

秦孟兆 王雨顺 著

Structure-Preserving Algorithm for

Partial
Differential
Equation

$$d\alpha = 0 \iff \partial_\mu \left(d \frac{\partial L}{\partial u^\mu_i} \wedge du^i \right) =$$
$$\alpha = \left(\frac{\partial L}{\partial u^i} - \partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial u^\mu_i} \right) \right) du^i$$

偏微分方程中的 保结构算法



浙江出版联合集团
浙江科学技术出版社

偏微分方程中的 保结构算法

秦孟兆 王雨顺 著



团
社

图书在版编目(CIP)数据

偏微分方程中的保结构算法 / 秦孟兆, 王雨顺著.

— 杭州: 浙江科学技术出版社, 2011. 12

ISBN 978-7-5341-4398-4

I. ①偏… II. ①秦…②王… III. ①偏微分方程 - 算法 - 研究 IV. ①0175.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 017296 号

书 名 偏微分方程中的保结构算法
著 者 秦孟兆 王雨顺

出版发行 浙江科学技术出版社

杭州市体育场路 347 号 邮政编码:310006

联系电话:0571-85164982

E-mail:msm@zjpress.com

印 刷 浙江新华数码印务有限公司

开 本	787 × 1092 1/16	印 张	48.75
字 数	885 000		
版 次	2011 年 12 月第 1 版	2011 年 12 月第 1 次印刷	
书 号	ISBN 978-7-5341-4398-4	定 价	188.00 元

版权所有 翻印必究

(图书出现倒装、缺页等印装质量问题,本社负责调换)

责任编辑 莫沈茗 卢晓梅

责任校对 张 宁

责任美编 孙 菁

责任印务 田 文

谨将此书献给保结构算法的
开拓者冯康院士

当代计算方法研究的一条不成文的基本法则是，问题原型的基本特征在离散后应该尽可能地得到保持。而为了达到这一效果，则离散化应尽可能在问题原型的同一个形式框架中进行。

这些不同的数学形式是陈述同一个物理规律。由于形式不同，它们对实践上“解题”而言，自然会提供完全不同的技术途径。因此，等价的数学形式，实践上可以是不等效的。

冯 康

摘自：《自然科学进展》，1991，2:102-112.

前言

随着计算机技术的飞速发展,科学计算越来越显示出其优越性和旺盛的生命力.科学计算已经和理论研究、实验研究共同构成科学研究的三大支柱.在一些具体应用领域,如分子化学、天气预报、生物计算等,系统往往非常复杂,计算量非常庞大,积分时间也很长,不仅需要多个学科共同参与,需要机器性能不断提高,更需要好的数值方法作为基础.

在“问题原型的基本特征在离散后应该尽可能地得到保持”的原则指导下,冯康首先提出“保结构算法”的思想.他和他的研究小组在哈密尔顿系统的辛几何算法(辛算法)的构造算法和理论分析方面取得了一系列成果并且引起了国内外学者的极大兴趣,产生了许多重要的后继成果.

事实上,除了几何结构(辛结构、酉结构、接触结构等)外,冯康提出的保结构算法的概念还涵盖了保守系统的其他保守性质.由于求解系统的形式不同,有时构造保持其他结构的数值算法显得更为方便.例如,在数值天气预报中,曾庆存提出并研究发展了平方守恒格式,并将它成功应用于许多研究模式中.这里的平方守恒是指保持保守系统的能量.另外,还有大量的文献讨论了保守系统的数值格式.

这些能保持原问题(精确解)的某些结构的数值算法都可以广义地称为保结构算法.由于守恒性质(如质量守恒、能量守恒)是科学的基本规律,所以保结构算法的应用非常广泛.有关保结构算法的基本理论以及阶段性的主要成果大都收录在《哈密尔顿系统的辛几何算法》一书中.保结构算法一直是世界范围内的研究热点,所以保结构算法无论是在基本理论方面还是在应用领域中都发展得特别快.尽管辛算法在求解哈密尔顿常微分方程组时有许多优点,但在处理偏微分方程时却存在不足.传统的线方法是一个可以选择的处理手段,即首先进行空间离散,使离散得到的常微分方程组是哈密尔顿方程组,然后再应用辛算法求积.该方法的一个缺点是无法保证离散后的方程组仍然保持哈密尔顿特性.另一个处理手段是把偏微分方程看成是Banach空间上的哈密尔顿系统,直接应用辛算法,但是目前该方法只能处理非常特殊的方程.为了解决这一问题,J. E. Marsden, G. P. Patrick, S. Shkoller和T. J. Bridges, S. Reich分别从拉格朗日力学和哈密尔顿力学的角度对保守偏微分方程提出了多辛结构及多辛算法的概念.多辛算法可以看成是辛算法的直接推广,是冯康思想的一个体现.它同等对待偏微分方程的时间方向和空间方向,从而把整个时间层上的辛结构推广到局部区域甚至每个点,把无穷维哈密尔顿系统变成有穷维哈密尔顿系统,把定义在整个时间层上的哈密尔顿函数变成定义在整个区域上的哈密尔顿函数.这样可以方便地把辛算法应用于偏微分方程,从而使多辛算法可以应用到更广泛的领域.在多辛算法基础上,我们引进了局部保结构算法,其基本思想就是把原来各种保结构算法所保的整个时间层上的结构推广到局部,使得数值算法能在每个局部领域和每个点上保结构,从而不必关心系统

是否具有合适的边界条件. 局部守恒算法的概念能够从一个侧面解释某些保结构算法性能
的差异.

由微分复形所揭示的微分几何结构是偏微分方程的一个本质要素, 它对正确离散原始
微分复形有着重要意义, 这一新的几何观点为最近几十年发展起来的各种数值方法作出了
统一解释.

李群算法是保结构算法中的一个重要研究方向, 由于辛群是李群, 所以辛几何算法可
以看成是李群算法的一个特例. 近十多年来, 李群算法的研究已取得了丰硕的成果, 在许多
领域得到广泛的应用. 特别是在单程波李代数积分中的应用已在石油勘探中得到应用. 同时
辛几何算法为Maslov渐近理论提供了克服地震层析成像中的焦散问题的算法.

本书还研究了一类带耗散项的系统或者有外力作用的系统的保结构算法.

因此, 非常有必要在《哈密尔顿系统的辛几何算法》的基础上编写本书, 把保结构算
法的新理论和新算法进行系统总结, 让大家更全面地了解保结构算法. 作者也希望本书能
够成为一块基石, 帮助更多的人对保结构算法产生兴趣, 从而使这一领域产生更多突破性
的成果.

本书的内容涵盖了中国科学院计算数学与工程计算研究所辛几何算法课题组近几年
来的研究工作, 先后参加这个课题组的有赵平福、王雨顺、孙雅娟、陈景波、刘亭亭、孙建
强、苏红玲、田益民. 本书的出版同样得到尚在久、唐贻发、洪佳林研究员的关心和支持.

特别要提出的是, 本书的出版得到了中国科学院地理与地球物理研究所的李幼铭和刘
洪的支持.

最后, 作者还要感谢中国科学院数学与系统科学研究院、南京师范大学数学科学院的
支持.

本书先后得到国家自然科学基金(10871099, 11071251, 11161017), 国家重点基础研究
发展计划(973)(2007CB209603)和国家高科技研究发展计划(863)(2010AA012304, 2006A
A09A102-08)的资助.

本书可作为高等院校理工类专业研究生的教材, 也可作为从事计算数学、计算物理、
计算力学、计算化学、天气预报、天体物理、地球物理等专业, 特别是从事偏微分方程数值
计算科技工作者的参考书.

本书在写作过程中参考了大量文献, 其中有些并未在文中标注, 但也列在了参考文献
中. 此外, 书中一些向量和矩阵符号沿袭了常用的写法, 存在粗体和非粗体共用的情况.

由于作者水平有限, 书中一定会有不当和错误之处, 敬请读者批评指正.

作者

2011年12月于北京

目 录

第一章 一般辛结构下的生成函数法	1
§1.1 生成函数的几何意义	1
§1.2 简要叙述生成函数法	2
§1.3 一般意义下的生成函数法	7
§1.4 保体积格式的生成函数法	8
§1.5 一般辛结构下的 Hamilton 系统的辛格式	24
参考文献	31
第二章 有限维 Birkhoff 系统的辛结构和辛格式	33
§2.1 Birkhoff 方程	33
§2.2 Birkhoff 结构和 Birkhoff 辛结构	34
§2.3 依赖于时空变量的辛结构 $K(z, t)$ 的生成函数	37
§2.4 Birkhoff 方程的 $K(z, t)$ -辛差分格式	43
§2.5 带阻尼的振动方程的 Birkhoff 辛格式	48
§2.6 数值实验	54
§2.7 附录: 格式推导	58
参考文献	69
第三章 李群算法及其应用	71
§3.1 研究李群算法的背景	71
§3.2 预备知识	76
§3.2.1 李群	76
§3.2.2 李代数	79
§3.2.3 李群 $\text{Diff}(\mathcal{M})$ 的李代数	81
§3.2.4 流形上的微分方程	82
§3.2.5 伴随表示	82
§3.2.6 指数映射和它的微分	82
§3.2.7 李代数作用	85

§3.3 李群算法	86
§3.3.1 李群算法的理论基础	86
§3.3.2 Runge-Kutta-Munthe-Kaas (RKMK)方法描述	97
§3.4 KdV方程平方守恒型格式的构造	99
§3.4.1 有限差分空间离散	100
§3.4.2 Fourier 拟谱空间离散	102
§3.5 数值实验	105
§3.6 Magnus方法介绍	110
§3.6.1 Magnus方法介绍	110
§3.6.2 用Magnus 方法解无阻尼Landau-Lifshitz 方程	115
§3.7 等谱流问题的李群算法	118
§3.7.1 等谱流问题	118
§3.7.2 等谱流的李群方法及李群算法中的牛顿迭代	120
§3.7.3 数值实验	123
§3.8 单程波李代数积分及应用	124
§3.8.1 拟微分算子及其象征	124
§3.8.2 象征的Witt 积或象征的组合	127
§3.8.3 单平方根算子的象征	128
§3.8.4 象征的Witt 除法	129
§3.8.5 交换算子的象征	130
§3.8.6 算子高次幂的象征	130
§3.8.7 算子指数函数的象征	130
§3.8.8 2 维象征的Witt 积	132
§3.8.9 单程波算子李代数积分	132
§3.8.10 单程波算子的格林函数	134
§3.8.11 结论	139
参考文献	141

第四章 无穷维Hamilton 系统的辛几何算法 145

§4.1 无穷维Hamilton 方程	146
§4.1.1 Banach 空间中的辛流形与辛结构	152
§4.1.2 Hamilton 向量场和Hamilton 系统	155
§4.1.3 生成泛函	159
§4.2 利用生成泛函构造辛格式	166

§4.2.1	利用生成泛函构造格式的一般理论	166
§4.2.2	应用	170
§4.2.3	数值实验	181
§4.3	波动方程辛差分格式的其他构造方法	184
§4.3.1	多级显式辛格式	184
§4.3.2	差分格式稳定性分析	190
§4.3.3	多级隐式辛格式	196
§4.3.4	数值实验	197
§4.4	应用双曲函数构造辛格式	199
§4.4.1	用双曲正切函数构造辛格式	200
§4.4.2	用双曲正弦函数构造辛格式	202
§4.4.3	用双曲余弦函数构造辛格式	205
参考文献		209
第五章	多辛几何算法	211
§5.1	变分积分子与Lee 积分子	211
§5.1.1	Lagrange变分原理	211
§5.1.2	Marsden变分原理的新观点	214
§5.1.3	Veselov离散变分的变分原理	217
§5.1.4	三类辛积分子的变分描述	219
§5.1.5	高阶方程的变分积分子	223
§5.1.6	数值结果	229
§5.1.7	全变分	233
§5.1.8	数值实验	241
§5.1.9	Hamilton形式全变分	245
§5.1.10	离散力学和有限元方法	257
§5.2	多辛几何	268
§5.2.1	多辛几何基本知识	268
§5.2.2	多辛形式公式	274
§5.2.3	离散的多辛几何	283
§5.2.4	对称及延拓向量场	288
§5.2.5	多辛方程及由多辛公式给出的守恒律	297
§5.3	Bridges 意义下的多辛结构	308
§5.3.1	Bridges 意义下的多辛结构	308

§5.3.2	Klein-Gordon 方程的多辛结构	313
§5.3.3	Klein-Gordon 方程的多辛格式	320
§5.3.4	sine-Gordon方程的Preissmann格式	322
§5.4	复合方法构造多辛算法	324
§5.4.1	两类实用的辛算法	325
§5.4.2	复合方法构造多辛格式	327
§5.4.3	数值实验和分析	339
§5.4.4	高维推广	347
§5.5	高精度多辛格式的构造	353
§5.5.1	波方程辛格式的分析	353
§5.5.2	后项误差分析方法	355
§5.5.3	修正的线性波方程的多辛格式的构造	357
§5.5.4	第一类生成函数法的变分描述	368
§5.5.5	非线性波方程的多辛格式的构造	372
§5.5.6	对线性波方程的整体误差分析和数值实验	376
§5.6	Schrödinger方程的辛与多辛形式	387
§5.6.1	Schrödinger方程的多辛结构	387
§5.6.2	非线性Schrödinger方程的辛算法	395
§5.6.3	非线性Schrödinger方程的多辛算法	398
§5.6.4	线性稳定性分析	401
§5.6.5	数值实验	403
§5.6.6	Schrödinger方程的变分积分分子	406
§5.6.7	多辛积分分子与变分积分分子	410
§5.7	辛与多辛Fourier拟谱方法	411
§5.7.1	辛Fourier拟谱方法	412
§5.7.2	多辛Fourier拟谱方法	417
§5.7.3	辛与多辛Fourier拟谱方法的关系	418
§5.7.4	数值实验	421
§5.8	KdV方程的多辛格式	423
§5.8.1	多辛方程组	423
§5.8.2	KdV方程的多辛Preissmann格式	426
§5.8.3	12点格式的一些数值结果	429
§5.8.4	多辛方程组的数值解法	435
§5.8.5	数值实验	441

§5.8.6	12点格式推导	448
§5.8.7	KdV 方程的Euler box 格式	451
§5.9	一些方程的多辛形式	454
§5.9.1	BBM方程的辛形式和多辛形式	454
§5.9.2	1 维可压缩流的Euler方程的多辛形式和多辛几何	466
§5.9.3	KP方程的多辛方法	472
§5.9.4	Ginzburg-Landau方程的多辛形式	488
§5.9.5	线性阻尼的振动方程的Birkhoff形式	503
§5.10	化PDE方程为Bridges形式	507
§5.10.1	变分原理的反问题	508
§5.10.2	化Euler-Lagrange 方程为多辛方程	511
§5.10.3	经典场论的全变分	516
§5.10.4	Lagrange力学的全变分	516
§5.10.5	经典场论的全变分	521
§5.10.6	多辛场论的Veselov型离散和可变步长的变分积分子	524
	参考文献	529
第六章	Maslov渐近理论与辛几何算法	543
§6.1	从几何光学谈起	543
§6.2	狭义几何光学(射线理论)	545
§6.3	广义几何光学	548
§6.4	Maslov渐近理论	551
§6.4.1	Maslov渐近理论	551
§6.4.2	构造方程及其渐近解	552
§6.4.3	线形层状问题的整体渐近解	557
§6.4.4	射线追踪与辛几何算法	560
§6.5	波场的数值模拟	568
	参考文献	573
第七章	微分复形与数值计算	575
§7.1	Maxwell方程	575
§7.1.1	电磁方程的积分形式	576
§7.1.2	关于微分形式的一些基本知识	577
§7.1.3	Maxwell方程的微分形式	583

§7.1.4	Maxwell方程的变分问题	584
§7.2	代数拓扑基本概念	586
§7.2.1	单纯形和单纯复形	586
§7.2.2	链与上链	589
§7.2.3	在网格上的ME 方程	591
§7.2.4	De Rham 微分复形	595
§7.2.5	Whitney形式	601
§7.2.6	小结	616
§7.3	Hodge 算子的离散	619
§7.3.1	星算子离散形式	620
§7.3.2	算子grad, curl, div离散的有限元法	623
§7.3.3	Hodge星算子离散的具体例子	627
§7.3.4	基于微分形式的误差估计	634
§7.3.5	Yee 格式	638
§7.3.6	混合变分原理	640
§7.3.7	矩阵关系式	641
§7.3.8	延拓算子的例子	643
§7.3.9	应用	646
§7.4	grad, curl, div 算子离散的差分形式	648
§7.4.1	算子(离散算子)grad (GRAD), curl (CURL), div (DIV)的定义域 和值域	649
§7.4.2	算子grad, curl, div离散的网格	650
§7.4.3	曲线坐标系算子的grad, curl, div表示	654
§7.4.4	1 维的数值例子	660
§7.4.5	在一般网格上的内积公式	664
§7.4.6	离散算子GRAD, DIV, CURL的共轭算子	670
§7.4.7	梯度算子GRAD 的内积	672
§7.4.8	散度算子DIV 的内积	675
§7.4.9	旋度算子CURL 的内积	678
§7.5	Maxwell 方程在4 维(时空)空间中的表示	681
§7.5.1	电磁方程的变分原理	683
§7.5.2	电磁方程的能量守恒	685
§7.5.3	椭圆方程的另一种多辛形式	687
§7.5.4	波动方程的另一种多辛形式	688

§7.5.5 规范变换	690
§7.5.6 Maxwell 方程在3维和4维(时空)空间中的表示	692
参考文献	693
第八章 局部保结构算法	697
§8.1 引言	697
§8.2 概念的提出	699
§8.3 局部保结构算法的适用范围	702
§8.4 应用例子	704
§8.4.1 地球流体力学方程的数值模拟	704
§8.4.2 孤立波方程的计算	705
§8.4.3 电磁波方程的计算	706
§8.5 局部保结构算法的构造	706
§8.5.1 一些差分算子的性质	707
§8.5.2 几个简单的ODEs 差分格式	709
§8.5.3 多辛格式的构造	710
§8.5.4 局部能量守恒格式的构造	714
§8.5.5 局部动量守恒格式的构造	716
§8.6 一个数值例子	719
§8.7 小结和讨论	721
参考文献	723
第九章 附 录	727
§9.1 变分计算	727
§9.2 KP方程45点格式	729
§9.3 Ginzburg-Landau 方程18点格式	734
§9.4 有限元和混合有限元的一些补充	740
参考文献	749
符 号	751
索 引	757

第一章 一般辛结构下的生成函数法

§1.1 生成函数的几何意义

由于生成函数在构造辛算法方面具有重要作用^{[AM78],[Am89],[MW83],[MW01]}, 故在这一节首先介绍生成函数的几何意义.

定义 1.1.1 如果 $\forall q \in Q$, $(T_q i)(T_q Q)$ 是 $T_{i(q)} P$ 的子空间, 或者 $i_{*q} : T_q Q \rightarrow T_{i(q)} P$ 是单射, 则称 i 为 $Q \rightarrow P$ 的浸入.

定义 1.1.2 设 $(\mathbf{R}^{2n}, \omega)$ 为辛流形, L 为 $\mathbf{R}^{2n}$ 的子流形, $i : L \rightarrow \mathbf{R}^{2n}$ 为浸入, 如果 $(T_x i)(T_x L)$ 为 $T_{i(x)} \mathbf{R}^{2n}$ 中某一 Lagrange 子空间, 则称 L 为 $(\mathbf{R}^{2n}, \omega)$ 的 Lagrange 子流形, 如果局部有

$$i_L^* \omega = -di_L^* \theta = 0.$$

定义 1.1.3 若存在某一函数 $\phi : L \rightarrow \mathbf{R}$ (局部定义), 有

$$i_L^* \theta = d\phi,$$

则称 ϕ 为 Lagrange 子流形 L 的生成函数.

考虑辛流形 $(\mathbf{R}^{2n}, \omega)$ 及 $\mathbf{R}^{2n}$ 到 $\mathbf{R}^{2n}$ 上的投影 $\pi_i : \mathbf{R}^{2n} \times \mathbf{R}^{2n} (i = 1, 2)$,

$$\pi_i \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = z_i,$$

其中 $z_1, z_2 \in \mathbf{R}^{2n}$.

如果 θ_1 和 θ_2 分别是辛流形 P_1 和 P_2 的两个正则 1-形式, 满足 $\Omega_1 = -d\theta_1$, $\Omega_2 = -d\theta_2$, 就可构造 $\mathbf{R}^{4n}$ 上的微分 2-形式

$$\Omega = \pi_1^* \Omega_1 - \pi_2^* \Omega_2,$$

使 $(\mathbf{R}^{4n}, \Omega)$ 为辛流形.

引理 1.1.1 给定辛流形 $(\mathbf{R}^{2n}, \omega)$, 于是映射 $f : \mathbf{R}^{2n} \rightarrow \mathbf{R}^{2n}$ 为辛变换当且仅当

$$i_f^* \Omega = 0,$$

其中 $i_f : \text{gr}(f) \rightarrow \mathbf{R}^{2n} \times \mathbf{R}^{2n}$ 为浸入, $\text{gr}(f)$ 为 f 的图像.

证明: 投影 π_i ($i = 1, 2$) 在 $\text{gr}(f)$ 上的限制可表示为 $\pi_i \circ i_f = \pi_i|_{\text{gr}(f)}$, 容易验证在 $\text{gr}(f)$ 上 $\pi_2 = f \circ \pi_1$, 即 $\pi_2 \circ i_f = f \circ \pi_1 \circ i_f$,

$$i_f^* \Omega = i_f^* (\pi_1^* \Omega_1 - \pi_2^* \Omega_2) = (\pi_1 \circ i_f)^* (\Omega_1 - f^* \Omega_2).$$

辛映射的图像 $\text{gr}(f)$ 构成辛流形 $(\mathbf{R}^{2n} \times \mathbf{R}^{2n}, \Omega)$ 中的 Lagrange 子流形, 且由 $i_f^* \Omega = 0$ 及 Poincaré 引理, 存在生成函数 ϕ , 使得

$$i_f^* \Omega = -di_f^* \theta = 0, \quad i_f^* \theta = d\phi,$$

其中 $\theta = -\pi_1^* \theta + \pi_2^* \theta$, $\phi: \text{gr}(f) \rightarrow \mathbf{R}$. 引理中的函数 ϕ 被称为正则变换 f 的生成函数. 辛映射 f 的图像如下:

$$\text{gr}(f) = \left\{ \begin{bmatrix} fz \\ z \end{bmatrix} \mid z \in T^*\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{2n}, f: \mathbf{R}^{2n} \rightarrow \mathbf{R}^{2n} \right\}.$$

从引理 1.1.1 可以得到下面的定理.

定理 1.1.1 映射 $f: P_1 \rightarrow P_2$ 是辛映射当且仅当存在一个函数 $\phi: \text{gr}(f) \rightarrow \mathbf{R}$, 使得 $i_f^* \theta = d\phi$.

注 1.1.1 设 $L \in \mathbf{R}^{4n}$ 是 $\mathbf{R}^{4n}$ 上的 $2n$ 维子流形. 记 $i_L: L \rightarrow \mathbf{R}^{4n}$ 是浸入, i_L^* 表示 i_L 的拉回映射, 如果 $i_L^* \Omega = 0$, 即 Ω 在 L 的限制为零, 则称 L 为 J_{4n} -Lagrange 的子流形; 如果 $i_L^* \tilde{\Omega} = 0$, 即 $\tilde{\Omega}$ 在 L 的限制为零, 则称 L 为 $\tilde{J}_{4n}$ -Lagrange 的子流形.

注 1.1.2 使用生成函数构造格式的思路是: 首先截断生成函数展开的幂级数, 从而得到生成函数某精度的近似, 然后通过生成函数和辛映射之间的关系, 达到获取原辛映射的某种近似, 也即构造了计算原辛映射的一种近似方法, 即差分格式.

§1.2 简要叙述生成函数法

《哈密尔顿系统的辛几何算法》一书[冯康等03],[FQ10]的第五章详细叙述了如何用生成函数法来构造 Hamilton 系统的辛几何算法. 这一节将简要叙述生成函数法的要点. 从上一节知道, 辛映射是和函数相联系的, 这个函数被称作生成函数, 生成函数在 Hamilton-Jacobi 理论、经典力学和量子力学等诸多领域都起着重要的作用.

记:

$$gl(m) = \{A \mid \text{任意 } m \times m \text{ 矩阵}\},$$

$$GL(m) = \{A \mid A \in gl(m), |A| \neq 0\}.$$

定义:

$$Sp(2m) = \{M \in GL(2m) \mid M^T J_{2m} M = J_{2m}\},$$

$$CSp(2m) = \{\alpha \in GL(4m) \mid \alpha^T J_{4m} \alpha = \mu J_{4m}, \mu \neq 0\},$$

$$CSp(\tilde{J}_{4m}, J_{4m}) = \{\alpha \in GL(4m) \mid \alpha^T J_{4m} \alpha = \mu \tilde{J}_{4m}, \mu \neq 0\},$$

其中

$$J_{4m} = \begin{bmatrix} O & I_{2m} \\ -I_{2m} & O \end{bmatrix}$$

是 $\mathbf{R}^{4n}$ 空间中的标准辛结构, 也即乘积空间余切丛 $T^*(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n) = T^*\mathbf{R}^{2n} \cong \mathbf{R}^{4n}$ 的标准辛结构, I_{2m} 是标准的 $2m \times 2m$ 单位矩阵, 而

$$\tilde{J}_{4m} = \begin{bmatrix} J_{2m} & O \\ O & -J_{2m} \end{bmatrix}$$

是余切丛乘积空间 $T^*\mathbf{R} \times T^*\mathbf{R} = \mathbf{R}^{4n}$ 的乘积辛结构^{[Ge90],[Ge91],[FWQW89],[Fen86]}.

令 $\alpha = \begin{bmatrix} A_\alpha & B_\alpha \\ C_\alpha & D_\alpha \end{bmatrix} \in GL(4m)$, 其中 $A_\alpha, B_\alpha, C_\alpha, D_\alpha$ 是 $2m \times 2m$ 矩阵, 在条件 $|C_\alpha M + D_\alpha| \neq 0$ 下, 可定义线性分式变换:

$$\sigma_\alpha : gl(2m) \longrightarrow gl(2m),$$

$$N = \sigma_\alpha(M) = (A_\alpha M + B_\alpha)(C_\alpha M + D_\alpha)^{-1}.$$

引理 1.2.1 设 $\alpha \in GL(4m)$, $\alpha^{-1} = \begin{bmatrix} A^\alpha & B^\alpha \\ C^\alpha & D^\alpha \end{bmatrix}$, 则下面四个横截条件等价^[FWQW89]:

$$|C_\alpha M + D_\alpha| \neq 0, \quad (1.2.1)$$

$$|MC^\alpha - A^\alpha| \neq 0, \quad (1.2.2)$$

$$|C_\alpha N + D^\alpha| \neq 0, \quad (1.2.3)$$

$$|NC_\alpha - A_\alpha| \neq 0. \quad (1.2.4)$$

定理 1.2.1^{[FWQW89],[Fen86]} 设 $\alpha \in CSp(\tilde{J}_{4m}, J_{4m})$, $g : \mathbf{R}^{2m} \rightarrow \mathbf{R}^{2m}$, $\hat{z} = g(z)$ 是辛映射, 其中 $M(z) = \frac{\partial g(z)}{\partial z}$ 是 $\mathbf{R}^{2m}$ 的某个邻域, 且满足条件(1.2.1). 在 $\mathbf{R}^{2m}$ 的某个邻域存