中国学生解题方法大全系列

掌握一个解题方法
比做一百道题更重要

初中数学

IETIFANGFA

解题方法大全

（初三）

山西教育出版社

初中数学

IETIFANGFA

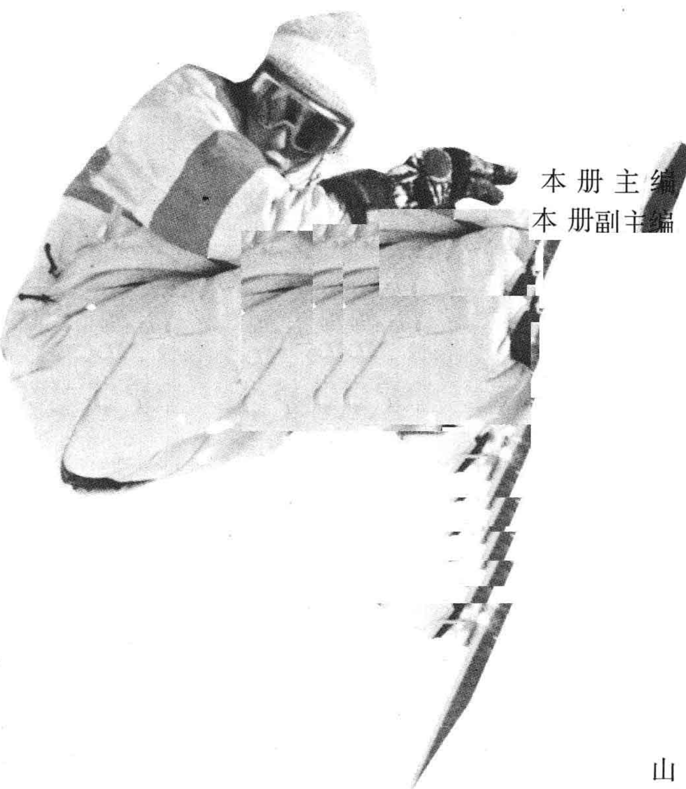
解题方法大全

（初三）

JIETIFANGFA

初中数学解题方法大全

（初三）



本册主编　陆志昌
本册副主编　郑智锐

山西教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

初中数学解题方法大会.初三/陆志昌,郑智锐编.—太原:山西教育出版社,2003.9

ISBN 7-5440-2494-6

Ⅰ.初… Ⅱ.①陆…②郑… Ⅲ.数学课-初中-解题 Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 019213 号

山西教育出版社出版发行

(太原市迎泽园小区 2 号楼)

太原市新华胶印厂印刷　新华书店经销

2003 年 9 月第 1 版　山西第 2 次印刷

开本:850×1168　1/32　印张:11.25

字数:278 千字　印数:10001-20000 册

定价:12.00 元

前　言

在基础教育中,数学是一门主课,世界各个国家都是如此.为什么人们如此重视数学呢?因数学是训练思维的体操,数学是打开科学大门的钥匙,是人们进行理性探讨的工具.数学是一种文化,属于一种科学文化,属于一种理性文化.

初中数学是打开人脑智慧之门的重要途径之一.要学好数学需要多种能力的综合,其中思维能力尤为重要.

本(丛)书介绍的解题方法、思维方法、解题窍门,符合初中生的思维特点和认识水平,深受同学们喜爱.这些是我们在多年的教学中发现、积累、总结的,有的还是第一次系统地向全国初中生作介绍.这些方法与初中数学教材有机结合,巧妙而有趣,易学、好用又好记.有这些思维方法窍门,不仅使解题快捷,而且更能激发同学们学习数学的兴趣,提高灵活解题的能力.

本(丛)书囊括了初中数学全部的知识点,例题最为典型,每道例题都代表着一个类型、一个知识点,只要把握好例题的思维方法,就能很好地掌握一个或几个知识点;体例最新,每道例题,解前都有分析,解题后有点评或误区点拨,且每章后都有配套练习题,旨在提高学生综合运用知识的能力.

本(丛)书内容翔实、知识点密集,实用性强,通过深入浅出、一点即通的讲解,既解决了初中学生解题中所遇到的难关,又把读者引到一个新的思维境界.同学们用它辅助数学学习,可开思维之窍,入解题之门,养成遇到问题抓本质的习惯;而且还可沟通不同知识的内在联系,有助于提高解题的技能和技巧,使学生受益终身;教师将它引入课堂,能活跃课堂气氛,增强教学艺术.所以它不

仅是初中生开阔眼界、拓宽思维的有益读物，而且对初中数学教师的教学也有一定的参考价值.

耕耘者总盼着丰收的金秋，这本(丛)书如能为身处题海中的初中生朋友送去一叶小舟，一副双桨，希你们顺利到达理想的彼岸.能为开启同学们的智慧带来一点裨益，作者将感到极大的欣慰.由于时间仓促，水平有限，书中缺点错误在所难免，敬请广大读者批评指正.

目 录

上篇　基础与决胜对策

解一道数学题,除了熟练掌握数学概念、运算法则、计算公式等数学基础知识外,还需要掌握思考数学问题的思维方法.掌握了一些思考方法,好像持有一串钥匙一样.有的数学问题你感到难以解决,那是因为思考方法不对,正像开锁用错了钥匙一样.如果换一把钥匙,可能很容易就把锁打开.因此,如果思考方法对头,许多难题就化难为易了.

"方法"本身是一种很重要的知识.我国古代有一个神话传说,说的是有位神仙,有"点石成金"的法术.一天,他遇到一个穷苦的石匠,便把一堆石头用手一指,"点"成黄金送给石匠,可石匠一想,一堆黄金的价值有限,如能学到点金的法术,便能把无数石头点成黄金,用以周济天下穷人.于是,他便向神仙求教"点金术".当然,这是神话,世上既没有神仙,也没有点金术.但这个传说说明一个道理:点石成金的方法,比得黄金更重要.如果我们把一些较难的数学题比做顽石,那么思考数学问题的方法便可比作"点金术".学会点金术,能把无数顽石点成黄金.同样地,学会了思考数学问题的思维方法,结合数学基础知识,便能使无数的数学问题迎刃而解,甚至达到巧解,乃至一望而知!下面开始学习有关的基础知识与决胜对策.

一、一元二次方程的解法

一元二次方程的相关内容总是各级数学竞赛和中考的热点，几乎每次数学竞赛和中考都会涉及这一重要的内容.因此在学习一元二次方程解法时要掌握以下几点：

1.四种方法，两条思路.

课本上给同学们介绍了一元二次方程的四种解法：直接开平方法、配方法、公式法和因式分解法.这四种方法实质上是两条思路：前三种方法是一条思路，它是根据方根的定义，将二次方程转化为一次方程，直接得解或逐步得解的；因式分解法则是别具一格的另一条思路，它是根据二式之积为零，必须并且只须其中一式为零，将二次方程转化为一次方程来解的.

这两种思路既是各自独立的，又是彼此有着密切联系的.所谓各自独立，是指任何一个一元二次方程都可由任意一种思路获得解答；所谓彼此有着密切联系，是指不论采取哪种思路，在方程同解变形中常常同是朝着 $x^2-a^2=0$ 或者 $(x+a)^2-b^2=0$ 这样的形式变换，至此才分道扬镳，一个转化为 $x^2=a^2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{a^2}$ 或 $(x+a)^2=b^2 \Rightarrow x+a=\pm\sqrt{b^2}$；另一个则转化为 $(x+a)(x-a)=0 \Rightarrow x+a=0, x-a=0$，或 $[(x+a)+b][(x+a)-b]=0 \Rightarrow (x+a)+b=0, (x+a)-b=0$.

从思想方法上来讲，这两种思路都是重要的数学思想方法.尤其是后一种，它不仅在解一元二次方程中有用武之地，在解高次方程及方程组中也大有用场.

2.四种方法的意义和作用各不相同.

开平方法是配方法与公式法的基础.配方法的最后一步解答实质上就是开平方法;求根公式的推导中也运用了开平方法.但在解一般的一元二次方程中很少用此法,除非是遇到缺一次项的一元二次方程时才用它去解.

配方法严格地讲它并不是一种独立的解方程的方法,而是一种恒等形的方法.在具体解一元二次方程的运算中人们很少使用它.但为了"启后"——也就是说,为了掌握好后边要学的求根公式的推导以及为了今后学好二次函数等,同学们应该在学习一元二次方程中了解并初步掌握配方的方法.

公式法是解一元二次方程最重要、最常用的方法.它实际上是对配方法与开平方法结果的套用(省略中间的变换步骤,套用最后的变换结果),在下列三种情况下:(1)系数较大;(2)不全是有理系数;(3)含有无理根,使用公式法尤其显得优越.

因式分解法可谓是一种简捷的解法,尤其是当同学们对十字相乘法很熟练时,能很快地运用此法求得一个一元二次方程的根.但是若给出的一元二次方程不是整系数或根不是有理根时,例如解方程 $x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}=0$,因式分解法就显得力所难及了.

【例 1】 下列方程是不是关于 x 的一元二次方程?

(1)$x^2+\frac{4}{x}-7=0$;　　(2)$2x^2+3y+4=0$;

(3)$\sqrt{2}x^2-3=\sqrt{5}x$;　　(4)$ax^2-4x-5=0$;

(5)$x^2-2x^3+3=0$;　　(6)$(x-2)^2=x^2-3$.

【思路分析】(1)不是整式方程;

(2)含有两个未知数;

(3)可化为$\sqrt{2}x^2-\sqrt{5}x-3=0$;

(4)二次项系数是不定值,可能等于零;

(5)未知数最高次数不是 2;

(6)化简成一般形式后,二次项系数为零,则是一元一次方程.

【解】 只有(3)是关于 x 的一元二次方程，其余都不是一元二次方程.

【知识点滴】 判定一个方程是不是一元二次方程必须从以下三点入手：

(1)是整式方程；

(2)含有一个未知数；

(3)化成一般形式后，未知数最高次数是 2，并注意二次项系数不为零.

【例 2】 写出一元二次方程 $(1-3x)(x+2)=4x^2-1$ 中的二次项系数、一次项系数及常数项.

【思路分析】 要确定二次项系数、一次项系数和常数项，必须把一元二次方程化为一般形式.

【解】 去括号，得

$$x-3x^2+2-6x=4x^2-1,$$

$$\therefore\quad 7x^2+5x-3=0.$$

方程的二次项系数是 7，一次项系数是 5，常数项是 -3.

【知识点滴】 不要漏写各项系数的符号，如方程 $7x^2+5x-3=0$ 中，常数项是 -3，而不是 3；如果一般形式中二次项系数是负数时，就把方程两边都乘以 -1，使二次项系数变为正数.

【例 3】 利用直接开平方法解下列一元二次方程：

(1)$(x+2)^2=2$；

(2)$x^2-16=0$；

(3)$x^2+10x+9=0$.

【思路分析】 (1)原方程中 $x+2$ 是 2 的平方根，因此，可运用直接开平方法求出 $x+2$，再解出 x；

(2)方程可以变形为 $x^2=16$，因此，也可以用直接开平方法求解；

(3)方程也可以变形成 $(x+5)^2=16$ 的形式，于是也可以使用

直接开平方法求解.

【解】 (1)因为 $x+2$ 是 2 的平方根,所以 $x+2=\pm\sqrt{2}$.

即 $x+2=\sqrt{2}$, 或 $x+2=-\sqrt{2}$.

∴ $x_1=-2+\sqrt{2}$, $x_2=-2-\sqrt{2}$.

(2)由方程得 $x^2=16$.

∴ $x=\pm 4$.

即 $x_1=4$, $x_2=-4$.

(3)由方程得 $x^2+2\times 5x+5^2=16$.

即 $(x+5)^2=16$.

于是有 $x+5=4$, 或 $x+5=-4$.

∴ $x_1=-1$, $x_2=-9$.

【知识点滴】直接开平方法解一元二次方程的根据是平方根的定义,对于形如 $(ax+b)^2=c$ 的一元二次方程,当 $c\geqslant 0$ 时,可转化为两个一元一次方程 $ax+b=\sqrt{c}$ 与 $ax+b=-\sqrt{c}$,这两个方程的解就是原方程的解;当 $c<0$ 时,原方程无解.

【例 4】 解下列关于 x 的方程:

(1) $(x+a)^2=\left(2x+\frac{a}{2}\right)^2$;

(2) $(ax+c)^2=d^2$ $(d\geqslant 0, a\neq 0)$.

【思路分析】因为负数没有平方根,因此只有在判明了方程的两边均是非负数,才能开平方. 在第 1 小题中,两边都是完全平方式,可以同时开平方,而在第 2 小题中,是因为给了条件 $d\geqslant 0$,才能够对 d 开平方.

【解】 (1)两边同时开方,得

$$x+a=\pm\left(2x+\frac{a}{2}\right).$$

即 $x+a=2x+\frac{a}{2}$, 或 $x+a=-\left(2x+\frac{a}{2}\right)$.

解这两个关于 x 的方程,得

$$x_1=\frac{a}{2},\quad x_2=-\frac{a}{2}.$$

(2)$\because\quad d\geqslant0$,

$\therefore$　两边同时开方,得

$$ax+c=\pm\sqrt{d}.$$

即　$ax+c=\sqrt{d}$,　或　$ax+c=-\sqrt{d}$.

又$\because\quad a\neq0$,

$\therefore\quad x_1=\dfrac{-c+\sqrt{d}}{a},\quad x_2=\dfrac{-c-\sqrt{d}}{a}.$

【知识点滴】此例第2小题中若不给条件 $d\geqslant0$,则要分情况讨论如下:

(1)若 $d>0$,则有 $ax+c=\pm\sqrt{d}$,得

$$x_1=\frac{-c+\sqrt{d}}{a},\quad x_2=\frac{-c-\sqrt{d}}{a}.$$

(2)若 $d=0$,则有 $ax+c=0$.

$\therefore\quad x_1=x_2=-\dfrac{c}{a}.$

(3)若 $d<0$,则因为一个数的平方不可能为负,所以本题无解.

【例5】　利用因式分解法解下列一元二次方程:

(1) $3x(x+2)=5(x+2)$;

(2) $3x^2-16x+5=0$;

(3) $3(2x^2-1)=7x$.

【思路分析】(1)可以展开整理成一元二次方程的一般形式,然后再用因式分解来解,但这样做比较麻烦.根据该方程的特点,直接应用因式分解法较简便.

(2)方程的左边可用十字相乘法分解因式;

(3)该方程经过变形后,也可用十字相乘法分解因式.

【解】　(1)原方程可变形为

$$3x(x+2)-5(x+2)=0.$$
$$(x+2)(3x-5)=0,$$
$$x+2=0,\quad 或\quad 3x-5=0.$$
$$\therefore\quad x_1=-2,\quad x_2=\frac{5}{3}.$$

(2)原方程可变形为

$$(3x-1)(x-5)=0.$$
$$\therefore\quad 3x-1=0,\quad 或\quad x-5=0.$$
$$\therefore\quad x_1=\frac{1}{3},\quad x_2=5.$$

(3)原方程可变形为

$$6x^2-7x-3=0.$$
$$(3x+1)(2x-3)=0,$$
$$3x+1=0,\quad 或\quad 2x-3=0.$$
$$\therefore\quad x_1=-\frac{1}{3},\quad x_2=\frac{3}{2}.$$

【题末点评】 用因式分解法解一元二次方程,关键是会判断能否用因式分解法,并能准确地进行因式分解.

【例 6】 用配方法解下列方程:

(1) $x^2-6x=11$;

(2) $2x^2-4x=7x$.

【思路分析】 (1)方程两边同时加上一次项系数“-6”一半的平方;

(2)先把方程化为一般式,再把二次项系数化为 1,就是把方程两边都除以 2.

【解】 (1)配方得 $x^2-6x+9=11+9$.

$$(x-3)^2=20.$$
$$x-3=2\sqrt{5},\quad 或\quad x-3=-2\sqrt{5}.$$
$$\therefore\quad x_1=3+2\sqrt{5},\quad x_2=3-2\sqrt{5}.$$

(2)将方程化成一般形式,得

$$2x^2-7x-4=0.$$

化二次项系数为1,得

$$x^2-\frac{7}{2}x-2=0.$$

即 $x^2-\frac{7}{2}x=2.$

配方,得

$$x^2-\frac{7}{2}x+\left(-\frac{7}{4}\right)^2=2+\left(-\frac{7}{4}\right)^2.$$

$$\left(x-\frac{7}{4}\right)^2=\frac{81}{16}.$$

解这个方程,得

$$x-\frac{7}{4}=\pm\frac{9}{4}.$$

即 $x-\frac{7}{4}=\frac{9}{4}$, 或 $x-\frac{7}{4}=-\frac{9}{4}.$

$\therefore$ $x_1=4,\quad x_2=-\frac{1}{2}.$

【题末点评】 二次项系数不是1的方程,应先化二次项系数为1,再利用配方法解.配方法解一元二次方程核对较麻烦,应该多练,才能熟能生巧.

【例7】 用公式法解下列方程:

(1) $x^2-3x+2=0$;

(2) $2x^2+7x=4$;

(3) $x^2-2\sqrt{2}x+2=0$.

【思路分析】 用公式法解一元二次方程,必须先把方程整理成一般形式:$ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$,再算出 Δ 的值,若 $\Delta\geqslant0$,然后再代入求根公式来解,如果 $\Delta<0$,方程无实数根.

【解】 (1)$\because$ $a=1,\quad b=-3,\quad c=2,$

$\therefore$ $\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times1\times2=1>0.$

$\therefore \quad x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{1}}{2\times 1}=\frac{3\pm 1}{2}.$

$\therefore \quad x_1=2,\quad x_2=1.$

(2)方程移项，得 $2x^2+7x-4=0.$

$\because \quad a=2,\quad b=7,\quad c=-4,$

$\therefore \quad \Delta=b^2-4ac=7^2-4\times 2\times(-4)=81>0.$

$\therefore \quad x=\frac{-7\pm\sqrt{81}}{2\times 2}=\frac{-7\pm 9}{4}.$

$\therefore \quad x_1=\frac{1}{2},\quad x_2=-4.$

(3) $\because \quad a=1,\quad b=-2\sqrt{2},\quad c=2,$

$\therefore \quad \Delta=b^2-4ac=(-2\sqrt{2})^2-4\times 1\times 2=0.$

$\therefore \quad x=\frac{2\sqrt{2}\pm\sqrt{0}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}.$

$\therefore \quad x_1=x_2=\sqrt{2}.$

【知识点滴】用公式法解一元二次方程，关键是确定 a、b、c 的值，首先把方程化成一般形式，二次项系数是负数的应先化为正数，二次项系数是分数或小数的先化为整数.确定 a、b、c 的值时，要注意符号，如第 3 小题中的 b 应为“$-2\sqrt{2}$”；方程有两个相等的实数根，应表示为 $x_1=x_2=\sqrt{2}$，不能表示为 $x_1=\sqrt{2}$.

【例 8】 用适当的方法解下列方程：

(1) $3x^2-18=0$；

(2) $\frac{1}{3}(x-\sqrt{3})^2=6$；

(3) $x^2-2\sqrt{2}x=4$；

(4) $x^2-(2m+1)x+m^2+m=0.$

【思路分析】(1)缺一次项，可用直接开平方法较为简捷.

(2)形如 $(x+m)^2=n\ (n\geqslant 0)$ 的方程用直接开平方法解.

(3)二次项系数为 1，一次项系数为 2 的倍数的二次方程，用