边形 $ABCD$ 的四条边长为 a,b,c,d，且 $a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd$，此四边形的四边相等吗？

上式变形为 $a^4+b^4+c^4+d^4-4abcd=0$,

$\therefore (a^4-2a^2b^2+b^4)+(c^4+d^4-2c^2d^2)+(2a^2b^2+2c^2d^2-4abcd)=0$.

$\therefore (a^2-b^2)^2+(c^2-d^2)^2+2(ab-cd)^2=0$,

$\because (a^2-b^2)^2\geqslant 0, (c^2-d^2)^2\geqslant 0, 2(ab-cd)^2\geqslant 0$,

$$\therefore \begin{cases} a^2-b^2=0, & ① \\ c^2-d^2=0, & ② \\ ab-cd=0. & ③ \end{cases}$$

$\because a>0, b>0, c>0, d>0$,

由①、②得 $a=b, c=d$(取正).

代入③得 $b^2=d^2$, $\therefore b=d$(取正).

$\therefore a=b=c=d$, $\therefore$ 此四边形为菱形.

由此,可将此题推广到 n 边形中.

(2)如改变某些项的符号,例如以 $-b$ 代替公式中的 b,仍可用公式法分解因式.

$a^3+(-b)^3+c^3-3a(-b)c$

$=[a+(-b)+c][a^2+(-b)^2+c^2-a(-b)-ac-(-b)c]$

$=(a-b+c)[a^2+b^2+c^2+ab-ac+bc]$.

(3)设 $x=a^3\geqslant 0, y=b^3\geqslant 0, z=c^3\geqslant 0$,则有 $\frac{1}{3}(x+y+z)\geqslant \sqrt[3]{xyz}$.

即 n 个非负数的算术平均数,不小于它的几何平均数.

当 $x=y=z$ 时,有 $x+y+z=3\sqrt[3]{xyz}$.

即三个非负数相等时,其和有最小值 $3\sqrt[3]{xyz}$.

三、分组分解法

1. 按系数分组

例 10 分解因式:$2ax-10ay+5by-bx$.

点拨 分组的目的是经过适当的分组后,产生公共因式,再用已有的方法进行因式分解.关键是合理分组,要多尝试.

解法一 $2ax-10ay+5by-bx$

$=(2ax-10ay)+(5by-bx)$

$=2a(x-5y)-b(x-5y)$

$=(x-5y)(2a-b)$.

解法二 $2ax-10ay+5by-bx$

$=(2ax-bx)+(-10ay+5by)$

$=x(2a-b)-5y(2a-b)$

$=(x-5y)(2a-b)$.

说明 若按 $(2ax+5by)+(-10ay-bx)$ 分组就无法再分解,要使分组后能继续分解,条件是分组后有公因式可提或有公式可用.解法一、解法二虽然有不同的分组方式,但却存在着相同的内在联系,即两组中的对应

项系数分别成比例,分别是1:(−5)和2:(−1),这也是分组中遵循的规律之一.无论哪种解法,分解的结果是一致的.

例 11 分解因式:$(ab+cd)(a^2-b^2+c^2-d^2)+(ac+bd)(a^2+b^2-c^2-d^2)$.

点拨 将原式展开后,式中 a^2,b^2,c^2,d^2 的系数分别为$(ab+cd)$与$(ac+bd)$的代数和,而$(ab+cd)+(ac+bd)$或$(ab+cd)-(ac+bd)$都可以用分组分解法分解,因此将原式按 a^2,b^2,c^2,d^2 的系数进行整理并分组即可.

解 $(ab+cd)(a^2-b^2+c^2-d^2)+(ac+bd)(a^2+b^2-c^2-d^2)$

$=(ab+cd+ac+bd)a^2+(ac+bd-ab-cd)b^2+(ab+cd-ac-bd)c^2-(ab+cd+ac+bd)d^2$

$=(ab+cd+ac+bd)(a^2-d^2)+(ac+bd-ab-cd)(b^2-c^2)$

$=(a+d)^2(b+c)(a-d)-(b+c)(a-d)(b-c)^2$

$=(b+c)(a-d)[(a+d)^2-(b-c)^2]$

$=(b+c)(a-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)$

说明 注意添括号法则:括号前面是"+"号,括号里的各项都不变符号;括号前面是"−"号,括到括号里的各项都改变符号.

例 12 分解因式:$6ax^2-9a^2xy+2xy-3ay^2$.

(四川省联赛试题)

点拨 按前两项、后两项进行分组,两组之间又出现了新的公因式$(2x-3ay)$.

解 $6ax^2-9a^2xy+2xy-3ay^2$

$=(6ax^2-9a^2xy)+(2xy-3ay^2)$

$=3ax(2x-3ay)+y(2x-3ay)$

$=(2x-3ay)(3ax+y)$.

说明 用分组分解法分解因式,分组时应观察多项式各项的系数和次数,并预见到下一步分解的可能性.

2. 按字母分组

例 13 分解因式:$x^3(a+1)-xy(x-y)(a-b)+y^3(b+1)$.

点拨 原式中含有字母 a 与字母 b 的项基本类似,故可按含 a 的项和含 b 的项分组分解.

解 $x^3(a+1)-xy(x-y)(a-b)+y^3(b+1)$

$=a[x^3-xy(x-y)]+b[xy(x-y)+y^3]+x^3+y^3$

$=ax(x^2-xy+y^2)+by(x^2-xy+y^2)+(x+y)(x^2-xy+y^2)$

$=(x^2-xy+y^2)(ax+by+x+y)$.

例 14 分解因式：$5abx-5aby+2a^2x-2a^2y+10abz+4a^2z$.

点拨 按字母 x,y,z 分组分解.

解 $5abx-5aby+2a^2x-2a^2y+10abz+4a^2z$

$=a[(2ax-2ay+4az)+(5bx-5by+10bz)]$

$=a[2a(x-y+2z)+5b(x-y+2z)]$

$=a(x-y+2z)(2a+5b)$.

3. 按次数分组

例 15 分解因式：$(xy-1)^2+(x+y-2)(x+y-2xy)$.

点拨 $(xy-1)^2$，$(x+y)^2$ 均为二次式，可先按次数分组分解，再利用公式分解.

解 $(xy-1)^2+(x+y-2)(x+y-2xy)$

$=(xy-1)^2+(x+y)^2-2(x+y)(xy+1)+4xy$

$=[(xy-1)^2+4xy]+(x+y)^2-2(x+y)(1+xy)$

$=(xy+1)^2+(x+y)^2-2(x+y)(1+xy)$

$=(xy+1-x-y)^2$.

4. 按符号分组

例 16 分解因式：$2x^3-x^2z-4x^2y+2xyz+2xy^2-y^2z$.

点拨 多项式是六项，显然需要分组.对于多项式分组的方法可采用每两项为一组或每三项为一组.

解法一 $2x^3-x^2z-4x^2y+2xyz+2xy^2-y^2z$

$=(2x^3-x^2z)-(4x^2y-2xyz)+(2xy^2-y^2z)$

$=x^2(2x-z)-2xy(2x-z)+y^2(2x-z)$

$=(2x-z)(x^2-2xy+y^2)$

$=(2x-z)(x-y)^2$.

解法二 $2x^3-x^2z-4x^2y+2xyz+2xy^2-y^2z$

$=(2x^3-4x^2y+2xy^2)-(x^2z-2xyz+y^2z)$

$=2x(x^2-2xy+y^2)-z(x^2-2xy+y^2)$

$=(x^2-2xy+y^2)(2x-z)$