高等学校面向二十一世纪规划教学丛书

Probability and Mathematical Statistics

# 概率论与数理统计

邱淦俤　刘卓雄／编著

厦门大学出版社
XIAMEN UNIVERSITY PRESS
国家一级出版社
全国百佳图书出版单位

高等学校面向二十一世纪规



Probability and Mathematical Statistics

# 概率论与数理统计

邱淦俤　刘卓雄 / 编著



厦门大学出版社
XIAMEN UNIVERSITY PRESS
国家一级出版社
全国百佳图书出版单位

**图书在版编目(CIP)数据**

概率论与数理统计/邱淦俤,刘卓雄编著.—厦门:厦门大学出版社,2011.12
ISBN 978-7-5615-4190-6

Ⅰ.①概… Ⅱ.①邱…②刘… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 279049 号

厦门大学出版社出版发行
(地址:厦门市软件园二期望海路 39 号 邮编:361008)
http://www.xmupress.com
xmup @ public.xm.fj.cn
厦门市明亮彩印有限公司印刷
2011 年 12 月第 1 版 2011 年 12 月第 1 次印刷
开本:787×960 1/16 印张:14.75 插页:2
字数:260 千字 印数:1～2000 册
定价:30.00 元

# 前 言

本教材是在原宁德师专数学系学生使用多年的概率论与数理统计讲义的基础上，根据学生的反馈意见及任课教师教学过程的体会与建议进行充实、优化、整合而成的，特别对数理统计部分补充了大量新的内容以体现这门课程特有的广泛的应用性。

本教材按照教育部对概率论和数理统计课程的基本要求，既兼顾到数学知识的科学性、严谨性和系统性，又突出知识在相关学科、经济建设和生产实际中的应用性，并以此来构建知识体系和教学体系，以利于在教育改革新形势下对应用型人才培养的要求，更好地为经济建设和社会各项事业的发展提供强有力的智力支撑。

本教材共分九章：第一章事件与概率，第二章随机变量及其分布函数，第三章多维随机变量及其分布，第四章随机变量的数字特征，第五章大数定律与中心极限定理，第六章统计估计，第七章假设检验，第八章方差分析与正交试验设计，第九章回归分析。

宁德师范学院数学系周仙耕、陈省江、林影老师也参加了本书的编写工作。感谢厦门大学出版社的大力支持与帮助。

鉴于作者水平所限，本书不尽如人意之处敬请读者见谅。

**邱淦俤　刘卓雄**

2011.11.25

# 目　录

# 引 言

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律的一门数学学科. 为探索自然界某些现象的规律,人们总是对这些现象有目的性地观察或试验. 例如:

试验 Ⅰ:一个盒子中有十个完全相同的白球,搅均匀后从中任意摸取一球;

试验 Ⅱ:一个盒子中有十个完全相同的球,其中 5 个是白球,另外 5 个是黑球,搅均匀后从中任意摸取一球.

对于试验 Ⅰ,在球没有取出之前,我们就能确定取出的必定是白球. 换句话说,根据试验开始时的条件就可以确定试验的结果. 诸如试验 Ⅰ 所对应的现象称为**确定性现象**. 对于试验 Ⅱ,在球没有取出之前,我们从试验开始时的条件不能确定试验的结果(即取出的球是白的还是黑的),也就是说一次试验的结果,出现白球还是出现黑球,在试验之前是无法确定的. 诸如试验 Ⅱ 所对应的现象称之为**随机现象**.

确定性现象的特点是,在一定条件下,试验的结果是完全确定的,而随机现象的特点是试验或观察的结果呈现出不确定性,时而出现这种结果,时而出现那种结果. 在客观世界中,随机现象是极为普遍的. 例如:

"某地区的年降雨量."

"检查流水生产线上的一件产品,是合格还是不合格?"

"某电话交换站在单位时间内收到的用户呼唤次数."

……

概率论与数理统计的研究对象就是随机现象. 对于随机试验 Ⅱ,骤然一看,似乎没有什么规律可言,但如果进行大量试验($n$ 次),每次取出一球,记录球的颜色并将球放回、搅匀,那么可以观察到出现白球的次数 $n_{白}$ 和出现黑球的次数 $n_{黑}$ 是很接近的,比值$\dfrac{n_{白}}{n}\left(或\dfrac{n_{黑}}{n}\right)$会逐渐稳定在$\dfrac{1}{2}$ 附近. 这表明就一次试验而言,似乎没有什么规律,但如果不断地重复这种试验且当试验的次数越

来越多时，试验的结果还是会遵循某种规律的，这种规律称为“统计规律”，它是客观存在的，不论进行还是没有进行试验，也不论谁进行试验，这都是一个不变的客观事实.

正因为概率论与数理统计揭示了许多随机现象内在的客观规律，使得概率论与数理统计具有极其广泛的应用. 一方面，为科学技术、工农业生产提供科学有效的计算工具；另一方面，广泛的应用也促进概率论与数理统计在理论和应用两方面都得到更进一步的发展.

# 第一章　事件与概率

## §1.1　随机事件

首先,我们给出随机试验的精确定义.

**定义 1**　一个试验如果满足下述条件:

(1) 试验可以在相同的情形下重复进行;

(2) 试验的可能结果不止一个并且所有结果都是明确可知的;

(3) 每次试验总是恰好出现这些可能结果中的一个,但在试验之前却不能确定会出现哪一个结果,这样的试验称为**随机试验**,也简称为**试验**.

随机试验的每一个结果称为**基本事件**,常用 $\omega$ 表示. 全体基本事件组成的集合称为**基本事件空间**(或称为样本空间,相应地称基本事件为样本点),通常用 $\Omega$ 表示.

**例 1**　在前述试验 Ⅱ 中,令

$$\omega_1 = \{取得白球\}, \omega_2 = \{取得黑球\}$$

则基本事件空间为

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}.$$

**例 2**　投一枚骰子,用 $\omega_i$ 表示"出现 $i$ 点"($i = 1,2,3,4,5,6$),则基本事件空间为

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}.$$

也可简记为 $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

**例 3**　在单位圆上任意取两点,令

$$t = \{这两点间的距离\}$$

则基本事件空间为

$$\Omega = [0,2]$$

**例 4**　计算某电话交换台在 8 点到 9 点之间所接到的呼唤次数. 令

$$\omega_i = \{收到的呼唤次数为\ i\}$$

则基本事件空间为

$$\Omega = \{0,1,2,3,\cdots\}.$$

当 $\omega$ 是 $A$ 包含的一个基本事件时，记为 $\omega \in A$(读作 $\omega$ 属于 $A$). 当且仅当事件 $A$ 所包含的一个基本事件 $\omega$ 出现或发生时，称 $A$ 出现或发生. 在一定条件下必然发生的事件称为必然事件，通常也用 $\Omega$ 表示，在一定条件下必然不会发生的事件称为**不可能事件**，通常用 $\varnothing$ 表示.

在有些问题的研究中，我们常常不只研究一个事件，而是要研究许多事件，而且这些事件之间有着一定的联系. 下面引进事件间的几种主要关系及运算.

**定义 2** 若事件 $A$ 出现必然导致事件 $B$ 出现，则说事件 $B$ 包含事件 $A$(或说事件 $A$ 包含于事件 $B$)，记为 $A \subset B$(图 1.1).

**例 5** 一批产品共 100 件，其中次品 5 件，正品 95 件，从中任取 3 件. 若事件 $A$ 表示"取到两件次品"，事件 $B$ 表示"至少取到 1 件次品"，则 $A \subset B$.

**定义 3** 若事件 $A$ 出现必然导致事件 $B$ 出现，而且事件 $B$ 出现也必然导致事件 $A$ 出现，则称事件 $A$ 等于事件 $B$. 即若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则 $A = B$(图 1.2).

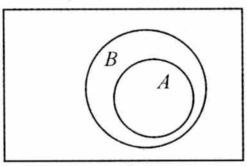


**图 1.1**

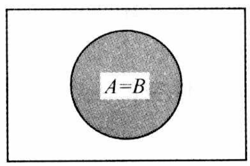


**图 1.2**

**例 6** 问题同例 5. 若 $A$ 表示"取到 1 件或 2 件或 3 件次品"，事件 $B$ 表示"至少取到 1 件次品"，则 $A = B$.

一般地说，要证明 $A = B$ 通常有三种方法：(1) 当 $A, B$ 由具体有限元素构成时，可通过写出具体元素，观察 $A$ 与 $B$ 包含的元素是否完全相同；(2) 用事件互相包含方法证：即证 $A \subset B$ 且 $B \subset A$；(3) 利用事件运算的一系列常用公式来证明.

**定义 4** "事件 $A$ 与事件 $B$ 至少有一个发生"这一事件称为事件 $A$ 与事件 $B$ 的并，记为 $A \cup B$(图 1.3).

**定义 4′** "事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 中至少有一个事件发生"这一事件称为事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的并，记为 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

**例 7**　在并联电路中(图 1.4),$A$ 表示“灯亮”这一事件,$A_1$ 表示“开关 $a_1$ 接通,而开关 $a_2$ 断开”这一事件,$A_2$ 表示“开关 $a_2$ 接通,开关 $a_1$ 断开”这一事件,$A_3$ 表示“开关 $a_2$,$a_1$ 都接通”这一事件. 则 $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

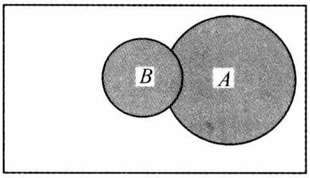


图 1.3

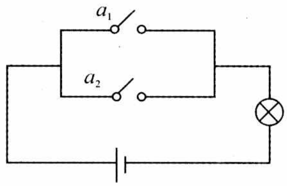


图 1.4

**定义 5**　“事件 $A$ 与事件 $B$ 同时发生”这一事件称为事件 $A$ 与 $B$ 的交,记为 $AB$(或 $A \cap B$)(图 1.5).

**定义 5′**　“事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 同时发生”这一事件称为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的交,记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

**例 8**　在串联电路中(图 1.6),$A$ 表示“灯亮”这一事件,$A_1$ 表示“开关 $a_1$ 接通”这一事件,$A_2$ 表示“开关 $a_2$ 接通”这一事件. 则 $A = A_1A_2$.

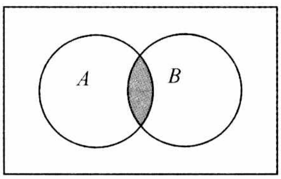


图 1.5

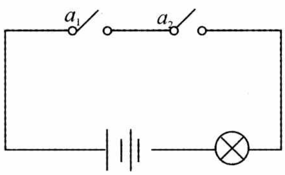


图 1.6

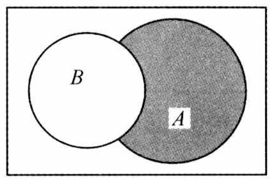


图 1.7

**定义 6**　“事件 $A$ 发生而事件 $B$ 不发生”这件事称为事件 $A$ 与 $B$ 的差,若用 $C$ 表示 $A$ 与 $B$ 的差,记为 $C = A - B$(图 1.7).

**定义 7**　事件 $A$、$B$ 不能同时发生,即 $AB = \varnothing$(图 1.8),则称 $A$ 与 $B$ 为互斥事件(或互不相容事件);如果两事件 $A$、$B$ 满足关系:$A + B = \Omega$,$AB = \varnothing$,即 $A$,$B$ 中必有一个出现,但不能同时出现,则称 $A$,$B$ 为对立事件(或互逆事件),记为 $B = \overline{A}$(或 $\overline{B} = A$)(图 1.9).

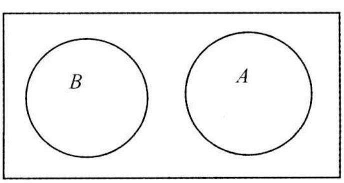


图 1.8

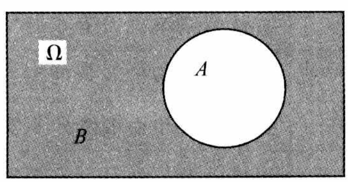


图 1.9

由定义 7 可以看出，对立事件一定是互不相容事件，反之不一定成立.

事件 $A-B$ 表示事件 $A$ 发生而事件 $B$ 不发生，而事件 $A\overline{B}$ 也表示事件 $A$ 发生而事件 $B$ 不发生，因此 $A-B=A\overline{B}$.

**例 9** 投一骰子，用 $A$ 表示出现偶数点，$B$ 表示出现能被 3 整除的点，$C$ 表示出现偶数点而不能被 3 整除，则

$$A=\{2,4,6\},B=\{3,6\},C=A-B=\{2.4\}.$$

**例 10** 一位民兵打靶，"打中 2 环"与"至少打中 5 环"是互不相容事件，因为这两个事件不可能同时发生，但它们不是互逆事件，因为"打中 2 环"的逆事件是"不是打中 2 环"，而"至少打中 5 环"的逆事件是"至多打中 4 环".

**例 11** 若 $A,B,C$ 是三个事件，则

(1) $A$ 发生而 $B$ 与 $C$ 都不发生可以表示为：$A\overline{B}\overline{C}$ 或 $A-B-C$ 或 $A-(B+C)$.

(2) $AB\overline{C}$ 表示 $A$ 与 $B$ 都发生而 $C$ 不发生；

(3) 这三个事件恰有一个发生可以表示为：$A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C$；

(4) 这三个事件至少有一个发生可以表示为：

$A+B+C$ 或 $A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C+\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C}+ABC$.

从上面的讨论可以看到，概率论中事件之间的关系与运算和集合论中集合之间的关系与运算是一致的，为了便于对照，我们列出下面的表格(表 1.2)：

**表 1.2**

| 记号 | 概率论 | 集合论 |
|---|---|---|
| $\Omega$ | 基本事件空间，必然事件 | 空间 |
| $\varnothing$ | 不可能事件 | 空集 |
| $\omega$ | 基本事件 | 元素 |
| $A$ | 事件 | 子集 |
| $\overline{A}$ | $A$ 的对立事件 | $A$ 的余集 |
| $A\subset B$ | 事件 $A$ 发生必然导致事件 $B$ 发生 | $A$ 是 $B$ 的子集 |
| $A=B$ | 事件 $A$ 与事件 $B$ 相等 | $A$ 与 $B$ 相等 |
| $A\cup B$ | 事件 $A$ 与事件 $B$ 至少有一个发生 | $A$ 与 $B$ 的并集 |
| $AB$ | 事件 $A$ 与事件 $B$ 同时发生 | $A$ 与 $B$ 的交集 |
| $A-B$ | 事件 $A$ 发生而事件 $B$ 不发生 | $A$ 与 $B$ 的差集 |
| $AB=\varnothing$ | 事件 $A$ 与事件 $B$ 互不相容 | $A$ 与 $B$ 没有相同的元素 |

事件的运算与集合的运算也完全相似，有下列常用公式

(1) 交换律　$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$.

(2) 结合律　$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

(3) 分配律　$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(4) 德莫根定理　$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

一般地，此定理可推广到有限个事件的情形，即有

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n},$$

$$\overline{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \cdots \cup \overline{A_n}.$$

(5) 幂等律　$A \cup A = A, A \cap A = A$.

关于这些公式的证明与集合论中的证明完全相似，我们略去.

## 习题 1.1

1. 写出下列随机试验的基本事件空间：

(1) 记录一个小班概率期考的平均分数(假如全部有 $n$ 个人)；

(2) 同时投掷三个骰子，记录三颗骰子的点数之和；

(3)10 只产品中有 3 只次品，每次从中取出一只，取后不放回，直到 3 只次品都取出，记录抽取的次数；

(4) 一个小组有 A，B，C，D，E 五个人，要选正副组长各一人(一个人不能兼两个职务)，观察选举结果.

2. 某零件当厚度、直径都合格时才算合格. 设 $A$ 表示"零件的厚度不合格"，$B$ 表示"零件的直径不合格"，$C$ 表示"零件合格"，试研究 $A$ 与 $C$，$B$ 与 $C$，$A$ 与 $\overline{C}$，$B$ 与 $\overline{C}$ 的包含关系及互不相容性.

3. 设 $A,B,C$ 为任意三个事件，试写出下列关于 $A,B,C$ 事件的表达式：(1) 仅仅 $A$ 发生；(2) $A$ 和 $B$ 都不发生，但 $C$ 发生；(3) 至少有一个事件发生；(4) 至少两个事件发生；(5) 仅仅一个事件发生.

4. 一个学生做了 $n$ 道习题，以 $A_i$ 表示第 $i$ 道题做对了这一事件($1 \leqslant i \leqslant n$)，试用 $A_i$ 表示下列事件：(1) 没有一道题做错；(2) 至少有一道题做错；(3) 恰有一道题做错；(4) 至少有两道习题做对.

## §1.2 古典概型

虽然随机事件出现的可能性有大有小，但在前面我们知道在大量重复试验下，每个事件出现的频率却具有稳定性，为此我们引入**概率的统计定义**.

**定义 9** 如果在大量试验中，事件 $A$ 出现的频率趋于一个稳定值 $P(A)$，称数值 $P(A)$ 为事件 $A$ 发生的概率.

现在我们考虑一类特殊的随机试验，它具有下面两个特征：

(1) 所有可能的试验结果只有有限多个，于是基本事件空间 $\Omega$ 可记为 $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$；

(2) 在每次试验中，每一个试验结果出现的可能性是相等的，即 $P(\omega_1) = \cdots = P(\omega_n)$；

称这类随机试验的数学模型为古典概型.

**例 1** 投掷一个骰子，考察出现的点数，所有可能的试验结果只有六个：$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$（$\omega_i$ 表示出现 $i$ 点），且 $P(\omega_1) = \cdots = P(\omega_6) = \dfrac{1}{6}$，故这个随机试验是属于古典概型.

**例 2** 一个民兵打靶，考察打中的环数，所有可能的结果只有十一个："打中 0 环"，"打中 1 环"，……，"打中 10 环". 一般来说，这些结果出现的可能性不完全相等，因此这个随机试验不属于古典概型.

**例 3** 任意掷二枚均匀的硬币所有可能结果为(正，正)，(正，反)，(反，正)，(反，反)，根据硬币的均匀性、对称性，四种结果具有等可能性，这是一个古典概型.

**定义 10** 在古典概型中，若基本事件空间包含 $n$ 个基本事件，而事件 $A$ 包含 $m$ 个基本事件，则定义事件 $A$ 出现的概率为 $P(A) = \dfrac{m}{n}$.

**例 4** 一部四卷的文集，按任意次序放到书架上，为各卷自左向右或自右向左的卷号次序恰为 1，2，3，4 的概率是多少？

**解** 四卷的任意一种安放次序构成一个基本事件，共有 $4!$ 种安放次序，故基本事件空间 $\Omega$ 含有个 $4!$ 基本事件. 各种安放次序是等可能出现的，故 $n = 4!$.

"自左向右或自右向左的次序恰为 1，2，3，4"这一事件由两个基本事件构成，即 $m = 2$. 故所求概率

$$P=\frac{2}{4!}=\frac{1}{12}.$$

**例 5**　门上有两把锁，它们的钥匙是你带在身上的六把不同钥匙中的两把，匆忙中在某处丢了一把，问你仍能开门的概率是多少？

**解**　六把钥匙用数字 $\{1,2,3,4,5,6\}$ 表示，又设门上两把锁的钥匙是 $\{1,2\}$，匆忙中丢了一把，余下 5 把，这相当于从 6 个数字中随机取 5 个数字，余下的 5 把仍能开门，这相当于随机取出 5 个数字中一定要含有 $\{1,2\}$ 两个数字. 于是整个问题转化为：从 $\{1,2,3,4,5,6\}$ 这 6 个数字中任取 5 个数字，求这 5 个数字中一定含有 $\{1,2\}$ 两个数字的概率.

从 6 个数字中随机抽取 5 个，有 $C_6^5$ 种取法，每一种取法构成一个基本事件，各种取法是等可能的.

“从这 6 个数字中任取 5 个，这 5 个数字一定含有 $\{1,2\}$”这一事件由 $C_4^3$ 种取法，故所求的概率

$$P=\frac{C_4^3}{C_6^5}=\frac{2}{3}.$$

**例 6**　袋中有 5 个白球，6 个红球，从中任意抽取 7 个，问恰好抽到 3 个白球的概率是多少？

**解**　这里的随机试验是从 5 个白球 6 个红球中任取 7 个球，每抽取的 7 个球构成一个基本事件，共有 $C_{11}^7$ 个基本事件.

事件 $A$“恰好抽到 3 个白球”，可以按下面的步骤来完成：先从 5 个白球中抽 3 个白球，有 $C_5^3$ 种抽法；再从 6 个红球中抽 4 个红球有 $C_6^4$ 中抽法；于是，事件 $A$ 包含 $C_5^3C_6^4$ 个基本事件，所求概率

$$P=\frac{C_5^3C_6^4}{C_{11}^7}=\frac{5}{11}.$$

**例 7**　把 7 个球随意放入四个盒子，每个球放入任何一个盒子中的机会是相等的，那么第一个盒子恰好包含两个球的概率是多少？

**解**　7 个球随意放入四个盒子：第一个球可以落入四个盒子中的任一个中，有 4 种放球方式；第二个球可以落入四个盒子中的任一个中，有 4 种放球方式…… 因此，共有 $4^7$ 种放球方式. 每一种放球方式构成一个基本事件.

“第一个盒子恰好包含两个球”这一事件可以按下面的步骤来完成：第一步，先从 7 个球中任取 2 个放入第一个盒子，有 $C_7^2$ 种取法；第二步，余下的 5 个随意地放入其余的 3 个盒子中，有 $3^5$ 种放球方式. 于是“第一个盒子恰好包含两个球”的放球方式有 $C_7^2 3^5$ 种，故所求的概率

$$P=\frac{C_7^2 3^5}{4^7}\approx 0.3115.$$

古典概型的概率具有如下性质：

(1) 非负性：对任一事件 $A$，有 $P(A)\geqslant 0$.

(2) 规范性：$P(\Omega)=1$.

(3) 可加性：若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是两两互不相容的，即 $A_i\cdot A_j=\varnothing(i\neq j)$，则

$$P\Big(\sum_{i=1}^{k}A_i\Big)=\sum_{i=1}^{k}P(A_i).$$

**推论** 对古典概型中任意随机事件 $A$，有 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

**证明** $\because A+\overline{A}=\Omega,\quad A\overline{A}=\varnothing,$

$\therefore P(A)+P(\overline{A})=P(A+\overline{A})=P(\Omega)=1.$

故 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

**例 8** 从一副扑克牌(52 张)中任取 4 张，求至少有 3 张黑桃的概率是多少？

**解** 设 $A$ 表示"任取 4 张，至少有 3 张黑桃"这一事件，$B$ 表示"任取 4 张，恰有 3 张黑桃"这一事件，$C$ 表示"任取 4 张全是黑桃"这一事件，则

$$A=B+C,BC=\varnothing,$$

于是 $P(A)=P(B)+P(C)$，易知 $P(B)=\dfrac{C_{13}^3C_{39}^1}{C_{52}^4}$，$P(C)=\dfrac{C_{13}^4}{C_{52}^4}$，故

$$P(A)=\frac{C_{13}^3C_{39}^1+C_{13}^4}{C_{52}^4}=\frac{11869}{270725}.$$

**例 9** 一口袋中装有 6 只乒乓球，其中 4 只是白球，2 只是红球，从袋中接连随机取 2 只球，取后不放回. 求(1) 取到 2 只球颜色相同的概率；(2) 取到的 2 只球至少有一只是白球的概率.

**解** (1) 设 $A$ 表示：取到 2 只球颜色相同，$B$ 表示取到 2 只球全是白色，$C$ 表示取到 2 只球全是红色，则

$$A=B+C,BC=\varnothing$$

于是 $P(A)=P(B)+P(C)$，易知 $P(B)=\dfrac{4\times 3}{6\times 5}=\dfrac{6}{15}$，$P(C)=\dfrac{2\times 1}{6\times 5}=\dfrac{1}{15}$，

故

$$P(A)=\frac{6+1}{15}=\frac{7}{15}.$$

(2) 设 $D$ 表示：取到的 2 只球至少有 1 只是白球，则 $\overline{D}$ 表示取到 2 只球全

是红球,故 $\overline{D}=C$,于是

$$P(D)=1-P(C)=\frac{14}{15}.$$

**例 10**　从 1,2,…,10 共 10 个数字中任取一个,取后放回,先后取出 7 个数字,试求下列各事件的概率:

$A_1$:7 个数字全不相同;

$A_2$:不含 10 和 1;

$A_3$:最后取出的数字是奇数;

$A_4$:10 恰好出现两次;

$A_5$:10 至少出现两次.

**解**　从 10 个数字中任取一个,取后放回,先后取出 7 个数字,共有$10^7$ 种取法,故 $n=10^7$.

(1)"7 个数字全不相同"的取法有 $P_{10}^7$ 种,所以

$$P(A_1)=\frac{P_{10}^7}{10^7}.$$

(2)"7 个数字不含 10 和 1"的取法有 $8^7$ 种,所以

$$P(A_2)=\frac{8^7}{10^7}.$$

(3)"最后取出的数字是奇数"有 5 种取法,而前 6 个数字可任取,有$10^6$ 种取法,故

$$P(A_3)=\frac{5\cdot 10^6}{10^7}=\frac{1}{2}.$$

(4)"10 恰好出现两次"这件事,10 出现在 7 次中的哪两次?有 $C_7^2$ 种选择,其余 5 次,每次只能从 9 个剩下的数字中任取,有 $9^5$ 种取法,故

$$P(A_4)=\frac{9^5C_7^2}{10^7}.$$

(5)一般地,设 $B_k$ 表示"取出的 7 个数字中,10 恰好出现 $k$ 次",则

$$P(B_k)=\frac{9^{7-k}C_7^k}{10^7},\quad k=1,2,\cdots,7.$$

由于 $A_5=B_2+B_3+\cdots+B_7$,且 $B_iB_j=\varnothing,2\leqslant i<j\leqslant 7$.故

$$P(A_5)=\sum_{k=2}^{7}\frac{9^{7-k}C_7^k}{10^7}.$$

## 习题 1.2

1. 在一盒子中装着标号从 1 至 5 的五只徽章,现从中依次一只一只地任