高中

得分王

原创经典　全新体验　共创美好人生

《高中得分王》编写组 编写

全面解读新的课程标准
全面设计新的课时作业
全面体验新的单元测试
全面提高新的应试能力

数学

必修5

国标全国版

东南大學出版社

高中

得分王

原创经典　全新体验　共创美好人生

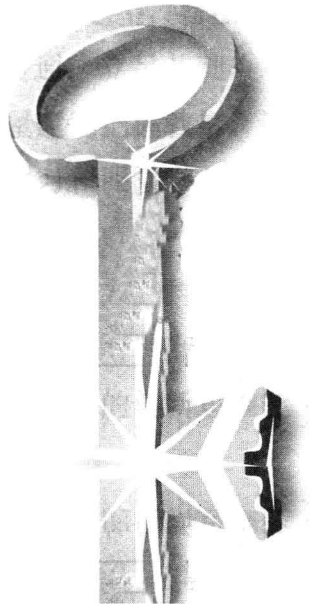
《高中得分王》编写组　编写

全面解读新的课程标准

全面设计新的课时作业

全面体验新的单元测试

全面提高新的应试能力



数学 必修5

国标全国版

东南大学出版社
·南京·

图书在版编目(CIP)数据

高中得分王：国标全国版．数学．5：必修／《高中得分王》编写组编写．-- 南京：东南大学出版社，2011.7

ISBN 978-7-5641-2762-6

Ⅰ．①高… Ⅱ．①高… Ⅲ．①中学数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ．①G634

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第088506号

高中得分王：国标全国版．数学．5：必修

编　　写	《高中得分王》编写组
责任编辑	韩小亮
出版发行	东南大学出版社
经　　销	各地新华书店
出 版 人	江建中
社　　址	南京市四牌楼 2 号
邮　　编	210096
印 刷 者	南京新洲印刷有限公司
开　　本	880mm×1230mm　1/16
印　　张	12
字　　数	362 千字
版　　次	2011 年 7 月第 1 版第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5641-2762-6
定　　价	26.80 元

前言

当前高中教育已步入了一个新的发展阶段，必然对当前的教学改革提出了新要求，为了适应这个新阶段新要求，我社在多年出版畅销教学辅导书的经验指导下，特组织编写了《高中得分王》这套高中同步教学辅导丛书。

丛书力求做到“紧扣课标教材、注重基础研究、关注创新发展、面向未来高考”。本丛书将陪你度过一段丰富精彩而又辉煌充实的高中时光，助你迈入理想的高等学府。

本丛书的特点可以概括为“新”“高”“活”“强”。

新： 以全新的视角，关注课标改革新动向，依据新课标，吸纳最新课程研究成果，大量选用鲜活、灵动的新素材、新活题，关注教学和考试热点，贴近实际生活。紧扣新课标，开发新题型，旨在培养同学们开放性、探究性的能力。

高： 荟萃精品，融会贯通；立足基础，培养能力。本丛书着眼于学科知识体系的建构，从宏观上高屋建瓴把握教材。通过合理的课时设计、严格的得分训练，立足于学生的课前预习和课堂学习，着眼于学生的自学能力、探究能力与创新意识的培养。

活： 栏目鲜活、思考灵活、方法科学、指导到位、生动活泼。依据最新教材，准确把握信息，精心钻研知识，突破重点难点，利用一题多问、一题多解、举一反三来拓展思维，培养学生的创新思维能力，力求更加体现新课标在各方面的要求。

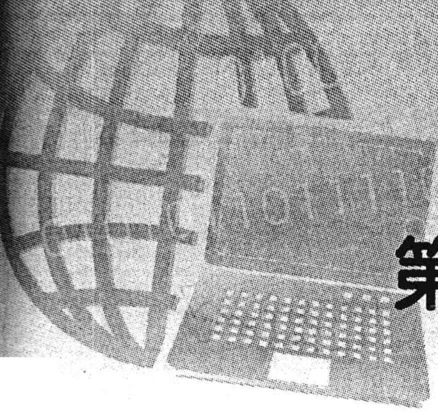
强： 师资力量雄厚。本丛书由一线骨干教师和教研员联袂打造，他们将最新的课程研究成果融入了本丛书，使它具有“厚基础、勤实践、强能力、重素质、善创新”的特点，再加上我们的反复审校，相信拥有它，你将获得很大的收益。

本丛书秉持“与时俱进、以人为本、面向读者、保证质量”的原则，但限于时间和水平，书中难免会存在一些疏漏之处，恳请广大读者不吝指正，以使本丛书不断完善并逐渐成为广大师生的良师益友。

东南大学出版社

编 委 会

·目录·



第一章　解三角形

第1课时　正弦定理(1)

基础落实

1. 直角三角形边角关系.
2. 一般三角形中 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ 均成立.

在明确正弦定理对任一三角形均成立的前提下,综合运用所学知识对定理进行证明. 由直角三角形中的边角关系,猜想并证明一般三角形中边角关系的正弦定理,体验从特殊到一般的思维方法.

互动学案

重点突破

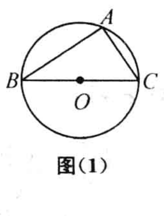
初中平面几何中学到了三角形内角和定理及直角三角形边角之间的关系,本课时将运用坐标法、向量法,转化为直角三角形法对一般三角形中存在的边角关系进行发现和证明.

1. 由 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$,可得 $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$.
2. 利用正弦定理可由三角形中的两角和一边求其他边和角或由两边和其中一边的对角求其他边和角.

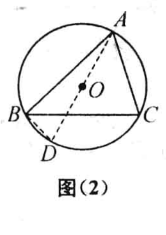
范例点评

例1 已知△ABC 外接圆的半径为 R,a、b、c 分别为三内角 A、B、C 的对边.

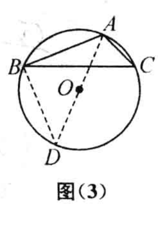
求证:$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$.



图(1)



图(2)



图(3)

【分析】 充分利用三角形的外接圆的性质,化为直角三角形边角关系问题.

证明 (1) 当△ABC 为直角三角形时(如图(1)),$2R=a$,且 $\sin A=1$,

所以 $\dfrac{a}{\sin A}=2R$.

又 $\dfrac{b}{a}=\sin B$,$\dfrac{c}{a}=\sin C$,

所以 $\dfrac{b}{\sin B}=a=2R$,$\dfrac{c}{\sin C}=a=2R$.

所以 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin C}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$.

(2) 当△ABC 为锐角三角形时(如图(2)),延长 AO 交圆 O 于点 D,连结 BD.

在 Rt△ABD 中,∠ADB=∠C,

故 $\dfrac{c}{2R}=\sin C$,即 $\dfrac{c}{\sin C}=2R$.

同理可证 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=2R$.

(3) 当△ABC 为钝角三角形时(如图(3)),同题(2)中的方法,可证 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$.

【点评】 分类讨论的方法是解决数学问题的重要方法.

例2 在△ABC 中,已知 $a=10$,$B=60°$,$C=45°$,求 A、b 及 c.

【分析】 直接利用正弦定理和三角形内角和定理求解.

解 $A=180°-(60°+45°)=75°$,

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{10\times\sin 60°}{\sin 75°}=\frac{10\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

$$=5(3\sqrt{2}-\sqrt{6})=15\sqrt{2}-5\sqrt{6},$$

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{10\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}=10\sqrt{3}-10.$$

【点评】 已知三角形两角及任一边，求其他边和角时，注意隐含条件 $A+B+C=180°$，且最终解是唯一的.

例3 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=20$ cm，$b=28$ cm，$A=40°$，解三角形.（角度精确到 1°，边长精确到 1 cm）

【分析】 已知三角形中的某些边和角，求另外的边和角是正弦定理的主要功效.

解 根据正弦定理，

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{28\sin 40°}{20}\approx 0.8999.$$

因为 $0°<B<180°$，所以 $B\approx 64°$ 或 $B\approx 116°$.

①当 $B\approx 64°$ 时，$C=180°-(A+B)=180°-(40°+64°)=76°$，

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{20\sin 76°}{\sin 40°}\approx 30(\text{cm}).$$

②当 $B\approx 116°$ 时，

$C=180°-(A+B)=180°-(40°+116°)=24°$，$c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}=\dfrac{20\sin 24°}{\sin 40°}\approx 13(\text{cm})$.

【点评】 运用正弦定理时，(1) 应注意已知两边和其中一边的对角解三角形时，可能有两解的情形；(2) 对于解三角形中的复杂运算可使用计算器.

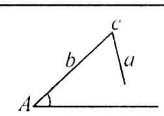
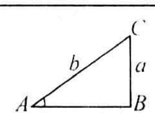
误区警示

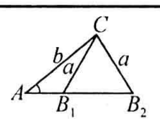
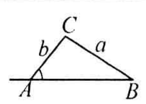
已知两边及其中一边的对角解三角形时，通常用正弦定理先求另一边的对角，需要讨论解的情况，应同时注意大边对大角定理的应用.

1. 已知 a、b 及 A，用正弦定理求 B.

A B

当 A 为锐角时，情况如下表：

图形		
关系式	$a<b\sin A$	$a=b\sin A$
解的个数	无解	一解

图形		
关系式	$b\sin A<a<b$	$a\geq b$
解的个数	两解	一解

2. 当 A 为钝角或直角时：$a>b$，有一解；$a\leq b$，无解.

【典型案例】 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=4$，$b=5$，$A=30°$，求 B.

错解 由 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，得 $\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}=\dfrac{5\times\frac{1}{2}}{4}=\dfrac{5}{8}$，

所以 $B=38.7°$.

正解 依题意可得 $b\sin A<a<b$，

所以 $B=38.7°$ 或 $141.3°$.

反馈平台

1. 在 $\triangle ABC$ 中，三个内角 A、B、C 的对应边分别为 a、b、c，且 $a:b:c=1:\sqrt{3}:2$，则 $\sin A:\sin B:\sin C=$ （ B ）

A. $a:b:c=1:\sqrt{3}:2$

B. $a:b:c=2:\sqrt{3}:1$ $a=\frac{1}{2}$ $2a=1$

C. $a:b:c=1:2:\sqrt{3}$ $b^2=4a^2b^2$ $b=2ab$

D. $a:b:c=1:2:2$ $\sin A=\frac{1}{2}$

2. 在 $\triangle ABC$ 中，$b^2=4a^2\sin^2 B$，则 $A=$ （ D ）

A. 30° 或 90° B. 60° 或 150°

C. 30° 或 120° D. 30° 或 150°

3. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $A=\dfrac{\pi}{3}$，$a=3\sqrt{6}$，$b=6$，则 $B=$ （ B ）

$\frac{3\sqrt6}{\frac{\sqrt3}{2}}=\frac{6}{\sin B}$

A. $\dfrac{\pi}{6}$ B. $\dfrac{\pi}{4}$ C. $\dfrac{\pi}{3}$ D. $\dfrac{\pi}{2}$

$3\sqrt3=\sin B\cdot 3\sqrt6$ $\sin B=\frac{\sqrt2}{2}$

4. 海上有 A、B 两个小岛相距 10 海里，从 A 岛望 B 岛和 C 岛成 60° 角（$\angle BAC=60°$），从 C 岛望 B 岛和 A 岛成 45° 角（$\angle ACB=45°$），则 B、C 之间相距________海里.

5. 已知两座灯塔 A 和 B 与海洋观察站 C 的距离相等，灯塔 A 在观察站 C 的北偏东 40° 方向上，灯塔 B 在观察站 C 的南偏东 60° 方向上，则灯塔 A 在灯塔 B 的________方向上.

6. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=5$，$B=105°$，$C=15°$，求此三角形最大边的长.

7. 在△ABC 中，已知 $a=\sqrt{3}$，$b=\sqrt{2}$，$B=45°$，求 A、C 及 c.

同步测试

基础巩固

$\cos\frac{A}{2}=\sin A$

一、选择题

1. 在△ABC 中，若 $\dfrac{a}{\cos\frac{A}{2}}=\dfrac{b}{\cos\frac{B}{2}}=\dfrac{c}{\cos\frac{C}{2}}$，则三角形的形状一定是（ C ）

A. 直角三角形　　B. 等腰三角形

C. 等边三角形　　D. 不确定

2. 在△ABC 中，$a=20$，$b=10$，$B=29°$，那么满足条件的△ABC 的个数为　$a=20$ $b=10$（ B ）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3. 在△ABC 中，$A=60°$，$a=\sqrt{3}$，则 $\dfrac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=$（ B ）

$2\sqrt{3}$　$\sqrt{3}$　B　30　3

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

4. △ABC 中，$b=\sqrt{3}$，$c=3$，$B=30°$，则 $a=$（ C ）

A. $\sqrt{3}$ 或 $2\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{3}$ 或 $3\sqrt{3}$

C. $\sqrt{3}$ 或 $4\sqrt{3}$　　D. $3\sqrt{3}$ 或 $4\sqrt{3}$

5. 在△ABC 中，已知 $c=10$，$b=16$，$B=30°$，则解此三角形的可能情况有（ B ）

A. 1 种　　B. 2 种　　C. 3 种　　D. 4 种

32　16　30　$16\sqrt{3}$　10

二、填空题

6. 在△ABC 中，已知 $A=75°$，$B=45°$，$c=3\sqrt{2}$，则 $b=$________.

7. 在△ABC 中，边 a，b，c 所对的角分别为 A，B，C，且 $\dfrac{a}{\sin B}=\dfrac{b}{\sin C}=\dfrac{c}{\sin A}$，则△$ABC$ 是________三角形.

8. 在△ABC 中，$a=x$，$b=2$，$B=45°$，若此三角形有两解，则 x 的取值范围是________.

三、解答题

9. 已知 a、b、c 是△ABC 的三边，满足 $(b+c):(c+a):(a+b)=4:5:6$，求 $\sin A:\sin B:\sin C$.

10. 在△ABC 中，已知 $A=45°$，$a=\sqrt{2}$，$b=1$. 求 B.

能力提高

11. 在△ABC 中，$B=45°$，$C=60°$，$a=2(1+\sqrt{3})$.

(1) 求 c；

(2) 求边 BC 上的高；

(3) 求△ABC 的面积.

12. 在△ABC 中，设 $\dfrac{\cos B}{3b}=\dfrac{\cos C}{2c}=\dfrac{\cos A}{a}$，求 $\cos A$ 的值.

13. 在$\triangle ABC$中，$A=60°$，$b=1$，且$S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}$，求$a$.

14. 在锐角$\triangle ABC$中，已知$A=2B$，试求$\frac{a}{b}$的取值范围.

第 2 课时　正弦定理(2)

基础落实

1. 运用正弦定理解斜三角形.
2. 利用边角关系式，判别三角形形状.

根据正弦定理和三角形中其他边角关系，实现边角关系互化，是解斜三角形和判别三角形形状等问题的关键.

在不同的情境下，选择三角形中不同的边角关系，简便灵活地解决问题.

互动学案

重点突破

1. 一般$\triangle ABC$中常见边角关系：

(1) $A+B+C=\pi$；

(2) 大边对大角；

(3) $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

2. 已知两边及其中一边的对角，运用正弦定理解三角形时，会出现一解、两解和无解的情形.

在解斜三角形及判定三角形形状时，充分利用图形的特性，准确选择适当的边角关系，并对结果可能出现的情况作出符合情理的判断，是运用正弦定理的基本思路.

范例点评

例 1　在$\triangle ABC$中，已知$a^2\sin B=b^2\sin A$，试判断该三角形的形状.

【分析】 根据边角关系，通过恒等变形、化繁为简是判别三角形形状的基本途径. 本题联想$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，即可入手.

解　因为$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，

所以$a\sin B=b\sin A\neq 0$.

而$a^2\sin B=b^2\sin A$，

所以$a=b$.

所以$\triangle ABC$为等腰三角形.

【点评】 对条件进行变形时，一定要注意条件特征，选用合适的边角关系.

例 2　在$\triangle ABC$中，$\sin A\cdot\cos^2\frac{C}{2}+\sin C\cdot\cos^2\frac{A}{2}=\frac{3}{2}\sin B$. 求证：$2b=a+c$.

【分析】 题中所给条件为角之间的关系式，联想正弦定理，只要证$2\sin B=\sin A+\sin C$即可.

解　$\sin A\cdot\cos^2\frac{C}{2}+\sin C\cdot\cos^2\frac{A}{2}=\frac{3}{2}\sin B$

$\Rightarrow\sin A\cdot\frac{1+\cos C}{2}+\sin C\cdot\frac{1+\cos A}{2}=\frac{3}{2}\sin B$

$\Rightarrow\sin A\cos C+\cos A\sin C+\sin A+\sin C=3\sin B$

$\Rightarrow\sin(A+C)+\sin A+\sin C=3\sin B$，

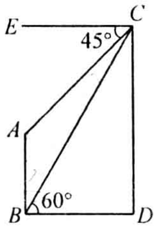
所以$\sin A+\sin C=2\sin B$.

所以$a+c=2b$.

【点评】 由$A+B=\pi-C$，可得$\sin(A+B)=\sin C$，$\cos(A+B)=-\cos C$，$\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}$.

例3　有一座塔 AB，在塔底 B 处测得山顶 C 的仰角为 $60°$，在山顶 C 测得塔顶 A 的俯角为 $45°$. 已知塔高 AB 为 20 m，求山高 CD.（精确到 0.1 m）

【分析】　示意图如图所示，要求 DC，可放到 $\triangle BCD$ 中. 已知 $\angle DBC=60°$，$\angle CDB=90°$，所以只需求 BD 或 CB. 通过分析题意，$\triangle ABC$ 中，AB 长度为已知，则三个角均可求出，所以可求 CB，则 $CD=CB\cdot\sin60°$.



解　由条件知 $\angle DBC=60°$，$\angle ECA=45°$.

在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=30°$，$\angle ACB=15°$.

所以 $\angle CAB=135°$.

由正弦定理得 $\dfrac{BC}{\sin135°}=\dfrac{AB}{\sin15°}$，

所以 $BC=\dfrac{AB\cdot\sin135°}{\sin15°}=\dfrac{40}{\sqrt{3}-1}$.

在 Rt$\triangle BCD$ 中，$CD=BC\cdot\sin\angle CBD=\dfrac{40}{\sqrt{3}-1}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\approx47.3$(m).

答：山高约 47.3 m.

【点评】　本题是一道测量高度的题目，从结论入手，一步一步往前分析. 要求 CD，应先知哪些量，从而知先求哪些量，即我们通常讲的分析法. 本题主要是通过同时分析两个三角形得以解决.

误区警示

在判别三角形形状过程中，很多学生往往急于找到答案，而忽视对答案合理性及不唯一性的思考.

【典型案例】　在 $\triangle ABC$ 中，$\sin B(c-a\cos B)=\sin C(b-a\cos C)$，试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

错解　$c\sin B-a\sin B\cos B=b\sin C-a\sin C\cos C$.

因为 $c\sin B=b\sin C$，

所以 $\sin B\cos B=\sin C\cos C$.

所以 $\sin2B=\sin2C$.

所以 $2B=2C$.

而 $B=C$，

所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形.

正解　由 $\sin2B=\sin2C$，而 $2B$、$2C$ 均在 $(0,2\pi)$ 内，不仅有 $2B=2C$，还可能有 $2B+2C=\pi$，即 $B=C$ 或 $B+C=\dfrac{\pi}{2}$.

所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形或直角三角形.

反馈平台

1. 在 $\triangle ABC$ 中，$A=60°$，$a=4\sqrt{3}$，$b=4\sqrt{2}$，则 $B=$（　　）

A. $\dfrac{\pi}{6}$　　B. $\dfrac{\pi}{4}$　　C. $\dfrac{\pi}{3}$　　D. $\dfrac{\pi}{2}$

2. 在 $\triangle ABC$ 中，$a=1$，$b=\sqrt{2}$，$A=30°$，则 $B=$（　　）

A. $30°$ 或 $90°$　　B. $60°$ 或 $150°$

C. $30°$ 或 $120°$　　D. $45°$ 或 $135°$

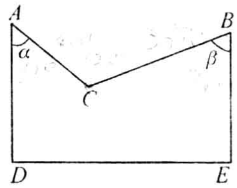
3. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\sin A=2\sin B\cos C$，$\sin^2A=\sin^2B+\sin^2C$，则 $\triangle ABC$ 的形状是（　　）

A. 直角三角形　　B. 等腰三角形

C. 等腰直角三角形　　D. 不确定

4. 有一长为 100 m 的斜坡，它的坡角为 $45°$，现在打算把坡角改为 $30°$，则坡底要伸长________ m.

5. 一角槽的横断面如图所示，四边形 $ADEB$ 是矩形，若 $\alpha=50°$，$\beta=70°$，$AC=90$ mm，$BC=150$ mm，则 $DE=$________.（精确到 1 mm）



6. 在 $\triangle ABC$ 中，$a\cos A=b\cos B$，试判断 $\triangle ABC$ 形状.

7. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $c=10\sqrt{2}$，$C=60°$，$a=\dfrac{20\sqrt{3}}{3}$，求 A.

同步测试

基础巩固

一、选择题

1. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $A=120°$，$a=25$，$b=15$，则满足条件的 $\triangle ABC$ 的个数为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

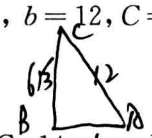
2. 在△ABC中，$\lg a-\lg b=\lg\sin B=-\lg\sqrt{2}$，$B$为锐角，则$A=$ （　　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

3. 在△ABC中，$B=60°$，最大边与最小边之比为$(\sqrt{3}+1):2$，则最大角为 （　　）

A. 30°　　B. 45°　　C. 60°　　D. 75°

4. 在△ABC中，若$A=\frac{\pi}{3}$，$b=12$，$C=\frac{\pi}{6}$，则$\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=$ （ B ）



A. 10　　B. 12　　C. 14　　D. 18

5. 在△ABC中，若$A=45°$，$B=60°$，则$\frac{a-b}{a+b}=$ （ C ）

A. 5　　B. $2\sqrt{6}$　　C. $2\sqrt{6}-5$　　D. 18

$\frac{a-b}{a+b}=\frac{2x-\sqrt{6}x}{2x+\sqrt{6}x}$

二、填空题

6. 在△ABC中，$a=2$，$A=30°$，$C=45°$，则△ABC的面积为________.

7. 在△ABC中，已知$\frac{b+a}{a}=\frac{\sin B}{\sin B-\sin A}$，且$2\sin A\sin B=2\sin^2 C$，△$ABC$的形状是________.

8. 在△ABC中，已知$a=\sqrt{2}$，$b=2$，$B=\frac{\pi}{4}$，$A=$________.

三、解答题

9. 在△ABC中，角C的平分线将三角形面积分为$\sqrt{2}:1$，且$A=\frac{1}{2}B$，求角A.

10. 在△ABC中，a、b、c分别是角A、B、C对边，且$\frac{\cos B}{\cos C}=-\frac{b}{2a+c}$，求角$B$的大小.

能力提高

11. 在△ABC中，a、b、c分别为内角A、B、C的对边，若$b=2a$，$B=A+60°$，求A.

12. 在△ABC中，若$a:b=\sqrt{3}:1$，$A-B=90°$，求C.

13. 在△ABC中，已知$\tan A=\frac{1}{2}$，$\tan B=\frac{1}{3}$，且最长边的长为l，求：

(1) 角C；

(2) 最短边的长.

14. 在△ABC中，若$(a^2+b^2)\sin(A-B)=(a^2-b^2)\sin(A+B)$，试判断三角形形状.

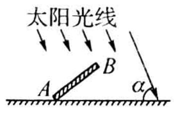
链接探究

太阳伞的撑法

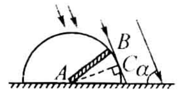
盛夏酷暑，骄阳似火，大街上撑太阳伞的人随处可见. 日起日落，一天里太阳光线的入射角度会因时而异，而人们手中的太阳伞也会自觉地迎着太阳光稍做调整. 其实，人们这一无意识行为的科学性完全可用中学数学知识进行严格论证. 为研究方便起见，我们将问题稍做了一些改进和简化.

问题：如图(1)，已知太阳光线与地面所成的角为 α，现有一木棍长为 l，试问如何放置木棍可使其阴影最长？

生活经验告诉我们，当木棍与光线垂直时，木棍阴影最长，严格论证可用如下方法：



图(1)



图(2)

解答：如图(2)，将木棍 AB 绕点 A 旋转半周，则 B 的轨迹为一个半圆，太阳光线与这个圆相切于点 C，显然，当木棍的 B 端转动到点 C 时，木棍阴影最长. 此时，木棍与太阳光线垂直，与地面所成的角为 $90°-\alpha$.

第3课时　余弦定理(1)

基础落实

三角形任何一边的平方等于其他两边平方的和减去这两边与它们夹角的余弦的积的两倍，即：在△ABC 中，

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$b^2=c^2+a^2-2ac\cos B$，

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

若令 $C=90°$，则 $c^2=a^2+b^2$，所以余弦定理是勾股定理的推广形式，勾股定理是余弦定理的特殊形式.

余弦定理的另一形式：$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ac}$，$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

理解用向量的数量积证明余弦定理的方法，熟悉余弦定理的变形；熟练地运用余弦定理解斜三角形.

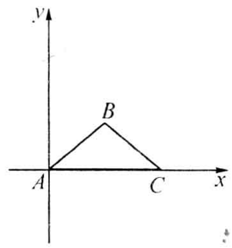
体会向量工具在揭示三角形边角关系中的重要作用，感受余弦定理的形式特点.

互动学案

重点突破

课本上利用向量方法给出了余弦定理的证明，坐标法的证明可以开阔视野，广开思路.

证明　如图，以 A 为原点、AC 所在直线为 x 轴，建立直角坐标系，则 A、C 两点的坐标为 $A(0,0)$，$C(b,0)$.



设点 B 的坐标为 (x,y)，由三角函数定义得：

$\dfrac{x}{c}=\cos A$，$\dfrac{y}{c}=\sin A$，

所以 $x=c\cos A$，$y=c\sin A$.

所以 $B(c\cos A, c\sin A)$.

由两点距离公式得

$a=|BC|=\sqrt{(c\cos A-b)^2+(c\sin A-0)^2}$，

即 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

同理可得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

余弦定理是我们处理三角形边角关系问题的又一个重要定理，它揭示了三角形内一个内角和三边长之间的动态关系. 利用余弦定理可以解决如下问题：(1) 已知两边及其夹角，求第三边及其他角；(2) 已知三边求角.

范例点评

例1　在△ABC 中，已知 $a:b:c=\sqrt{2}:\sqrt{6}:(\sqrt{3}+1)$. 求△$ABC$ 最大角的度数.

【分析】　三边之比确定的三角形，其内角大小也唯一确定.

解　令 $a=\sqrt{2}k$，$b=\sqrt{6}k$，$c=(\sqrt{3}+1)k$，

因为 C 最大，

则 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{2+6-(4+2\sqrt{3})}{4\sqrt{3}}=$

$\frac{4-2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{2}\approx 0.0774$.

所以 $C=85°34'$.

【点评】 在确定角的大小过程中，应重视大边对大角定理的应用.

例2 在△ABC中，已知边 a、b、c 满足下列关系，完成下列填空：

(1) $c^2=a^2+b^2\Leftrightarrow C=$________；

(2) $c^2=a^2+b^2+\sqrt{3}ab\Leftrightarrow C=$________；

(3) $c^2=a^2+b^2-ab\Leftrightarrow C=$________；

(4) $c^2=a^2+b^2-\sqrt{2}ab\Leftrightarrow C=$________.

【分析】 以上四题可看成是余弦定理表达式 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ 的特殊情况.

解 (1) $C=90°$；

(2) 因为 $\cos C=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $C=150°$；

(3) 因为 $\cos C=\frac{1}{2}$，所以 $C=60°$；

(4) 因为 $\cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $C=45°$.

【点评】 把 $a^2+b^2-c^2$ 作为一个整体，在我们分析问题时，有很大用途.

例3 在△ABC中，a、b、c 分别是∠A、∠B、∠C的对边长，已知 $b^2=ac$，$a^2-c^2=ac-bc$，求∠A的大小及 $\frac{b\sin B}{c}$ 的值.

【分析】 因给出的是 a、b、c 之间的等量关系，要求∠A，需找∠A与三边的关系，故可用余弦定理. 由 $b^2=ac$ 可变形为 $\frac{b^2}{c}=a$，再用正弦定理可求 $\frac{b\sin B}{c}$ 的值.

解法一 因为 $b^2=ac$，又 $a^2-c^2=ac-bc$，所以 $b^2+c^2-a^2=bc$.

在△ABC中，由余弦定理得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{bc}{2bc}=\frac{1}{2}$，所以∠A=60°.

在△ABC中，由正弦定理得 $\sin B=\frac{b\sin A}{a}$，

因为 $b^2=ac$，∠A=60°，

所以 $\frac{b\sin B}{c}=\frac{b^2\sin 60°}{ac}=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

解法二 在△ABC中，

由面积公式得 $\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B$.

因为 $b^2=ac$，∠A=60°，

所以 $bc\sin A=b^2\sin B$.

所以 $\frac{b\sin B}{c}=\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

【点评】 解三角形时，找三边一角之间的关系常用余弦定理，找两边两角之间的关系常用正弦定理.

误区警示

在利用余弦定理及正弦定理解决求边与角的问题过程中，同样要注意解的合理性，从而确定解.

【典型案例】 在△ABC中，$a=2$，$b=\sqrt{3}-1$，$C=30°$，求 c 及 A、B.

错解 由余弦定理：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=2$，

所以 $c=\sqrt{2}$.

由正弦定理：$\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}$，

所以 $\sin A=\frac{a\sin C}{c}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

所以 $A=45°$.

所以 $B=105°$.

正解 由 $c=\sqrt{2}$，再由正弦定理，得 $\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

而 $0°<A<180°$，

所以 $A=45°$ 或 $135°$.

所以 $B=105°$ 或 $15°$.

又 $a>b$，所以 $A>B$.

所以 $A=135°$，$B=15°$.

【点评】 本例若求出 c 后，再用余弦定理求 A，则可避免讨论.

反馈平台

1. 在△ABC中，若 $a=\sqrt{3}+1$，$b=\sqrt{3}-1$，$c=\sqrt{10}$，则△ABC中最大角的角度为 ( )

A. 30° B. 45° C. 60° D. 120°

2. 在△ABC中，若 $a^2+b^2-c^2<0$，则△ABC的形状是 ( )

A. 钝角三角形 B. 直角三角形

C. 锐角三角形 D. 等腰三角形

3. 在△ABC中，已知 $a^2=b^2+c^2+bc$，则 A 等于 ( )

A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

4. 在△ABC中，三内角 A、B、C 对应边分别为 a、b、c，当 $a^2+c^2\geq b^2+ac$ 时，角 B 的取值范围是________.

5. 在△ABC中，已知 $a=7$，$b=8$，$\cos C=\frac{13}{14}$，则

$\triangle ABC$中最大角的余弦值为________.

6. 在$\triangle ABC$中，a,b,c分别是角A,B,C的对边，且$\dfrac{\cos B}{\cos C}=-\dfrac{b}{2a+c}$.

(1) 求角B的大小；

(2) 若$b=\sqrt{13}$，$a+c=4$，求$\triangle ABC$的面积.

同步测试

基础巩固

一、选择题

1. 已知三角形三边长分别是x^2+x+1，x^2-1和$2x+1(x>1)$，则三角形最大角的角度是（　　）

A. 30°　　B. 45°　　C. 90°　　D. 120°

2. 在$\triangle ABC$中，如果$(a+b+c)(b+c-a)=3bc$，则$A=$（　　）

A. 30°　　B. 45°　　C. 60°　　D. 120°

3. 三角形三边的比为$2:3:4$，则三角形的形状是（　　）

A. 钝角三角形　　B. 直角三角形

C. 锐角三角形　　D. 等腰三角形

4. 在$\triangle ABC$中，已知$A=120^\circ$，$c=5$，$b=3$，则$\sin B\cdot\sin C=$（　　）

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{45}{196}$　　C. $\dfrac{54}{196}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

5. 在$\triangle ABC$中，已知$\sqrt{3}a=2b\sin A$，那么$B=$（　　）

A. 30°或90°　　B. 60°或150°

C. 60°或120°　　D. 30°或150°

二、填空题

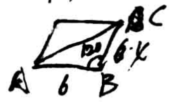
6. 已知锐角三角形的边长分别为2、3、x，则x的取值范围是________.

7. 在$\triangle ABC$中，边a、b的长是方程$x^2-5x+2=0$的两根，$C=60^\circ$，则边$c=$________.

8. 已知$\triangle ABC$中，$(b+c):(c+a):(a+b)=4:5:6$，则$\triangle ABC$的最小角的余弦值是________.

三、解答题

9. 在$\square ABCD$中，$B=120^\circ$，$AB=6$，$BC=4$，求AC、BD.

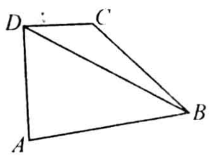


10. 在$\triangle ABC$中，已知$a=7$，$b=8$，$c=9$，试求AC边上的中线长.

能力提高

11. 在$\triangle ABC$中，已知$A>B>C$，且$A=2C$，$b=4$，$a+c=8$，求a，c的长.

12. 如图，在四边形$ABCD$中，已知$AD\perp CD$，$AD=10$，$AB=14$，$\angle BDA=60^\circ$，$\angle BCD=135^\circ$，求BC的长.



13. 在$\triangle ABC$中，已知面积$S=a^2-(b-c)^2$，且$b+c=8$，求S的最大值.

14. 在$\triangle ABC$中，若已知三边的长为连续正整数，最大角为钝角.
(1) 求最大角的余弦值；
(2) 求以此最大角为内角，夹此角两边之和为4的平行四边形的最大面积.

第4课时　余弦定理(2)

基础落实

1. 正弦定理：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$.

2. 三角形面积公式：$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B$.

3. 余弦定理：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

系统掌握三角形中边之间、角之间、边角之间及面积、外接圆直径等各元素之间的关系，灵活地解决有关问题.

根据三角形特征及各元素的关系特点，在解题中领悟数形结合的思想方法和方程的思想方法.

互动学案

重点突破

由余弦定理、正弦定理及面积公式，可将三角形中各元素关系通过不同形式展现出来，因而在解决问题过程中，依题而定，寻找简捷易行的关系.

解三角形和判定三角形形状，是正弦定理、余弦定理的重要应用，各自特点是：正弦定理是根据边及其对角；余弦定理是根据两边及夹角，且在根据两边及其中一边对角确定三角形时，答案又可能不唯一，因而运用余弦定理时，要注意解答的合理性.

范例点评

例1　在锐角$\triangle ABC$中，已知$b=\sqrt{3}R$（其中R为$\triangle ABC$的外接圆半径），且$b^2=ac$，求证：$\triangle ABC$为等边三角形.

【分析】　由b及外接圆半径联想：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$，再由余弦定理将$b^2$化为关于$a$、$c$的表达式即可.

证明　因为$b=\sqrt{3}R$，$b=2R\sin B$，

所以$\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

又B为锐角，

所以$B=60°$.

由$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，

所以$b^2=a^2+c^2-ac=ac$，

即$(a-c)^2=0$.

所以$a=c$，所以$b^2=a^2$，

所以$b=a$，所以$\triangle ABC$为等边三角形.

【点评】　在寻找边边关系问题时，一般均选用余弦定理.

例2　已知a、b、c是$\triangle ABC$中A、B、C的对边，S是$\triangle ABC$的面积，若$a=4$，$b=5$，$S=5\sqrt{3}$，求边c的长度.

【分析】 求 c 边常用正弦定理或余弦定理，而其中 $a=4,b=5$，因而只要求角 C，再由面积公式即得.

解 因为 $S=\frac{1}{2}ab\sin C$，

所以 $5\sqrt{3}=\frac{1}{2}\times4\times5\times\sin C$.

所以 $\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 所以 $\angle C=60°$ 或 $120°$.

又 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，

所以当 $C=60°$ 时，$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\frac{1}{2}=21$；

当 $C=120°$ 时，$c^2=a^2+b^2+ab=61$.

所以 c 的长度为 $\sqrt{21}$ 或 $\sqrt{61}$.

【点评】 本题思路不难寻找，但应注意一题两解及两解的合理性.

例3 在锐角 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，已知 $\sin A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

(1) 求 $\tan^2\frac{B+C}{2}+\sin^2\frac{A}{2}$ 的值；

(2) 若 $a=2$，$S_{\triangle ABC}=\sqrt{2}$，求 b 的值.

【分析】 三角形中的三角函数问题，往往和正弦、余弦定理有关，可以利用它们转化边角关系.

解 (1) 在锐角 $\triangle ABC$ 中，因为 $A+B+C=\pi$，$\sin A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，所以 $\cos A=\frac{1}{3}$.

故 $\tan^2\frac{B+C}{2}+\sin^2\frac{A}{2}=\dfrac{\sin^2\frac{B+C}{2}}{\cos^2\frac{B+C}{2}}+\sin^2\frac{A}{2}$

$=\frac{1-\cos(B+C)}{1+\cos(B+C)}+\frac{1}{2}(1-\cos A)=\frac{1+\cos A}{1-\cos A}+\frac{1}{3}$

$=\frac{7}{3}$.

(2) 因为 $S_{\triangle ABC}=\sqrt{2}$，又 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}bc\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}$，所以 $bc=3$.

将 $a=2,\cos A=\frac{1}{3}$，$c=\frac{3}{b}$ 代入余弦定理：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 中，

得 $b^4-6b^2+9=0$，解得 $b=\sqrt{3}$.

【点评】 知道三角形边角外的元素如中线长、面积、周长等时，灵活逆用公式求得结果即可.

误区警示

在运用余弦定理的过程中，往往易忽视三角形存在的条件.

【典型案例】 已知 $\triangle ABC$ 是钝角三角形，$B>90°$，$a=2x-5$，$b=x+1$，$c=4$，求 x 的取值范围.

错解 因为 $B>90°$，

所以 $a^2+c^2-b^2<0$.

所以 $3x^2-22x+40<0$.

所以 $\frac{10}{3}<x<4$.

【剖析】 应考虑 $a>0$、$b>0$、$c>0$ 及任两边之和大于第三边.

正解 由题意有

$$\begin{cases}2x-5>0,\\x+1>0,\\(2x-5)+(x+1)>4,\\(x+1)+4>2x-5,\\(2x-5)^2+16-(x+1)^2<0,\end{cases}$$

解得 $\frac{10}{3}<x<4$.

反馈平台

1. 不等边 $\triangle ABC$ 中，a 是最大的边，若 $a^2<b^2+c^2$，则 A 的取值范围是 (　　)

A. $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$　　B. $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$

C. $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$　　D. $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$

2. 一个三角形的两边之差为 2，夹角余弦值为 $\frac{3}{5}$，面积为 14，那么这两边长为 (　　)

A. 5 和 7　　B. 5 和 9

C. 7 和 9　　D. 9 和 12

3. 在钝角 $\triangle ABC$ 中，$a=1,b=2$，则最大边 c 的取值范围是 (　　)

A. $\sqrt{2}<c<3$　　B. $\sqrt{5}<c<3$

C. $\sqrt{6}<c<4$　　D. $1<c<2$

4. $\triangle ABC$ 中，若 $a^4+b^4+c^4=2c^2(a^2+b^2)$，则 $C=$________.

5. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，若 $a=1,b=\sqrt{7},c=\sqrt{3}$，则 $B=$________.

6. 在 $\triangle ABC$ 中，$BC=10$，周长为 25，求 $\cos A$ 的最小值.