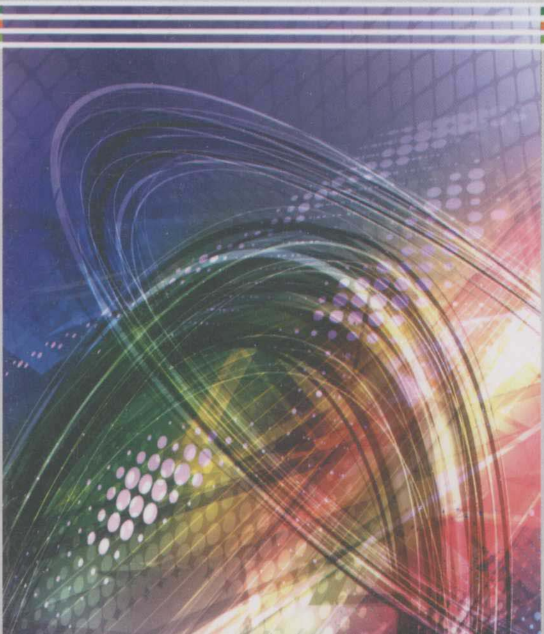
应用型本科院校"十二五"规划教材/数学

主编　王晓春　王丽凤

线性代数学习指导

A Guide to the Study of Linear Algebra

- 适用面广
- 应用性强
- 促进教学
- 面向就业



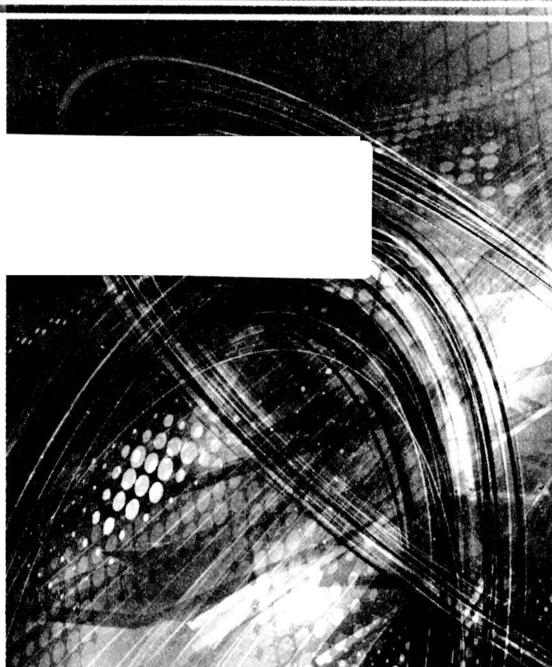
哈爾濱工業大學出版社

应用型本科院校"十二五"规划教材/数学

主　编　王晓春　王丽凤
副主编　汪永娟　段宏博

线性代数学习指导

A Guide to the Study of Linear Algebra



哈爾濱工業大學出版社

内 容 简 介

本书共分5章，包括行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性、矩阵的特征值与二次型。本书内容充实，条理清晰，是学习线性代数的一本较好的参考书。

本书可作为本科各专业学生基础数学课的学习指导书，也可作为科研人员、技术人员的参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习指导/王晓春，王丽凤主编.—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2012.8

应用型本科院校“十二五”规划教材

ISBN 978-7-5603-3703-6

Ⅰ.①线… Ⅱ.①王…②王… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第167407号

策划编辑 赵文斌 杜 燕
责任编辑 李长波
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 黑龙江省委党校印刷厂
开　　本 787mm×1092mm 1/16 印张7.75 字数155千字
版　　次 2012年8月第1版 2012年8月第1次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-3703-6
定　　价 13.80元

序

哈尔滨工业大学出版社策划的《应用型本科院校"十二五"规划教材》即将付梓，诚可贺也。

该系列教材卷帙浩繁，凡百余种，涉及众多学科门类，定位准确，内容新颖，体系完整，实用性强，突出实践能力培养。不仅便于教师教学和学生学习，而且满足就业市场对应用型人才的迫切需求。

应用型本科院校的人才培养目标是面对现代社会生产、建设、管理、服务等一线岗位，培养能直接从事实际工作、解决具体问题、维持工作有效运行的高等应用型人才。应用型本科与研究型本科和高职高专院校在人才培养上有着明显的区别，其培养的人才特征是：①就业导向与社会需求高度吻合；②扎实的理论基础和过硬的实践能力紧密结合；③具备良好的人文素质和科学技术素质；④富于面对职业应用的创新精神。因此，应用型本科院校只有着力培养"进入角色快、业务水平高、动手能力强、综合素质好"的人才，才能在激烈的就业市场竞争中站稳脚跟。

目前国内应用型本科院校所采用的教材往往只是对理论性较强的本科院校教材的简单删减，针对性、应用性不够突出，因材施教的目的难以达到。因此亟须既有一定的理论深度又注重实践能力培养的系列教材，以满足应用型本科院校教学目标、培养方向和办学特色的需要。

哈尔滨工业大学出版社出版的《应用型本科院校"十二五"规划教材》，在选题设计思路上认真贯彻教育部关于培养适应地方、区域经济和社会发展需要的"本科应用型高级专门人才"精神，根据黑龙江省委书记吉炳轩同志提出的关于加强应用型本科院校建设的意见，在应用型本科试点院校成功经验总结的基础上，特邀请黑龙江省9所知名的应用型本科院校的专家、学者联合编写。

本系列教材突出与办学定位、教学目标的一致性和适应性，既严格遵照学科体系的知识构成和教材编写的一般规律，又针对应用型本科人才培养目标

及与之相适应的教学特点，精心设计写作体例，科学安排知识内容，围绕应用讲授理论，做到“基础知识够用、实践技能实用、专业理论管用”。同时注意适当融入新理论、新技术、新工艺、新成果，并且制作了与本书配套的PPT多媒体教学课件，形成立体化教材，供教师参考使用。

《应用型本科院校“十二五”规划教材》的编辑出版，是适应“科教兴国”战略对复合型、应用型人才的需求，是推动相对滞后的应用型本科院校教材建设的一种有益尝试，在应用型创新人才培养方面是一件具有开创意义的工作，为应用型人才的培养提供了及时、可靠、坚实的保证。

希望本系列教材在使用过程中，通过编者、作者和读者的共同努力，厚积薄发、推陈出新、细上加细、精益求精，不断丰富、不断完善、不断创新，力争成为同类教材中的精品。

黑龙江省教育厅厅长

前　言

本书是与郭润喜主编的《线性代数》配合使用的参考书，教材共有 6 章，由于教材中的第 6 章是选学内容，所以本书略过第 6 章的习题，共分为 5 章，每章包括：考试要求；基本内容小结；典型例题与例题分析；测试题；测试题答案。

本书内容充实，条理清晰，是学习概率论与数理统计的一本较好的参考书。

本书依据工科类本科线性代数课程教学基本要求及在编者多年课堂教学实践的基础上编写而成。考虑到工科学生的实际情况，本书行文力求通俗易懂和实用，为了方便学生自学，对于某些比较复杂的证明也给出了详尽的证明。本书例题较多，便于学生自学和备考，在每一章给出许多精典题型并给出了详细的解题过程，每一章最后的测试题及其配套答案，可以有效地检测学生对本章知识的掌握程度，使学生准确地掌握本章的重点和难点。

书中一些公式、概念等在其配套的《线性代数》中已经明确，本书直接引用。本书对于同一类型的计算题给出了一两个题的计算过程以及不同的算法，证明题都给出了证明过程或者提示。为了开阔读者的思路，提高能力，本书附有一些难度较大的复习题，供读者选用。

本书的出版得到了哈尔滨石油学院及数学教研室有关领导和广大同仁的支持，如金宝胜、王学祥、汪永娟负责录入，数学教研室朱志范任主审，在此深表谢意。

由于编者水平有限，书中疏漏及不足之处，敬请读者批评指正。

编　者

2012 年 7 月

目　　录

第 1 章 行列式

1.1 n 阶行列式

1. 基本要求

(1) 理解排列、反序、反序数的概念;

(2) 理解置换,并掌握其性质;

(3) 掌握二、三阶行列式的对角线法则;

(4) 掌握 n 阶行列式的定义.

2. 知识考点概述

(1) 排列.

n 个数码 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列是指由这 n 个数码组成的一个有序组.

n 个数码 $1,2,\cdots,n$ 的全部排列共有 $n!$ 个.

(2) 反序、反序数.

① 定义:在一个排列里,如果较大的数码排在较小的数码前面,就说这两个数码构成了一个反序.一个排列里反序的个数称为这个排列的反序数.

如果一个排列的反序数是偶数,就称这个排列是偶排列,否则称为奇排列.

② 性质:n 个数码 $1,2,\cdots,n$ 的全部排列共有 $n!$ 个,其中奇排列与偶排列各有 $\frac{n!}{2}$ 个.

(3) 置换.

① 定义:将两个 n 阶排列写成 $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$ 的形式就得到一个 n 阶置换.

一个 n 阶置换总是写成 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ 的形式.于是 n 阶置换个数也是 $n!$ 个.

一个置换的上下两个排列的反序数之和是偶数(奇数),则称该置换为偶置换(奇置

换).

② 性质.

性质 1 设对置换 $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$ 的第一行施行对换得到 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$,则 $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$ 的奇偶性与 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ 的奇偶性完全相同.

性质 2 $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ 的奇偶性相同.

性质 3 将一个置换的第一行进行一个对换,而另一行的排列顺序不变,则改变这个置换的奇偶性.

(4) 二、三阶行列式的计算.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

(5)n 阶行列式.

① 定义:将 n^2 个数排列成 n 行 n 列,并加左右两道竖线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

组成一个 n 阶行列式,它是一个代数和.

a. 共有 $n!$ 项.

b. 每一项的构成是由行列式中不同行不同列的元素的乘积,就是 $a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}$.

c. $a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}$ 的符号为$(-1)^\tau$,$\tau=\pi(1\ 2\ \cdots\ n)+\pi(k_1\ k_2\ \cdots\ k_n)$,于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(k_1 k_2 \cdots k_n)} (-1)^\tau a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}$$

②n 阶三角阵.

上三角：$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1\,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2\,n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3\,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n\,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

下三角：$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

或 $D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}$

3. 典型题解

例 1.1　$\begin{vmatrix} k-1 & 2 \\ 2 & k-1 \end{vmatrix} \neq 0$ 的充分必要条件是(　　).

A. $k\neq 1$ 且 $k\neq 3$　B. $k\neq -1$ 且 $k\neq 3$　C. $k\neq 1$ 且 $k\neq -3$　D. $k\neq -1$ 且 $k\neq -3$

分析　先计算行列式的值

$$\begin{vmatrix} k-1 & 2 \\ 2 & k-1 \end{vmatrix} = (k-1)^2 - 2^2 = k^2 - 2k - 3 = (k-3)(k+1) \neq 0$$

所以，$k\neq -1$ 且 $k\neq 3$

答案：B.

例 1.2　判断排列 $n\ (n-1)\ \cdots\ 3\ 2\ 1$ 的奇偶性.

分析　先计算排列的逆序数，逆序数的奇偶性就是该排列的奇偶性，在计算排列的逆序数时，可以从前向后计算每一个元素所构成的逆序数等于这个元素之后比它小的元素个数，也可以从后向前计算每一个元素之前比它大的元素个数，但不能重复计算，一个排列的逆序数等于该排列中每一个元素的逆序数之和.

$$\tau[\,n\ (n-1)\cdots 3\ 2\ 1\,] = (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{1}{2}n(n-1)$$

当 $n=4k$ 或 $n-1=4k$(k 为正整数)，$\frac{1}{2}n(n-1)$ 为偶数，否则 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 为奇数. 所以，当 $n=4k$ 或 $n=4k+1$ 时，原排列为偶排列，当 $n=4k+2$ 或 $n=4k+3$ 时，原排列为奇

排列(k 为正整数).

例 1.3 已知 $\tau(a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n)=k$,则 $\tau(a_na_{n-1}\cdots a_2a_1)=$________.

分析 在排列 $a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n$ 中,若落在 a_1 之前比 a_1 小的元素个数为 k_1,则落在 a_1 之后比 a_1 大的元素个数为 $n-1-k_1$;若落在 a_2 之前比 a_2 小的元素个数为 k_2,则落在 a_2 之后比 a_2 大的元素个数为 $n-2-k_2$…… 若落在 a_{n-1} 之前比 a_{n-1} 小的元素个数为 k_{n-1},则落在 a_{n-1} 之后比 a_{n-1} 大的元素个数为 $1-k_{n-1}$,于是

$$\begin{aligned}\tau(a_na_{n-1}\cdots a_2a_1)=&(n-1-k_1)+(n-2-k_2)+\cdots+(1-k_{n-1})=\\&(n-1)+(n-2)+\cdots 1-(k_1+k_2+\cdots+k_{n-1})=\\&\frac{1}{2}n(n-1)-k\end{aligned}$$

所以,对任何 n 阶排列 $a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n$,有

$$\tau(a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n)+\tau(a_na_{n-1}\cdots a_2a_1)=\frac{1}{2}n(n-1)$$

答案:$\frac{1}{2}n(n-1)-k$.

例 1.4 $D=\begin{vmatrix}0&0&0&1\\0&0&2&0\\0&3&0&0\\4&0&0&0\end{vmatrix}=$________.

分析 这是四阶行列式,不能用对角线法则计算.

由行列式的定义 $D=(-1)^{\tau(4321)}a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}=(-1)^6\times1\times2\times3\times4=24$

答案:24.

例 1.5 一个 n 阶行列式 D 中,如果零元素的个数大于 n^2-n,则 $D=$________.

分析 因为 n 阶行列式中共有 n^2 个元素,如果零元素的个数大于 n^2-n,则非零元素的个数小于 n,因而行列式的任意一项(取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积) 均等于零. 所以 $D=0$.

答案:0.

1.2 n 阶行列式的性质及计算

1. 基本要求

(1) 掌握 n 阶行列式的性质;

(2) 熟练掌握利用性质简化和计算 n 阶行列式.

2. 知识考点概述

n 阶行列式的性质.

性质 1　把行列式 D 的行换成相应的列，就得到 D 的转置行列式，记为 D^{T}，并且有 $D=D^{\mathrm{T}}$.

性质 2　交换一个行列式的两行(或者两列)，行列式改变符号一次.

性质 3　如果一个行列式的两行(列)完全相同，那么这个行列式等于零.

性质 4　把一个行列式的某一行(列)的所有元素同乘以一个数 k，等于这个数 k 乘以行列式.

推论 1　一个行列式的某一行(列)所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

推论 2　如果一个行列式的某一行(列)所有元素都是零，那么这个行列式等于零.

推论 3　如果一个行列式的某两行(列)的对应元素成比例，那么这个行列式等于零.

性质 5　设一个行列式的第 i 行(列)的所有元素都可以表示成两项的和

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

那么 $D=D_1+D_2$，其中

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 6　把一个行列式的某一行(列)的元素乘以同一个数后加到另一行(列)对应的元素上，行列式不变.

注　利用行列式的性质计算 n 阶行列式，主要是将行列式化成三角形行列式计算，这种方法要熟练掌握，它是学习以后各章内容(如:矩阵的初等变换、解线性方程组)的基本功.

3. 典型题解

例 1.6　计算四阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & -4 & 1 & 6 \end{vmatrix}$.

解　利用行列式的性质，将行列式化为上三角行列式计算.

(1) 将第一行的(−3)倍、(−1)倍、2 倍分别加到第 2,3,4 行上去；

(2) 将由第(1)步得到的行列式的第 2 行的$\left(-\dfrac{2}{3}\right)$倍加到第 3 行上去；

(3) 将由第(2)步得到的行列式的第3行的$(-\frac{3}{5})$倍加到第4行上去，即可化为上三角行列式.

$$D=\begin{vmatrix}1&2&-1&2\\0&-6&4&-1\\0&-4&1&1\\0&0&-1&10\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&-1&2\\0&-6&4&-1\\0&0&-\frac{5}{3}&\frac{5}{3}\\0&0&-1&10\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&-1&2\\0&-6&4&-1\\0&0&-\frac{5}{3}&\frac{5}{3}\\0&0&0&9\end{vmatrix}=90$$

例 1.7 若 $D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}$，则 $D_1=\begin{vmatrix}2a_{11}&a_{13}&a_{11}-2a_{12}\\2a_{21}&a_{23}&a_{21}-2a_{22}\\2a_{31}&a_{33}&a_{31}-2a_{32}\end{vmatrix}=(\quad)$

A. 4　　B. -4　　C. 2　　D. -2

分析 将D_1的第1列的$(-\frac{1}{2})$倍加到第3列上去，然后分别提取1，3两列的公因子，再将所得到的行列式的2，3两列互换，得

$$D_1=2\times(-2)\times(-1)\cdot D=4D=2$$

所以答案为C.

例 1.8 计算n阶行列式$D=\begin{vmatrix}a_1-m&a_2&\cdots&a_n\\a_1&a_2-m&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1&a_2&\cdots&a_n-m\end{vmatrix}$.

解 由于各行元素之和均相等，那么将第2，3，…，n列统统加到第1列上去，第1列的n个元素均为$a_1+a_2+\cdots+a_n-m$，然后再将第一行的(-1)倍分别加到其余各行上去，可以化为上三角形行列式.

$$D=\begin{vmatrix}\sum_{i=1}^{n}a_i-m&a_2&\cdots&a_n\\\sum_{i=1}^{n}a_i-m&a_2-m&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\sum_{i=1}^{n}a_i-m&a_2&\cdots&a_n-m\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\sum_{i=1}^{n}a_i-m&a_2&\cdots&a_n\\0&-m&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&-m\end{vmatrix}=$$

$$(\sum_{i=1}^{n}a_i-m)(-m)^{n-1}$$

例 1.9　计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$ $(a_1a_2\cdots a_n\neq 0)$.

解　先将第 1 行的 (-1) 倍加到其余各行上去，然后从第 2 列至第 n 列的适当倍数（第 i 列的 $\frac{a_1}{a_i}$ 倍）统统加到第 1 列上去，即可化为上三角形.

$$D=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix} 1+a_1+\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_1}{a_3}+\cdots+\frac{a_1}{a_n} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}=$$

$$\left(1+a_1+\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_1}{a_3}+\cdots+\frac{a_1}{a_n}\right)a_2a_3\cdots a_n=\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)a_1a_2\cdots a_n$$

例 1.10　若一个 n 阶行列式中所有元素均为 ± 1，问该行列式的值是否为偶数？证明你的结论.

解　以 ± 1（整数）为元素的 n 阶行列式的值是整数. 由行列式的性质，将第 2 行加到第 1 行后其值不变，这时第 1 行的元素只可能是 ± 2 或 0，从而第 1 行有公因子 2，行列式又可以写成 2 与一个元素全为整数的行列式的乘积，因此行列式的值必为偶数.

例 1.11　已知 204，255，527 三个数都是 17 的整数倍，试证下面的三阶行列式也是 17 的整数倍.

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \\ 5 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

证明　将 D 中第 1 列的 100 倍，第 2 列的 10 倍都加到第 3 列上去，其值不变.

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 204 \\ 2 & 5 & 255 \\ 5 & 2 & 527 \end{vmatrix}$$

由于 D 中第 3 列中的元素都是 17 的整数倍，其他元素均为整数，所以 D 是 17 的整数倍.

例 1.12 行列式$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=$________.

分析 将行列式第 2,3,4 列统统加到第 1 列上去,所得到的行列式第一列提取公因子 x,再将第 1 列的 1 倍加到第 2,4 列上去,第 1 列的(—1) 倍加到第 3 列可得

$$D=\begin{vmatrix} x & -1 & 1 & x-1 \\ x & -1 & x+1 & -1 \\ x & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=x^4$$

所以,答案是 x^4.

1.3 子式、余子式与 laplace 定理

1. 基本要求

(1) 掌握子式、余子式的概念;

(2) 掌握 laplace 定理,即行列式的按行(列) 展开;

(3) 掌握 n 阶范德蒙德(Vandermonde) 行列式.

2. 知识考点概述

(1)k 阶子式.

在一个行列式中任意取定 k 行 k 列,位于这些行列相交处的元素所构成的行列式称为行列式的一个 k 阶子式.

(2) 余子式.

划去 $n(n>1)$ 阶行列式的元素 a_{ij} 所在的行和列,所余下 $n-1$ 阶行列式称为 a_{ij} 的余子式,记为 M_{ij}.

记$(-1)^{i+j}M_{ij}=A_{ij}$,称为 a_{ij} 的代数余子式.

(3)laplace 定理.

行列式等于它的任一行(列) 的各元素与其代数余子式乘积之和. 即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad(j=1,2,\cdots,n)$$

定理 行列式的某一行(列) 的元素与另外一行(列) 的代数余子式乘积的和等于零.

(4)n 阶范德蒙德行列式.