本书编写组 编

最新高中数学竞赛试题分类精编

〔例 3〕 当 $k=1,2,\cdots,n$ 时,求所有函数 $y=k(k+$

$-(2k+1)x+1$ 的图像在 x 轴上所截得线段长度的和.

解 把方程

$$k(k+1)x^2-(2k+1)x+1=0$$

化为

$$(kx-1)[(k+1)x-1]=0.$$

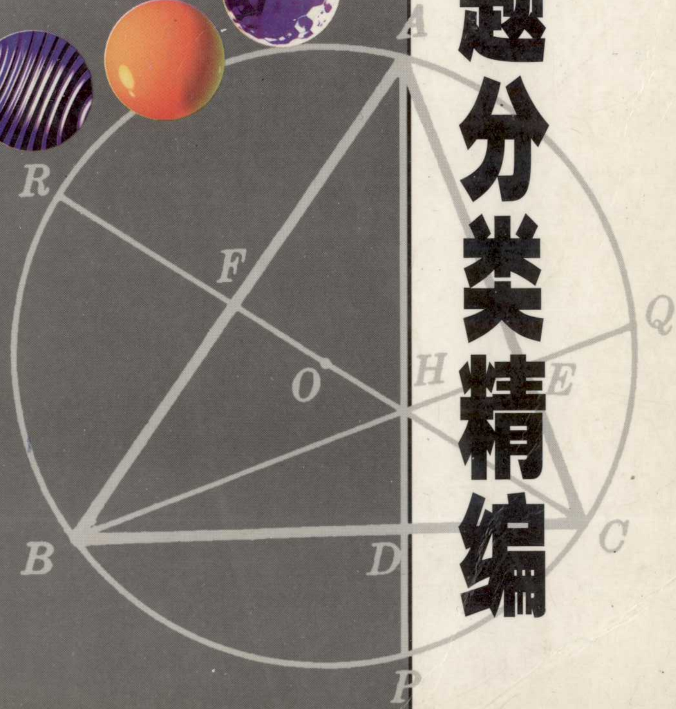
$$\therefore \quad \alpha=\frac{1}{k+1},\quad \beta=\frac{1}{k}.$$

$$\therefore \quad l=|\beta-\alpha|=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1},$$

则弦长和

$$S_n=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots$$

$$+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=\frac{n}{n+1}.$$



开明出版社

最新高中

数学竞赛试题[illegible]类精编

张慧欣　方美玲　张秀平
章建跃　邢丽华　刘　川　编

开明出版社

图书在版编目（CIP）数据

最新高中数学竞赛试题分类精编/张慧欣等编．
一北京：开明出版社，2000.1
ISBN 7-80133-399-3

Ⅰ．最…　Ⅱ．张…　Ⅲ．数学课-高中-
竞赛题　Ⅳ．G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 76276 号

责任编辑　刘维维
封面设计　羽　人

最新高中数学竞赛试题分类精编

编写　张慧欣 等
出版　开明出版社
（北京海淀区西三环北路 19 号）
印刷　山东省高青县印刷厂
发行　新华书店北京发行总店
开本　850×1168　1/32　印张 12.25　字数 270 千
版次　2000 年 3 月第 1 版　2001 年 1 月第 3 次印刷
印数　8,001—11,000
书号　ISBN 7-80133-399-3/G・338
定价　14.60 元

编者的话

我国开展数学竞赛活动已有几十年的历史，有着非常广泛的群众基础。作为普通中学数学课外活动的重要组成部分，开展“奥林匹克数学”的学习和教学，其目的是为了使那些对数学有较大兴趣爱好的、学有余力的同学能够在课堂学习的基础上，有一个进一步深入学习数学的机会，以使他们的数学学习兴趣得到进一步提高，数学能力得到进一步的培养，并促使他们更快地成长为数学方面的专门人才。

“奥林匹克数学”的学习与教学的基本途径是解题。因此，编写一套以高中数学为起点，难易程度适中，能够反映“奥林匹克数学”的知识要点、基本思想方法，体现“奥林匹克数学”思维特点的数学试题是至关重要的。为此，我们在参阅国内外各级各类数学竞赛试题的基础上，从中精选了部分试题，并参照普通高中数学教材的编排体系，编写了这本《最新高中数学竞赛试题分类精编》。

本书共分三个部分：试题部分、答案与讲解部分和模拟试卷及解答。试题按选择题、填空题和解答题的顺序，由浅入深地排列；答案与讲解中给出了每一

道试题的详细解答，并努力做到思想方法典型，解题思路自然、清晰，解答过程逻辑严谨，运算合理，易于理解。为了节省篇幅，对于那些有多个精彩解法的试题，我们在相应解答的后面给出了提示。为了便于读者检验自己的学习效果，我们编拟了三套模拟试卷，并附详细解答。

我们认为，学习数学最重要的是要独立思考，通过自己的解题实践，体验和领悟解决数学问题的思想和方法，从而形成数学思考的习惯。解答本书中的试题所用的数学知识，大部分出自高中数学，但需要综合应用，因此有一定难度，读者在遇到困难时不能轻易地放弃努力而直接阅读后面的解答，否则，学习效果会受到影响。在使用本书时，读者一定要在充分独立思考的基础上，再去参阅后面的解答，并最好将自己的解答与书上的讲解进行比较，总结概括出相应的思想方法，以做到触类旁通、举一反三，提高学习效果。

本书适合于高中学生及各类高中数学竞赛参加者使用，对参加高考者也有启发，也可供中学数学教师及高中奥林匹克数学教练员参考。

编　者

1999 年 10 月

目　录

□　试题部分

- 按照《高中数学竞赛大纲》进行分类，注重权威性、典型性、广泛性、知识性、代表性和普及性，精选了360余道试题
- 按照竞赛模式共分三种基本题型：填空题、选择题和解答题

□　答案与讲解部分

- 每道题都有答案和较为巧妙、精辟的讲解
- 当你在认真思考后仍不得其解时，再来看这部分内容，希望对你有所帮助

□　模拟试卷及解答

- 增加3套综合模拟试卷，帮助你检查在分类学习之后，综合能力提高了多少

一 集 合

试题/解答

选择题 1—10 …… 2/ 86

填空题 11—21 …… 4/ 89

解答题 22—23 …… 5/ 93

二 映射、函数

选择题 1—11 …… 7/ 96

填空题 12—19 …… 9/100

解答题 20—27 …… 10/104

三 三角函数

选择题 1—18 …… 12/109

填空题 19—27 …… 16/115

解答题 28—49 …… 17/119

四 数列（一）

选择题 1—12 …… 20/136

填空题 13—24 …… 21/140

解答题 25—27 …… 23/145

五 数列（二）

解答题 1—13 …… 24/148

六　平面几何（一）

选择题 1—10 …………………………………………………… 27/162

填空题 11—15 ………………………………………………… 29/166

解答题 16—26 ………………………………………………… 30/171

七　平面几何（二）

选择题 1—4 …………………………………………………… 33/182

填空题 5—6 …………………………………………………… 34/184

解答题 7—10 …………………………………………………… 34/185

八　几何极值与几何不等式

选择题 1—4 …………………………………………………… 36/191

解答题 5—8 …………………………………………………… 37/193

九　立体几何（一）

选择题 1—10 …………………………………………………… 38/200

填空题 11—22 ………………………………………………… 40/206

解答题 23—32 ………………………………………………… 42/215

十　立体几何（二）

选择题 1—10 …………………………………………………… 44/225

填空题 11—18 ………………………………………………… 46/230

解答题 19—23 ………………………………………………… 47/235

十一　不等式

选择题 1—4 …………………………………………………… 48/241

填空题 5—9 …………………………………………………… 49/242

解答题 10—14 …… 49/244

十二 排列组合

选择题 1—7 …… 51/250

填空题 8—15 …… 52/252

解答题 16—18 …… 53/256

十三 复 数

选择题 1—10 …… 55/261

填空题 11—20 …… 57/263

解答题 21—25 …… 58/267

十四 解析几何

选择题 1—21 …… 60/272

填空题 22—32 …… 67/280

解答题 33—48 …… 68/287

十五 数论初步

选择题 1—4 …… 72/301

填空题 5—9 …… 72/302

解答题 10—13 …… 73/305

十六 同 余

选择题 1—3 …… 74/308

填空题 4 …… 74/309

解答题 5—9 …… 74/309

十七　高斯函数
填空题 1—3 …………………………………………………… 76/313
解答题 4—8 …………………………………………………… 76/314

十八　容斥原理
解答题 1—10 …………………………………………………… 78/318

十九　抽屉原理
解答题 1—10 …………………………………………………… 80/324

二十　凸　集
解答题 1—4 …………………………………………………… 82/330

二十一　极端原理
解答题 1—3 …………………………………………………… 83/335

二十二　覆　盖
解答题 1—5 …………………………………………………… 84/337

模拟试卷（一）及解答 …………………………………… 342/346
模拟试卷（二）及解答 …………………………………… 357/360
模拟试卷（三）及解答 …………………………………… 369/372

试题部分

一 集合

选择题

1. 若集合 $M=\{x||x-1|\leqslant 2\}$，$N=\{x|x^2+7x+12\geqslant 0\}$，则 M 与 N 的关系式是(　　).

(A) $M\supset N$　　(B) $M\subset N$

(C) $M=N$　　(D) $M\cap N=\varnothing$

2. 已知集合 $A=\{x|x^2-2x-3>0\}$，$B=\{x|x^2+ax+b\leqslant 0\}$，若 $A\cup B=R$，$A\cap B=\{3<x\leqslant 4\}$，则 $a+b$ 的值为(　　).

(A) -3　　(B) 7　　(C) -7　　(D) 3

3. 已知集合 $A=\{x|-3\leqslant x\leqslant 5\}$，$B=\{x|a+1\leqslant x\leqslant 4a+1\}$，且 $A\cap B=B$，$B\neq\varnothing$，则实数 a 的取值范围是(　　).

(A) $a\leqslant 1$　　(B) $0\leqslant a\leqslant 1$

(C) $a\leqslant 0$　　(D) $-4\leqslant a\leqslant 1$

4. 已知 I 为全集，集合 M、$N\subset I$，若 $M\cup N=N$，则(　　).

(A) $\overline{M}\supseteq\overline{N}$　　(B) $M\subseteq\overline{N}$

(C) $\overline{M}\subseteq\overline{N}$　　(D) $M\supseteq\overline{N}$

5. 从复数子集 $\{x+y\mathrm{i}|1\leqslant x\leqslant y\leqslant 4,\ x,\ y\in N\}$ 中任取两个不同的元素作减法，可得(　　)不个不同的差.

(A) 30　　(B) 24　　(C) 18　　(D) 9

6. 集合 $M=\{u|u=12m+8n+4l$，其中 m、n、$l\in Z\}$，$N=$

$\{u|u=20p+16q+12r$，其中 p、q、$r\in z\}$的关系为（ ）.

(A) $M=N$　　(B) $M\not\subseteq N$，$N\not\subseteq M$

(C) $M\supset N$　　(D) $M\subset N$

7. 在坐标平面上，纵坐标都是整数的点叫整数点，我们用 I 表示所有直线的集合. M 表示恰好通过一个整点的直线集合，N 表示不通过任何整点的集合，P 表示通过无穷多个整点的直线集合，那么表达式：(1)$M\cup N\cup P=I$，(2)$M\neq\varnothing$，(3)$N\neq\varnothing$，(4)$P\neq\varnothing$中正确的个数是（ ）.

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

8. 平面上有三个点集合 M，N，P.

$$M=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|<1\},$$

$$N=\left\{(x,y)\,\Big|\,\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2}+\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2}<2\sqrt{2}\right\},$$

$$P=\{(x,y)\,|\,|x+y|<1,\ |x|<1,\ |y|<1\}.$$

则（ ）.

(A) $M\subset P\subset N$　　(B) $M\subset N\subset P$

(C) $P\subset N\subset M$　　(D) (A)、(B)、(C)都不成立

9. 设$M=\{(x,y)\,|\,|xy|=1,\ x>0\}$,

$$N=\{(x,y)\,|\,\mathrm{arctg}x+\mathrm{arcctg}y=\pi\}.$$

那么，（ ）.

(A) $M\cup N=\{(x,y)\,|\,|xy|=1\}$

(B) $M\cup N=M$

(C) $M\cup N=N$

(D) $M\cup N=\{(x,y)\,|\,|xy|=1$ 且 x，y 不同时为负数$\}$

10. 已知 f：$A \to B$ 是从集合 A 到集合 B 的一个映射，$b \in B$，那么

(1) 存在 $a \in A$，b、$c \in B$，且 $b \neq c$，使得 $f(a)=b$，又 $f(a)=c$；

(2) 存在 $a \in A$，使 $f(a) \overline{\in} B$；

(3) 有且仅有 $a \in A$，使 $f(a)=b$；

(4) 至少有一个 $a \in A$，使 $f(a)=b$.

以上命题中错误的个数有(　　).

(A) 1 个　　(B) 2 个　(C) 3 个　　(D) 4 个

填空题

11. 若 I 是全集，P、Q 是非空集合，又 $P \supset Q$.

则 $(P \cup Q) \cap (\overline{P} \cup Q)=$ ______.

12. 设集合 $A=\{1, 3, x\}$，集合 $B=\{1, x^2\}$ 且 $A \cup B=A$. 则实数 x 的值为______.

13. 设全集 $I=\{(x, y) \mid x, y \in R\}$，$M=\{(x, y) \mid \frac{y-3}{x-2}=1\}$，$N=\{(x, y) \mid y \neq x+1\}$. 则 $\overline{M \cup N}=$ ______.

14. 设集合 $A=\{$点 $P \mid P \in$ 直线 $a\}$，$B=\{$点 $Q \mid Q \in$ 直线 $b\}$，$C=\{$点 $G \mid G \in$ 平面 $\alpha\}$，$A \cap B=\varnothing$，$A \cap C=a$，$B \cap C=b$. 则 a 与 b 的位置关系是______.

15. $I=\{1, 2, 3, 4\}$，$A \subseteq I$，$B \subseteq I$. 已知 $\overline{A} \cap B=\{1\}$，$A \cap B=\{3\}$，$\overline{A} \cap \overline{B}=\{2\}$. 则 $A=$ ______，B ______.

16. 已知集合 $N=\{x \mid a+1 \leqslant x < 2a-1\}$，是集合 $M=\{x \mid -2 \leqslant x \leqslant 5\}$ 的子集，则 a 的取值为______.

17. 满足条件 $\{1, 2, 3\} \subseteq A \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

的集合 A 有______个.

18. 若 $M=\{(x, y) \mid |\mathrm{tg}\pi y|+\sin^2\pi x=0\}$.

$N=\{(x, y) \mid x^2+y^2\leqslant 2\}$,

则 $M\cap N$ 的元素个数是______.

19. 已知点集 $A=\{(x, y) \mid (x-3)^2+(y-4)^2\leqslant(\frac{5}{2})^2\}$, $B=\{(x, y) \mid (x-4)^2+(y-5)^2>(\frac{5}{2})^2\}$, 则点集 $A\cap B$ 中的整数点(即纵、横坐标均为整数的点)的个数______.

20. 从集合 $A=\{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 中任选 3 个无重复数字作为一元二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的系数，可以构成______个不同的二次函数. 其中图像顶点在 y 轴上，且开口向下的有______个.

21. 将正奇数集合 $\{1, 3, 5, \cdots\}$ 由小到大按第 n 组有 $(2n-1)$ 个奇数进行分组：

$$\underbrace{\{1\}}_{\text{第一组}}, \underbrace{\{3, 5, 7\}}_{\text{第二组}}, \underbrace{\{9, 11, 13, 15, 17\}}_{\text{第三组}},$$

则 1991 位于第______组.

解答题

22. 设集合 $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$，集合 $B=\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\}$.

问：(1) 集合 A 到集合 B 可建立多少个不同的映射？集合 B 到集合 A 呢？

(2) 集合 A 到集合 B 的子集可以建立多少个不同的一一映射？

23. 设集合 $S_n=\{1, 2, \cdots, n\}$，若 Z 是 S_n 的子集，把 Z 中

的所有数的和称 Z 的"容量"(规定空集的容量为 0). 若 Z 的容量为奇(偶)数, 则称 Z 为 S_n 的奇(偶)子集.

(1) 求证: S_n 的奇子集与偶子集个数相等;

(2) 求证: 当 $n \geqslant 3$ 时, S_n 的所有奇子集的容量之和与所有偶子集的容量之和相等;

(3) 当 $n \geqslant 3$ 时, 求 S_n 的所有奇子集的容量之和.

二　映射、函数

选择题

1. 已知 $f(x)=a\sin x+b\sqrt[3]{x}+4$（$a$, b 为实数）且 $f(\lg\log_3 10)=5$，则 $f(\lg\lg 3)$的值是（　　）.

(A) -5　　(B) -3

(C) 3　　(D)随 a, b 的取值而定

2. 若 $M=\{(x, y): |\mathrm{tg}\pi y|+\sin^2\pi x=0\}$，$N=\{(x, y): x^2+y^2\leqslant 2\}$，则 $M\cap N$ 的元素个数是（　　）.

(A) 4　　(B) 5　　(C) 8　　(D) 9

3. 设 $f(x)$是定义在实数集 R 上的函数，且满足：

(1) $f(10+x)=f(10-x)$；(2) $f(20-x)=-f(20+x)$.

则 $f(x)$是（　　）.

(A)偶函数，又是周期函数

(B)偶函数，但不是周期函数

(C)奇函数，又是周期函数

(D)奇函数，但不是周期函数

4. 设函数 $y=f(x)$对一切实数 x 都满足

$$f(3+x)=f(3-x),$$

方程 $f(x)=0$ 恰有 6 个不同实根，则这 6 个实根的和是（　　）.

(A) 18　　(B) 12　　(C) 9　　(D) 0