SHUXUEFENXIQUANCHENGXUEXIZHIDAOYUXITIJINGJIE

数学分析

全程学习指导与习题精解

华东师大第四版（第三版适用）

主编 滕兴虎 赵 颖

（上册）

基础知识归纳、重点难点提示

典型例题分析、课后习题精解

东南大学出版社
Southeast University Press

数学分析全程学习指导与习题精解(上册)

华东师大第四版(第三版适用)

主　编　滕兴虎　赵　颖

编　著　滕兴虎　余亚娟　毛　磊

颜　超　陆小庆　张晓蓉

东南大学出版社

·南京·

图书在版编目(CIP)数据

数学分析全程学习指导与习题精解(上)/滕兴虎，赵颖主编. —南京：东南大学出版社，2012. 2
ISBN 978-7-5641-3016-9

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①滕… ②赵… Ⅲ. ①数学分析—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 192566 号

数学分析全程学习指导与习题精解(上册)(华东师大第四版)

主　　编	滕兴虎　赵　颖	责任编辑	刘　坚　戴季东
电　　话	(025)83793329/83362442(传真)	电子邮件	liu-jian@seu. edu. cn
特约编辑	邱颖萍		
出版发行	东南大学出版社	出 版 人	江建中
社　　址	南京市四牌楼 2 号	邮　　编	210096
销售电话	(025)83793191/83792174/83792214/83794121/83794174/57711295(传真)		
网　　址	www. seupress. com	电子邮件	press@seupress. com
经　　销	全国各地新华书店	印　　刷	南京新洲印刷有限公司
开　　本	718mm×1005mm　1/16	印　　张	18. 25　字　数　400 千
版　　次	2012 年 2 月第 1 版第 1 次印刷		
书　　号	ISBN 978-7-5641-3016-9		
定　　价	26. 00 元		

前　言

数学分析是数学学科中一门最重要的基础课，也是数学专业硕士研究生入学考试必考科目. 学习数学分析既可以为后续专业课奠定必备的数学基础，同时也是提高自身数学修养的必经途径.

数学分析中的概念复杂多样，从基础的变量、函数和极限到复杂的导数、微分和积分，形成了一个无比精美的庞大系统. 这个系统内容丰富，结构严密，无懈可击，作为数学专业学生进入大学阶段学习的第一门基础课程，许多同学在学习过程中感到数学分析抽象难懂，对基本概念以及定理结论在理解上感到困难，具体解题时缺乏思路，难以下手. 为了帮助广大同学更好地掌握数学分析的基本概念和基本理论，综合运用各种解题技巧和方法，提高分析问题和解决问题的能力，我们根据华东师范大学数学系编写的《数学分析》第三版和第四版（高等教育出版社出版）编写了本辅导教材（上、下册）.

本辅导教材由以下几个部分组成：

1. 基本要求、重点与难点：列出相应各章应掌握的知识点以及重点、难点内容.

2. 主要概念与公式：列出相应各章的基本概念、重要定理和重要公式，突出必须掌握和理解的核心内容以及考查的核心知识.

3. 重、难点解答：对本章重点、难点内容以及难以理解的问题给以详细剖析以帮助读者对相应内容理解得更加透彻.

4. 典型例题分析：精选了各名校的考研题以及经典教材中具代表性的例题，内容的重点放在对这些题目解题思路的剖析上，有助于读者从茫无头绪的已知条件中找出有用信息并形成清晰思路，帮助读者开拓解题思路，能够举一反三，触类旁通，更好地掌握数学分析的基本内容和解题方法. 部分例题仅给出了完整的分析，解题过程留给读者作为练习，以体会解题思路的形成.

5. 课后习题全解：教材中课后习题数量大、层次多，许多题目为数学竞赛及研究生入学考试命题的来源. 题目中基础性问题可从多个角度帮助同学们理解基本概念和基本理论，层次较高的问题则有助于广大读者进一步地提高和应用，不少问题具有独特的解题

思路和方法. 因此，这里对两版教材课后的习题均给出了详细解答，帮助读者掌握一般的解题方法和解题技巧. 由于数学分析解题方法千变万化，部分习题我们只给出了一种参考解答，其他方法留给读者自己去思考.（书中标有第四版教材习题的页码，可方便读者查阅. 阅读时，读者也不难发现第三版教材中习题解答的位置.）

基于以上特点本书可作为学习数学分析课程的辅导用书，也可作为教学及考研的参考.

本书上册由滕兴虎、余亚娟、毛磊、颜超、陆小庆、张晓蓉、赵颖等编写，并由滕兴虎、赵颖统稿；下册由滕兴虎、寇冰煜、张燕、刘希强、张纯、吴欧、王璞等编写，并由滕兴虎、王璞统稿. 杨传兵、胡俊等也参加了编写工作. 在本书的策划、编写、审稿等方面得到了东南大学出版社的大力支持和热情帮助，在此表示感谢. 由于作者的水平有限，加之时间仓促，书中不足之处在所难免，敬请广大同行和读者批评指正.

编　者

目　录

第一章　实数集与函数

第二章　数列极限

第三章　函数极限

第四章　函数的连续性

第五章　导数和微分

第六章　微分中值定理及其应用

第一章 实数集与函数

本章讨论了实数集和函数. 函数表示的是变量之间的依赖关系. 函数是数学分析的主要研究对象之一. 本章除了复习中学数学中已学过的内容外,还根据今后的需要,作了必要的补充.

基本要求、重点与难点

基本要求

1. 了解实数的概念,掌握实数集的稠密性. 记住几个重要的不等式: 三角形不等式,均值不等式和伯努利不等式;

2. 理解有界集、确界的概念,掌握确界原理;

3. 掌握函数的有关概念,理解复合函数、反函数和初等函数的定义;

4. 熟练掌握有界函数、单调函数、奇函数、偶函数和周期函数的定义.

重点

确界和确界原理.

难点

有关确界的证明题.

主要概念与公式

主要定义

1. 有理数、无理数和实数

有理数是形如$\frac{p}{q}$ (p, q 为整数,$q\neq 0$)的数. 无限不循环小数称为无理数. 有理数和无理数统称为实数.

2. 邻域

点 a 的 δ 邻域定义为 $U(a;\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}$;

点 a 的空心 δ 邻域定义为 $U^{\circ}(a;\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$;

点 a 的 δ 左邻域定义为 $U_-(a;\delta)=(a-\delta, a]$;

点 a 的 δ 右邻域定义为 $U_+(a;\delta)=[a, a+\delta)$;

点 a 的空心 δ 左邻域定义为 $U_-^{\circ}(a;\delta)=(a-\delta, a)$;

点 a 的空心 δ 右邻域定义为 $U_+^{\circ}(a;\delta)=(a, a+\delta)$;

∞邻域定义为 $U(\infty)=\{x \mid |x|>M\}$;

$+\infty$邻域定义为 $U(+\infty)=\{x \mid x>M\}$;

$-\infty$邻域定义为 $U(-\infty)=\{x \mid x<-M\}$.

其中,M 为充分大的正数.

3. 有界集

设 $S\subseteq \mathbf{R}$, 若存在数 $M(L)$,使得对一切 $x\in S$,都有 $x\leqslant M$ ($x\geqslant L$),则称 S 为有上界(下界)的数集,数 $M(L)$称为 S 的一个上界(下界). 若数集 S 既有上界又有下界,则称 S 为有界集. 若 S 不是有界集,则称 S 为无界集.

4. 确界

设 S 是 $\mathbf{R}$ 中的一个数集,若数 ξ 满足:

(1) 对一切 $x\in S$,有 $x\geqslant \xi$, 即 ξ 是 S 的下界;

(2) 对任何 $\beta>\xi$,存在 $x_0\in \xi$,使得 $x_0<\beta$, 即 ξ 又是 S 的最大下界,则称数 ξ 为数集 S 的下确界,记作 $\xi=\inf S$.

5. 复合函数

设有两个函数 $y=f(u)$, $u\in D$, $u=g(x)$, $x\in E$,记 $E^*=\{x \mid g(x)\in D\}\cap E$. 若 $E^*\neq\varnothing$,则对每一个 $x\in E^*$,可通过函数 g 对应 D 内唯一的一个值 u,而 u 又通过函数 f 对应唯一的一个值 y.

这就确定了一个定义在 E^* 上的函数，它以 x 为自变量，y 为因变量，记作 $y=f(g(x))$, $x\in E^*$，或 $y=(f\circ g)(x)$, $x\in E^*$，称为函数 f 和 g 的复合函数. 并称 f 为外函数，g 为内函数，u 称为中间变量.

6. 反函数

设函数 $y=f(x)$, $x\in D$ 满足：对于值域 $f(D)$ 中的每一个值 y，D 中有且仅有一个值 x 使得 $f(x)=y$，则按此对应法则得到一个定义在 $f(D)$ 上的函数，称这个函数为 f 的反函数，记作

$$f^{-1}: f(D)\to D,\ y\to x \text{ 或 } x=f^{-1}(y),\ y\in f(D).$$

7. 基本初等函数

常量函数　$y=c$（c 是常数）；

幂函数　$y=x^a$（a 为实数）；

指数函数　$y=a^x$（$a>0$, $a\neq 1$）；

对数函数　$y=\log_a x$（$a>0$, $a\neq 1$）；

三角函数　$y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$, $y=\cot x$；

反三角函数　$y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\arctan x$, $y=\operatorname{arccot} x$.

8. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算与复合运算所得到的函数，统称为初等函数.

9. 函数的特性

(1) 有界性　设 $y=f(x)$, $x\in D$.

若存在 $M>0$，使任 $x\in D$，有 $|f(x)|\leqslant M$（$f(x)\leqslant M$、$f(x)\geqslant M$），则称 $f(x)$ 在 D 上有界（上界、下界）.

注　界（上界、下界）不是唯一的.

(2) 单调性　设 $y=f(x)$, $x\in D$.

若任 x_1, $x_2\in D$，由 $x_1<x_2$ 恒有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$（或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$），则称 $f(x)$ 在 D 上是单调增加（单调减少）的，若严格不等号成立，则称严格单调增加（减少）.

(3) 奇偶性　设数集 D 关于原点对称，$y=f(x)$, $x\in D$.

若任 $x\in D$, $f(-x)=f(x)$（$f(-x)=-f(x)$），则称 $f(x)$ 为 D 上的偶（奇）函数.

(4) 周期性　设 $y=f(x)$, $x\in D$.

若存在一个与 x 无关的正数 T，使任 $x\in D$，均有 $f(x\pm T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的函数. 通常把满足关系式的最小正数 T 称为最小周期，简称基本周期.

10. 几种特殊的函数

(1) 分段函数

函数在其定义域的不同部分用不同公式表达的这类函数，常称为分段函数.

(2) 符号函数
$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

(3) 狄利克雷(Dirichlet)函数
$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数},\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数}.\end{cases}$$

(4) 黎曼(Riemann)函数
$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & \text{当 } x=\dfrac{p}{q}\left(p,q\in\mathbf{N}_+,\dfrac{p}{q}\text{ 为既约真分数}\right),\\ 0, & \text{当 } x=0,1 \text{ 和 } (0,1) \text{ 中的无理数}.\end{cases}$$

主要结论与公式

1. 实数集的稠密性

任何两个不相等的实数之间必有另一个实数，且既有有理数，也有无理数.

2. 三角不等式

对于任何 a, $b\in\mathbf{R}$，有如下的三角不等式：

$$|a|-|b|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$$

3. 平均值不等式

对任意 a_1, a_2, $\cdots$, $a_n\in\mathbf{R}^+$，记

$$M=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\text{（算术平均值）},\ G=\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^{\frac{1}{n}}\text{（几何平均值）},$$

$$H=\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}\text{（调和平均值）},$$

则 $H\leqslant G\leqslant M$，等号当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时成立.

4. 伯努利不等式

当 $x>-1$，$n\in\mathbf{N}$ 时，有不等式 $(1+x)^n\geqslant 1+nx$.

5. 确界原理

设 S 为非空数集，若 S 有上界，则 S 必有上确界；若 S 有下界，则 S 必有下确界.

6. 严格单调函数的反函数

设 $y=f(x)$，$x\in D$ 为严格增（减）函数，则 f 必有反函数 f^{-1}，且 f^{-1} 在其定义域 $f(D)$ 上也是严格增（减）函数.

重、难点解答

1. 函数的概念

最早的函数是从对物体运动的研究中产生的. 伽利略（1564～1642）在他的力学研究中，是用文字和比例的语言来表达函数关系的. 例如，"从静止状态开始以定常加速度下降的物体，其经过的距离与所用时间的平方成正比."这句话包含变量，表达了变量之间的依赖关系. 笛卡儿于 17 世纪初创立了解析几何. 此后，函数被当作曲线来研究. 那时，函数等同于一个有限的解析表达式. 微积分的出现，使函数概念得到新的发展. 欧拉（1707～1788）在他的《引论》中把函数定义为由一个变量与一些常量，通过任何方法形成的解析表达式. 他还定义了多元函数，引入了某些用积分表达的函数. 现在的函数定义出现于 19 世纪初，傅里叶（1837 年）给出的（单值）函数的定义为：如果对于给定区间上的每一个 x 的值，有唯一的一个 y 值与它对应，那么 y 就是 x 的一个函数. 至于在整个区间上 y 是否按照一种或多种规律依赖于 x，或者 y 依赖于 x 是否可用数学运算来表达，那都是无关紧要的.

2. 函数的定义域

(1) 如果不考虑函数的实际意义，是指使得函数表达式有意义的所有实数的集合，即自然定义域；

(2) 求复杂函数的定义域，就是求由简单函数定义域所构成的不等式组；

(3) 求复合函数定义域时，同时要使得函数满足函数复合的条件：内层函数的值域不超过外层函数的定义域.

3. 关于函数的表达式及函数性质

求函数的表达式时，常常利用函数的表达式与所用字母无关的特性.

【例 1】 设 $f(x)$ 满足方程 $af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}$，其中 a,b,c 为常数，且 $|a|\neq|b|$，求函数 $f(x)$ 并证明它是奇函数.

分析　由 $f(x)$ 所满足的方程，无法直接求出 $f(x)$ 的表达式，但作代换令 $x=\frac{1}{t}$，可以得到新的方程；联立并消去 $f\left(\frac{1}{x}\right)$，即可解出 $f(x)$，再利用奇函数定义即可证之.

4. 关于反函数

(1) 求 $y=f(x)$ 的反函数，首先由 $y=f(x)$ 解出 $x=f^{-1}(y)$，再把所得表达式中的 x 与 y 对换，即得所求函数的反函数 $y=f^{-1}(x)$. 或者先把表达式 $y=f(x)$ 中的 x 与 y 对换，再解出 $y=f^{-1}(x)$；

(2) 对于分段函数的反函数，应当分段去求；

(3) 反函数的定义域为原来函数的值域.

应当注意，在同一坐标系中，$x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f(x)$ 的图形是相同的，而 $y=f^{-1}(x)$ 与 $y=f(x)$ 的图形是关于 $y=x$ 对称的.

5. 关于复合函数

将两个或两个以上函数进行复合，求其表达式主要是使用代入法，即把一个函数的表达式代替另一个含函数中的自变量即得由这两个函数构成的复合函数.

而要讨论含有分段函数的复合函数，应抓住外层函数定义域的各区间段，再结合中间变量的表达式和中间变量的定义域进行分析.

【例 2】 求下列复合函数

(1) 设 $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$,求 $f\{f[f(x)]\}$ 及其定义域 D.

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0.\end{cases}$ $g(x+1)=x^2+x+1$,求 $f[g(x)]$, $g[f(x)]$.

分析 (2) 中出现分段函数,求 $f[g(x)]$时,外层是分段函数,先求出 $g(x)$的表达式,再依 $g(x)>0$ 或 $g(x)<0$ 代入 $f(x)$ 的表达式;求 $g[f(x)]$ 的表达式 $g[f(x)]=f^2(x)-f(x)+1$,应先求出 $f^2(x)$ 后依 $f^2(x)-f(x)+1$ 大于零或小于零一并代入,得到的依然是分段函数.

解 (1) 因 $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$, $x\neq -1$,所以

$$f[f(x)]=\frac{f(x)-1}{f(x)+1}=-\frac{1}{x},\ x\neq 0,$$
$$f\{f[f(x)]\}=\frac{f[f(x)]-1}{f[f(x)]+1}=\frac{1+x}{1-x},\ x\neq 1,$$

其定义域 $x\neq -1, 0, 1$.

(2) 由 $g(x+1)=x^2+x+1=(x+1)^2-(x+1)+1$ 得

$$g(x)=x^2-x+1=x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0,$$

所以

$$f[g(x)]=g(x)=x^2-x+1,\ g[f(x)]=f(x)^2-f(x)+1,$$

且由 $f(x)$表达式得 $g[f(x)]=\begin{cases}0-0+1, & x<0,\\ x^2-x+1, & x\geqslant 0.\end{cases}$

即 $$g[f(x)]=\begin{cases}1, & x<0,\\ x^2-x+1, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

6. 关于函数的特性

(1) 函数的奇偶性主要依据定义去判定,有时也用如下的运算性质判定;

① 奇函数与奇函数的和(差)是奇函数;

② 奇函数与奇函数的积(商)是偶函数(商的分母非零);

③ 偶函数与偶函数的和(差)是偶函数;

④ 偶函数与偶函数的积(商)是偶函数(商的分母非零);

⑤ 奇函数与偶函数的积(商)是奇函数(商的分母非零)

应当注意,函数的奇偶性是相对于区间而言的,如果定义域或所给的数集关于原点不对称,则该函数就不是奇函数或偶函数.

(2) 通常所说的周期函数的周期是指函数的最小正周期,但周期函数不一定存在最小正周期(如常数函数).下面是几个关于周期函数的结论,读者可按定义自行证明之.

① 若 $f(x)$的周期是 T,则函数 $f(ax+b)$ 亦是周期函数,周期为$\dfrac{T}{|a|}$;

② 若 $f(x)$, $g(x)$分别是以 T_1, T_2 为周期的周期函数,则 $f(x)\pm g(x)$ 是以 T_1, T_2 的最小公倍数为周期的周期函数;

③ 设对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$,存在 $c\neq 0$ 使得 $f(x+c)=-f(x)$, 则 $f(x)$为周期函数;

④ 若 $y=f(x)(x\in(-\infty,+\infty))$ 的图形关于直线 $x=a$ 和 $x=b(b>a)$ 都是对称的,则 $f(x)$ 为周期函数.

由周期函数的定义,我们还可以得到周期函数的必要条件:

① 周期函数的定义域必是既无下界又无上界的;

② $f(x)-f(x_0)$ 的零点如果存在,则零点必有周期性.

(3) 函数的有界性必须在给定的区间内讨论,若题中只给出函数而没有指定区间,此时需要先求出函数的定义域.如果函数在某一区间上有界,界也是不唯一的.

7. 关于确界

(1) 有限数集都存在最大数和最小数,这里的最大数和最小数分别对应有限数集的上边边界和下边边界.但对于无限数集,情况要复杂得多.若无限数集上方(下方)无界,则数集没有相应的上边(下边)

边界;若有上界(下界),数集中也未必有相应的上边(下边)边界.如果上界(下界)是数集中的最大(小)数,则它就是相应的上边(下边)边界,如果有上界(下界),但没有最大(小)数,则最小(大)上(下)界,即上(下)确界起到了上边(下边)边界的作用.

例如,数集 $S=(a,b)$ 是一个有界数集,其中没有最大(小)数,但有最小上界 b 和最大下界 a,数集的上确界和下确界分别是 b 与 a,这一区间的长度是用两个确界之差求出的,即

$$d=\sup\{S\}-\inf\{S\}=b-a$$

因此,可以说上(下)确界是最大(小)数在无限数集的推广.

(2) 确界的等价定义

设 E 为一数集,上确界 $\sup E=\beta$ 有如下三种等价定义:

① (i) 任意 $x\in E$,必有 $x\leqslant\beta$,

(ii) 任意 $\varepsilon>0$,存在 $x_0\in E$,使得 $\beta-\varepsilon<x_0$.

② (i) 任意 $x\in E$,必有 $x\leqslant\beta$,

(ii) 任意 $x<\beta$,存在 $x_0\in E$,使得 $x<x_0$.

③ β 是数集 E 的上界数集中的最小数,即 $\beta=\min\{y\mid x\leqslant y,\ \forall x\in E\}$.

下确界 $\inf E=\alpha$ 的三种等价定义:

① (i) 任意 $x\in E$,必有 $x\geqslant\alpha$,

(ii) 任意 $\varepsilon>0$,存在 $x_0\in E$,使得 $x_0<\alpha+\varepsilon$.

② (i) 任意 $x\in E$,必有 $x\geqslant\alpha$,

(ii) 任意 $x>\alpha$,存在 $x_0\in E$,使得 $x_0<x$.

③ α 是数集 E 的下界数集中的最大数,即 $\alpha=\max\{y\mid y\leqslant x,\ \forall x\in E\}$.

其中,两种情况的定义①在某些证明题中使用起来更方便.

典型例题分析

【例 1】 证明不等式 $\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\dfrac{|a|}{1+|a|}+\dfrac{|b|}{1+|b|}$.

分析　首先可想到利用三角不等式 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$,但此时要证不等式成立,对左端一般来说采用的方法是放大分子或缩小分母,但用三角不等式放大分子时分子分母形式不对称,为使分子分母对称,因此有不等式

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}$$

是否成立的疑问,从这一不等式可抽象出函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}(x>0)$,而用函数的单调性可保证上述不等式的成立.

证明　因为 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}=1-\dfrac{1}{1+x}$ 在 $x>0$ 时是单调增的,因此

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

【例 2】 对于下列命题

(1) 任何周期函数一定存在最小正周期.　　(2) $[x]$是周期函数.

(3) $\sin\sqrt{x}$不是周期函数.　　(4) $x\cos x$ 不是周期函数.

其中正确的命题有　　(　　)

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

分析　利用周期函数的定义及性质求解.

解　任一常函数均为周期函数,且任一正数都是它的周期,因此不存在最小正周期,命题(1)不正确;

由取整函数的图形可知命题(2)也不正确;

因为函数 $f(x)=\sin\sqrt{x}$ 的定义域 $D=[0,+\infty)$ 不符合周期函数定义域的特点(周期函数的定义域应该是上、下均无界),因此命题(3)正确;

直接按周期函数定义验证命题(4)成立与否是有困难的,因此考虑用反证法.若 $f(x)=x\cos x$ 为周期函数,设其周期为 $T(>0)$,注意到 $f(0)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$,则 $f(T)=f\left(\frac{\pi}{2}+T\right)=0$,又由 $f(T)=0$ 知 $\cos T=0$, $T=n\pi+\frac{\pi}{2}(n\in\mathbf{Z}^+)$,从而

$$f\left(\frac{\pi}{2}+T\right)=f\left(\frac{\pi}{2}+n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=f((n+1)\pi)=(n+1)\pi\cos((n+1)\pi)\neq 0,$$

矛盾,因此 $f(x)=x\cos x$ 不是周期函数,命题(4)正确.

总上可知,选项 B 正确.

【例 3】 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义,且对任意 $x, y\in(-\infty,+\infty)$ 有

$$|f(x)-f(y)|<|x-y|.$$

证明 $F(x)=f(x)+x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加.

分析 此类问题一般需按定义出发证明,由题设可知

$$\pm(f(x_2)-f(x_1))\leqslant|f(x_2)-f(x_1)|,$$

可根据证明需要选取适当不等式.

证明 任取 $x_1, x_2\in(-\infty,+\infty)$,且 $x_2>x_1$,则由题设条件有

$$|f(x_2)-f(x_1)|<|x_2-x_1|=x_2-x_1,$$

而
$$f(x_1)-f(x_2)\leqslant|f(x_2)-f(x_1)|<|x_2-x_1|=x_2-x_1,$$

所以 $f(x_1)+x_1<f(x_2)+x_2$ 从而 $F(x_1)<F(x_2)$,故 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加.

【例 4】 设 A, B 是非空数集, $S=A\cup B$,证明: $\sup S=\max\{\sup A, \sup B\}$.

分析 仅已知 A, B 是非空数集,未知 A, B 有上界与否,因此需要分类讨论,再利用确界的定义证明.

证明 若 A, B 至少有一个集合无上界,不妨设集合 A 无上界,则由 $S=A\cup B$ 知集合 S 也无上界,从而 $\sup A=+\infty=\sup S$,结论成立.

若 A, B 均有上界,则均有有限上确界,不妨设 $\sup B\leqslant\sup A$,下证 $\sup S=\sup A$.

(1) $\forall x\in S=A\cup B$,由 $\sup B\leqslant\sup A$ 知, $x\leqslant\sup A$;

(2) 由 $\sup A$ 的定义知: $\forall\varepsilon>0$, $\exists x_0\in A$,使得 $x_0>\sup A-\varepsilon$.而 $S=A\cup B$,故 $x_0\in S$ 且 $x_0>\sup A$.

因此 $\sup A$ 为集合 S 的上确界,即 $\sup S=\sup A$.

课后习题全解

§1 实数(P4)

1. 设 a 为有理数, x 为无理数.证明:

(1) $a+x$ 是无理数; (2) 当 $a\neq 0$ 时, ax 是无理数.

证明 (1) 用反证法.假设 $a+x$ 是有理数,那么 $(a+x)-a=x$ 也是有理数.这与 x 是无理数矛盾.故 $a+x$ 是无理数.

(2) 用反证法.假设 ax 是有理数.因为 a 是不等于零的有理数,所以 $\frac{ax}{a}=x$ 是有理数.这与 x 是无理数矛盾.故 ax 是无理数.

2. 试在数轴上表示出下列不等式的解:

(1) $x(x^2-1)>0$; (2) $|x-1|<|x-3|$;

(3) $\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-1}\geqslant\sqrt{3x-2}$.

解 (1) 由原不等式得

$$\begin{cases}x>0,\\x^2-1>0\end{cases}\tag{a}$$

或

$$\begin{cases} x<0, \\ x^2-1<0. \end{cases} \tag{b}$$

不等式组(a) 的解是 $x>1$,不等式组(b) 的解是 $-1<x<0$. 故原不等式的解集是

$$\{x \mid -1<x<0 \text{ 或 } x>1\}.$$

在数轴上表示如图 1 - 1 所示.

图 1 - 1

(2) 原不等式同解于不等式 $(x-1)^2<(x-3)^2$. 由此得原不等式的解为 $x<2$. 在数轴上表示如图 1 - 2 所示.

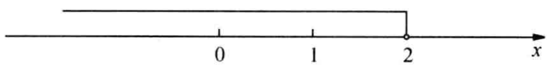

图 1 - 2

(3) 由原不等式知

$$\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-1}\geqslant 0 \text{ 且 } x\geqslant 1$$

即 $x\leqslant 0$ 且 $x\geqslant 1$, 所以原不等式无解.

3. 设 a、$b\in \mathbf{R}$. 证明:若对任何正数 ε 有 $|a-b|<\varepsilon$,则 $a=b$.

证明　用反证法. 假设 $a\neq b$,那么 $a-b\neq 0$. 设 $|a-b|=\eta$,则 $\eta>0$. 取 $\varepsilon=\dfrac{\eta}{2}$,那么 $|a-b|<\varepsilon$ 不成立,因为 $|a-b|=\dfrac{\eta}{2}+\dfrac{\eta}{2}>\dfrac{\eta}{2}$. 这与题设矛盾,故 $a=b$.

4. 设 $x\neq 0$,证明 $\left|x+\dfrac{1}{x}\right|\geqslant 2$, 并说明其中等号何时成立.

证明　由于 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2\geqslant 2\sqrt{x^2\cdot\dfrac{1}{x^2}}+2=4$. 因此 $\left|x+\dfrac{1}{x}\right|\geqslant 2$. 当且仅当 $x^2=\dfrac{1}{x^2}$,即 $x=\pm 1$ 时, 原不等式中的等号成立.

5. 证明:对任何 $x\in\mathbf{R}$ 有

(1) $|x-1|+|x-2|\geqslant 1$;　　(2) $|x-1|+|x-2|+|x-3|\geqslant 2$.

证明　(1) 由三角不等式 $|a|+|b|\geqslant|a+b|$ 可知,

$$|x-1|+|x-2|=|x-1|+|2-x|\geqslant|(x-1)+(2-x)|=1.$$

(2) $$\begin{aligned}|x-1|+|x-2|+|x-3| &\geqslant|x-1|+|x-3|=|x-1|+|3-x| \\ &\geqslant|(x-1)+(3-x)|=2.\end{aligned}$$

6. 设 a、b、$c\in\mathbf{R}^+$ ($\mathbf{R}^+$ 表示全体正实数的集合). 证明

$$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right|\leqslant|b-c|.$$

你能说明此不等式的几何意义吗?

证明　由于 $\forall x\in\mathbf{R}$, $|-x|=|x|$,故只需对 $b\geqslant c>0$ 的情形进行证明,此时原不等式化为

$$\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\leqslant b-c,$$

上式等价于

$$\sqrt{a^2+b^2}+c\leqslant\sqrt{a^2+c^2}+b,$$

即

$$c\sqrt{a^2+b^2}\leqslant b\sqrt{a^2+c^2}.$$

由于 b、$c\in\mathbf{R}^*$,所以,上式等价于

$$c^2a^2+c^2b^2\leqslant b^2a^2+b^2c^2,$$

即 $c^2\leqslant b^2$，当 $b\geqslant c>0$ 时，这个不等式是成立的. 所以，原命题成立.

题中不等式的几何意义如图 1-3 所示，其中 $AB=a$，$BD=b$，$BC=c$. 其几何意义表示 $\triangle ACD$ 的两边之差小于第三边.

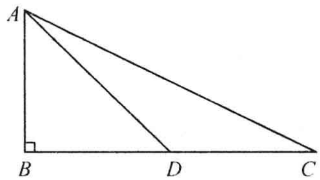

图 1-3

7. 设 $x>0$，$b>0$，$a\neq b$. 证明 $\dfrac{a+x}{b+x}$ 介于 1 与 $\dfrac{a}{b}$ 之间.

证明 $\dfrac{a+x}{b+x}$ 介于 1 与 $\dfrac{a}{b}$ 之间的充分必要条件是 $\left(\dfrac{a+x}{b+x}-1\right)\left(\dfrac{a+x}{b+x}-\dfrac{a}{b}\right)<0$，

$$\left(\frac{a+x}{b+x}-1\right)\left(\frac{a+x}{b+x}-\frac{a}{b}\right)=\frac{a-b}{b+x}\cdot\frac{bx-ax}{(b+x)b}=-\frac{x(a-b)^2}{b(b+x)^2},$$

由题设 $x>0$，$b>0$，$a\neq b$ 可知 $-\dfrac{x(a-b)^2}{b(b+x)^2}<0$. 于是原命题得证.

8. 设 p 为正整数. 证明：若 p 不是完全平方数，则 $\sqrt{p}$ 是无理数.

证明 反证法. 假设 $\sqrt{p}$ 是有理数. 由于 p 不是完全平方数，于是存在两个互质的正整数 m，n，且 $n>1$，使得 $\sqrt{p}=\dfrac{m}{n}$，于是 $p=\dfrac{m^2}{n^2}$，$m^2=n^2p=n(pn)$，由此得 $n\mid m^2$. 由于 $n>1$，所以存在质数 $r\mid n$. 于是 $r\mid m^2$，$r\mid m$. 这与 m，n 互质矛盾，所以 $\sqrt{p}$ 是无理数.

9. 设 a、b 为给定实数. 试用不等式符号(不用绝对值符号)表示下列不等式的解：

(1) $|x-a|<|x-b|$；(2) $|x-a|<x-b$； (3) $|x^2-a|<b$.

解 (1) 因为 $x=b$ 不是原不等式的解，原不等式可化为 $\left|\dfrac{x-a}{x-b}\right|<1$，即 $-1<\dfrac{x-a}{x-b}<1$. 由此得不等式组

$$\begin{cases}\dfrac{(x-a)-(x-b)}{x-b}<0,\\[2mm] \dfrac{(x-a)+(x-b)}{x-b}>0.\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}x>b,\\ b-a<0,\\ 2x-a-b>0\end{cases}\quad 或\begin{cases}x<b,\\ b-a>0,\\ 2x-a-b<0.\end{cases}$$

故当 $a>b$ 时，原不等式的解是 $x>\dfrac{a+b}{2}$. 当 $a<b$ 时，原不等式的解是 $x<\dfrac{a+b}{2}$. 当 $a=b$ 时，原不等式的解集是 $\varnothing$.

(2) 原不等式可化为

$$\begin{cases}x>b,\\ b-x<x-a<x-b.\end{cases}\quad 即\quad \begin{cases}x>b,\\ a>b,\\ x>\dfrac{a+b}{2}.\end{cases}$$

故当 $a>b$ 时，原不等式的解是 $x>\dfrac{a+b}{2}$. 当 $a\leqslant b$ 时，原不等式的解集是 $\varnothing$.

(3) 当 $b\leqslant 0$ 时，原不等式的解集是 $\varnothing$.

当 $b>0$ 时，原不等式化为 $-b<x^2-a<b$，即

$$\begin{cases}x^2<a+b,\\ x^2>a-b.\end{cases}$$

(i) 当 $b>0$，$a+b\leqslant 0$ 时，原不等式的解集是 $\varnothing$.

(ii) 当 $b>0$，$a+b>0$，$a-b<0$ 时，原不等式的解是

$$-\sqrt{a+b}<x<\sqrt{a+b}.$$

(iii) 当 $b>0$, $a+b>0$, $a-b\geqslant 0$ 时,原不等式的解是

$$-\sqrt{a+b}<x<-\sqrt{a-b}\quad 或\quad \sqrt{a-b}<x<\sqrt{a+b}.$$

§2　数集・确界原理(P9)

1. 用区间表示下列不等式的解.

(1) $|1-x|-x\geqslant 0$;　　(2) $\left|x+\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 6$;

(3) $(x-a)(x-b)(x-c)>0$ (a, b, c 为常数,且 $a<b<c$);

(4) $\sin x\geqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

解　(1) 不等式可化为 $|1-x|\geqslant x$. 显然,当 $x\leqslant 0$ 时,原不等式总成立;当 $x>0$ 时,原不等式可化为$(1-x)^2\geqslant x^2$,即 $1-2x+x^2\geqslant x^2$,解得 $x\leqslant\dfrac{1}{2}$;综上,原不等式的解为 $x\leqslant\dfrac{1}{2}$,用区间表示为$\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$.

(2) 显然,当一个数是 $\left|x+\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 6$ 的解时,它的相反数也是不等式的解. 于是先求解不等式组

$$\begin{cases}x>0,\\ x+\dfrac{1}{x}\leqslant 6,\end{cases}\quad 即\quad\begin{cases}x>0,\\ x^2-6x+1\leqslant 0,\end{cases}$$

解得 $3-2\sqrt{2}\leqslant x\leqslant 3+2\sqrt{2}$,于是原不等式的解集为

$$[-3-2\sqrt{2},\ -3+2\sqrt{2}]\cup[3-2\sqrt{2},\ 3+2\sqrt{2}].$$

(3) 由于 $a<b<c$, 故可将不等于 a、b、c(它们不是原不等式的解)的实数划分为 4 个部分$(-\infty, a)$、(a, b)、(b, c)、$(c, +\infty)$. 当 x 在其中任一部分中变化时,$(x-a)$、$(x-b)$、$(x-c)$都不变号,由此可得原不等式的解集为$(a, b)\cup(c, +\infty)$.

(4) 由单位圆中的正弦线可得 $\sin x\geqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 的解集是$\left[2k\pi+\dfrac{\pi}{4},\ 2k\pi+\dfrac{3}{4}\pi\right]$, $k=0, \pm1, \pm2, \cdots$.

2. 设 S 为非空数集. 试对下列概念给出定义:

(1) S 无上界;　　(2) S 无界.

解　(1) S 无上界的定义是:设 S 为非空数集,若对任意的正数 M,总存在 $x_0\in S$,使得 $x_0>M$, 则称数集 S 无上界.

(2) S 无界的定义是:设 S 为非空数集,若对任意的正数 M,总存在 $x_0\in S$,使得 $|x_0|>M$, 则称数集 S 无界.

3. 试证明由式(3)所确定的数集 S 有上界而无下界.

证明　式(3)所确定的数集 $S=(-\infty, 2]$. 3 是数集 S 的一个上界. S 无下界. 因为对于任意一个正数 M,令 $x_0=-(M+1)\in S$,而 $|x_0|=M+1>M$.

4. 求下列数集的上、下确界,并依定义加以验证:

(1) $S=\{x\mid x^2<2\}$;　　(2) $S=\{x\mid x=n!,\ x\in\mathbf{N}_+\}$;

(3) $S=\{x\mid x$ 为$(0, 1)$内的无理数$\}$;　　(4) $S=\left\{x\mid x=1-\dfrac{1}{2^n},\ n\in\mathbf{N}_+\right\}$.

解　(1) 用区间表示为$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$,易见 S 的上、下确界分别为$\sqrt{2}$和$-\sqrt{2}$. 这里仅证$\sqrt{2}$是上确界. 显然$\sqrt{2}$是集合 S 的一个上界. 设 $\alpha<\sqrt{2}$,令$\sqrt{2}-\alpha=\varepsilon$,则 $\varepsilon>0$. 不妨设 $\alpha>-\sqrt{2}$,即 $\varepsilon<2\sqrt{2}$. 取 $x_0=\alpha+\dfrac{\varepsilon}{2}=\alpha+\varepsilon-\dfrac{\varepsilon}{2}=\sqrt{2}-\dfrac{\varepsilon}{2}$,可见 $x_0\in S$,并且 $x_0>\alpha$. 因此,$\sqrt{2}$是 S 的上确界.

(2) $S=\{x\mid x=n!,\ n\in\mathbf{N}_+\}=\{1, 2, 6, \cdots\}$ 的上、下确界分别为$+\infty$和 1. 1 是 S 的一个下界,并且任何大于 1 的数都不是 S 的下界,所以 1 是 S 的最大下界,即 1 是 S 的下确界. 对任意的 $M>0$,取 $n=[M]+1\in\mathbf{N}_+$,则 $x=n!\geqslant n>M$, 故 S 无上界,即 S 的上确界为$+\infty$.

(3) $S=\{x\mid x$ 为$(0,1)$内的无理数$\}$ 的上、下确界分别为 1 和 0. 这里只证明 1 是 S 的上确界. 设 $\alpha<1$,不妨设 $\alpha>0$. 由无理数的稠密性可知,存在无理数 $x_0\in(\alpha,1)$. 于是 $x_0\in S$,并且 $x_0>\alpha$. 因此,1 是 S 的上确界.

(4) $S=\left\{x\mid x=1-\dfrac{1}{2^n},\ n\in\mathbf{N}_+\right\}$ 的上确界为 1,下确界为$\dfrac{1}{2}$. 因为 S 中的最小元素为$\dfrac{1}{2}$,所以$\dfrac{1}{2}$是 S 的最大下界. 即$\dfrac{1}{2}$是 S 的下确界. 由于 $1-\dfrac{1}{2^n}$ $(n\in\mathbf{N}_+)$,所以 1 是 S 的一个上界,设 $\alpha<1$,令 $1-\alpha=\varepsilon$,由于 $\varepsilon>0$,所以存在 $n_0\in\mathbf{N}_+$,使得$\dfrac{1}{2^{n_0}}<\varepsilon$,于是 $x_0=1-\dfrac{1}{2^{n_0}}\in S$,满足不等式 $x_0>1-\varepsilon=\alpha$. 因此,1 是 S 的上确界.

5. 设 S 为非空有下界数集. 证明

$$\inf S=\xi\in S\Leftrightarrow\xi=\min S.$$

证明 必要性 设 $\inf S=\xi\in S$,因为 ξ 是 S 的下确界,所以 ξ 是 S 的一个下界. 于是,对于 S 的任一元素 x,$x\geqslant\xi$. 又 $\xi\in S$,故 ξ 是 S 中最小的数,即 $\xi=\min S$.

充分性 设 $\xi=\min S$,则 $\xi\in S$,且对于 S 中的任意元素 x,$x\geqslant\xi$. 即 ξ 是 S 的一个下界. 对于任意 $\alpha>\xi$,取 $x_0=\xi\in S$,则 $x_0<\alpha$. ξ 是 S 的下确界,即 $\inf S=\xi\in S$.

6. 设 S 为非空数集,定义 $S^-=\{x\mid -x\in S\}$. 证明

(1) $\inf S^-=-\sup S$; (2) $\sup S^-=-\inf S$.

证明 (1) 对 $\sup S=+\infty$ 和 $\sup S=\eta$ 两种情况分别讨论.

设 $\sup S=+\infty$,则对任意负数 M,存在 $x_0\in S$,使得 $x_0>-M$. 于是,$-x_0\in S^-$,$-x_0<M$. 故 S^- 无下界,即 $\inf S^{-1}=-\sup S$.

设 $\sup S=\eta$,则对于任意 $x_0\in S^-$,$-x_0\in S$,$-x_0\leqslant\eta$,$x_0\geqslant-\eta$. 故 $-\eta$ 是 S^- 的一个下界. 对于任意正数 ε,存在 $x_0\in S$,使得 $x_0>\eta-\varepsilon$. 于是,$-x_0\in S^-$,$-x_0<-\eta+\varepsilon$. 故 $-\eta$ 是 S^- 的下确界,即

$$\inf S^-=-\sup S.$$

(2) 同理可证.

7. 设 A、B 皆为非空有界数集,定义数集

$$A+B=\{z\mid z=x+y,\ x\in A,\ y\in B\}.$$

证明:(1) $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$; (2) $\inf(A+B)=\inf A+\inf B$.

证明 (1) 设 $\sup A=\eta_1$,$\sup B=\eta_2$,则对任意的 $c\in A+B$,存在 $a\in A$,$b\in B$,使得 $c=a+b$,于是 $a\leqslant\eta_1$,$b\leqslant\eta_2$,$c\leqslant\eta_1+\eta_2$. 因此 $\eta_1+\eta_2$ 是 $A+B$ 的一个上界. 对于任意正数 ε,存在 $a\in A$,$b\in B$,使得 $a>\eta_1-\dfrac{\varepsilon}{2}$,$b>\eta_2-\dfrac{\varepsilon}{2}$. 于是,$a+b\in A+B$,并且 $a+b>(\eta_1+\eta_2)-\varepsilon$,故 $\sup(A+B)=\eta_1+\eta_2$,即 $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$.

(2) 同理可证.

8. * 设 $a>0$,$a\neq1$,x 为有理数. 证明:

$$a^x=\begin{cases}\sup\{a^r\mid r\text{ 为有理数},r<x\}, & \text{当 } a>1,\\ \inf\{a^r\mid r\text{ 为有理数},r<x\}, & \text{当 } a<1.\end{cases}$$

证明 设 $a>1$,令 $S=\{a^r\mid r$ 为有理数,$r<x\}$. 因为 $y=a^x$ 是单调增加函数,所以对任意有理数 $r<x$,$a^r\leqslant a^x$,即 a^x 是 S 的一个上界. 设 $\alpha<a^x$,不妨设 $\alpha>0$. 那么,$\log_a\alpha<x$. 根据有理数的稠密性,存在有理数 r_1,使得 $\log_a\alpha<r_1<x$. 于是,$\alpha<a^{r_1}$. 由 $r_1<x$ 可知 $a^{r_1}\in S$. 故 $a^x=\sup S$.

类似可证当 $a<1$ 时,$a^x=\inf S$.

注 本题为第三版第 8 题.

§3 函数概念(P15)

1. 试作下列函数的图像:

(1) $y=x^2+1$; (2) $y=(x+1)^2$; (3) $y=1-(x+1)^2$;