数学卷

中国科学技术
经·典·文·库

实用微分几何引论

苏步青　华宣积　忻元龙 著

科学出版社
www.sciencep.com

中国科学技术经典文库·数学卷

实用微分几何引论

苏步青　华宣积　忻元龙　著

科 学 出 版 社

北　京

内 容 简 介

本书以三维空间的向量运算和微分几何为理论基础，以几何学在生产实际中的一些应用为主要内容，论述了微分几何在机械设计和加工、船体的设计和制造等方面的一些应用.

全书共分八章，第一、二、四章是基础知识，系统地介绍了曲线论和曲面论. 第三章等距曲线是为解决凸轮型线设计问题而设的. 第五章论述齿轮啮合问题. 其余三章论述曲线的拟合与设计、曲面的相交与展开、曲面的拟合与设计. 本书的着重点在于数学模型的建立.

本书可供机械制造等方面的工程技术人员以及应用数学工作者参考，也可作为高等院校有关专业的教材.

图书在版编目(CIP)数据

实用微分几何引论/苏步青，华宣积，忻元龙著. —北京：科学出版社，2010

(中国科学技术经典文库·数学卷)

ISBN 978-7-03-028794-6

I. ①实… II. ①苏… ②华… ③忻… III. ①微分几何 IV. ①O186.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 166889 号

责任编辑：杜小扬 王丽平/责任校对：陈玉凤

责任印制：钱玉芬/封面设计：王 浩

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社编务公司排版制作

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

1986年11月第 一 版 开本：B5 (720 × 1000)

2010年8月第二次印刷 印张：14 1/2

字数：285 000

定价：56.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

随着电子计算机的发展和应用, 数学的各个分支为国民经济和社会发展服务的途径越来越宽广. 数学工作者在应用研究和开发研究方面都取得了越来越多的成绩. 为了反映这方面的部分成果, 一九七七年科学出版社出版了主要是由我们编写的《曲线与曲面》一书. 该书出版后, 我们收到许多读者的来信. 在信中, 他们提出了不少宝贵意见, 并且要求适当增加基础理论方面的内容和配备一些习题. 另外, 近几年来我们又接触到一些新的应用领域, 看到了一些应用成果和开发研究成果. 因此, 我们以《曲线与曲面》一书为基础, 重新编写了这本书. 它以几何学在生产实际中的一些应用为主要内容, 以三维空间的向量运算和微分几何学为理论基础. 我们希望本书对工程技术人员能有所帮助; 希望它能为数学工作者从事应用研究提供参考; 也希望它可作为应用数学专业或有关工科大学的微分几何的教材或参考书.

几何学已广泛应用于计算机辅助设计(CAD)和计算机辅助制造(CAM)的许多方面, 并且这种应用将会有更大的发展. 由于我们的实践不多, 书中仅联系了机构设计和加工、船体的设计与制造中的一些应用. 即使在这两方面也是挂一漏万的, 和雨后春笋般的研究成果相比, 仅仅是沧海之一粟. 为了适应更多的读者, 书中的基础内容没有涉及三维空间解析几何和微分几何以外的各种几何学, 这无疑地也限制了我们的论述范围.

本书不要求读者有很多的预备知识. 学过空间解析几何、数学分析、高等代数或高等数学的读者, 都可能顺利地阅读. 有些章节的后面还附上习题, 帮助读者消化正文的有关内容. 第1章、第2章和第4章是基础知识, 系统地介绍了向量、曲线论和曲面论. 其余各章除第6章与第8章有密切联系外, 彼此是独立的, 不一定按次序阅读.

书中没有包含上机计算的程序. 这主要是因为我们的着重点在于如何归结数学模型, 在于“几何学”与“机构运动学”以及造船工艺等的一些联系, 而不是程序的编制. 另一个原因是目前的计算机的型号和所用的语言多种多样, 我们的程序对读者未必有多少用处.

我们对科学出版社长期的热情的支持和帮助表示感谢, 对曾向我们提出过宝贵意见的同事和读者表示感谢.

由于我们水平有限, 书中错误之处在所难免. 请读者以及各方面的专家批评指正.

作　者

1984年5月

目　　录

第1章　向　　量

1.1　向量的概念

我们经常碰到的量有两种. 一种叫数量(或标量), 例如时间、距离、体积、温度等等. 这种量在取定量度单位以后, 就可以用数值的大小完全表示出来. 另一种量, 例如力、速度、位移等等, 除了用一定的量度单位的数值表示它们的大小以外, 还必须指明它们的方向, 才能完全表示出来. 这种既有大小又有方向的量叫做向量(或矢量).

向量可以用有向线段(规定了起点和终点的直线段)来表示. 如图1-1所示, 从O点到A 点的有向线段OA 的长度表示向量的大小, 而它的指向表示向量的方向. 本书中用附有箭头的$\overrightarrow{OA}$ 或用斜黑体字母$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 表示向量. 用$\overrightarrow{OA}$ 表示向量时, O 就是它的起点, A 是它的终点.

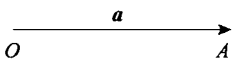


图1-1

如果所讨论的向量只依赖于它的大小和方向而与向量的起点无关, 那么它称为自由向量. 本书中如无特别声明, 向量都指自由向量.

在三维欧氏空间中, 建立右手直角坐标系$\{O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$, 其中O 表示坐标原点, $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 表示沿着三个坐标轴正向的单位向量. 这样, 任何向量$\boldsymbol{r}$ 可以写成

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} = (x, y, z),$$

其中x, y, z 分别称为向量沿X 轴, Y 轴, Z 轴的分量. 向量$\boldsymbol{r}$ 的长度定义为

$$|\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

零向量为

$$\boldsymbol{0} = 0\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k} = (0, 0, 0).$$

当两个向量的分量分别相等时, 我们说, 它们相等.

1.2 向量的代数运算

设λ 为实数, $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$, 则λ 与$\boldsymbol{r}$ 之积定义为

$$\lambda\boldsymbol{r}=(\lambda x,\lambda y,\lambda z). \tag{2.1}$$

若$|\boldsymbol{r}|\neq 0$, 则$\boldsymbol{r}/|\boldsymbol{r}|$是和$\boldsymbol{r}$方向相同的单位向量, 它的分量称为向量$\boldsymbol{r}$ 的方向余弦.

若$\boldsymbol{r}_i=(x_i,y_i,z_i)(i=1,2)$ 为两个向量, 则它们的和定义为

$$\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2), \tag{2.2}$$

而它们的内积(数量积)则为

$$\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2. \tag{2.3}$$

向量$\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2$ 平行的一个充要条件是它们线性相关, 即存在着不同时为零的实数λ_1,λ_2, 使$\lambda_1\boldsymbol{r}_1+\lambda_2\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{0}$.

若记非零向量$\boldsymbol{r}_1$ 与$\boldsymbol{r}_2$ 之间的角为$\theta, 0\leqslant\theta\leqslant\pi$, 则

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1|\cdot|\boldsymbol{r}_2|}. \tag{2.4}$$

因此, $\boldsymbol{r}_1$ 垂直于$\boldsymbol{r}_2$ 的充要条件是它们的数量积$\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2=0$. 若$\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}$, (2.3)式化为

$$\boldsymbol{r}^2=x^2+y^2+z^2=|\boldsymbol{r}|^2,$$

故

$$\sqrt{\boldsymbol{r}^2}=|\boldsymbol{r}|.$$

设$\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2$ 为不平行的两个向量, 其间的角为θ , 而且$\boldsymbol{e}$ 为与$\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2$ 同时垂直的单位向量, 而且$\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{e}$ 按这个次序构成右手系, 那么向量$\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2$ 的向量积(或称外积)定义为

$$\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2=(|\boldsymbol{r}_1|\,|\boldsymbol{r}_2|\sin\theta)\,\boldsymbol{e}=\begin{vmatrix} y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix} z_1 & x_1\\ z_2 & x_2\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}. \tag{2.5}$$

因此, $\boldsymbol{r}_1$ 与$\boldsymbol{r}_2$ 平行的另一个充要条件为$\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{0}$.

上面的这些运算之间还满足下面的规律. 若λ,μ 表示实数, $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3$ 表示向量, 则下列式子成立

1) 结合律:

$$\lambda(\mu\boldsymbol{r}_1)=(\lambda\mu)\boldsymbol{r}_1,$$

$$(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2)+\boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{r}_1+(\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3),$$

$$(\lambda\boldsymbol{r}_1)\cdot\boldsymbol{r}_2=\lambda(\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2),$$

$$(\lambda\boldsymbol{r}_1)\times\boldsymbol{r}_2=\lambda(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2);$$

2) 交换律:

$$\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_1,$$

$$\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_1;$$

3) 分配律:

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{r}_1=\lambda\boldsymbol{r}_1+\mu\boldsymbol{r}_2,$$

$$\lambda(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2)=\lambda\boldsymbol{r}_1+\lambda\boldsymbol{r}_2,$$

$$\boldsymbol{r}_1\cdot(\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3)=\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_3,$$

$$\boldsymbol{r}_1\times(\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3)=\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_3;$$

此外, 向量积还满足

$$\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2=-\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_1.$$

三个向量$\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3$ 的混合积是

$$(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3)=(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\cdot\boldsymbol{r}_3=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}, \tag{2.6}$$

它的绝对值表示以$\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3$ 为棱的平行六面体的体积. 因此, $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3$ 共面(即平行于同一平面)的充要条件是

$$(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3)=0.$$

它们成右手系的充要条件是

$$(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3)>0.$$

关于向量的内积和向量积, 下面的Lagrange恒等式成立

$$(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\cdot(\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_4)=(\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_3)(\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_4)-(\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_4)(\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_3). \tag{2.7}$$

关于三个向量的双重向量积, 下面的公式成立:

$$(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\times\boldsymbol{r}_3=(\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_3)\boldsymbol{r}_2-(\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_3)\cdot\boldsymbol{r}_1. \tag{2.8}$$

在这两个公式中, 如果已经证明其一, 则可导出另一个. 此外, 两个公式都是可直接从它们的分量表示形式加以验证的.

在本节结束之前, 举出两个应用的例子.

例1 组合机床是一种通用部件和专用部件组成的、工序集中的高效率机床. 它一般采用多轴、多刀、多工序、多面、多工位等操作同时进行加工. 在组合机床中, 动力部件是通过主轴箱和被加工的零件发生关系的. 主轴箱通过齿轮结构把驱动轴的转动传递到各主轴(工作轴)去. 精确地计算出各传动轴位置的坐标是非常重要的. 在主轴箱的坐标计算中反复遇到的问题是这样的:

已知两点$Q_1(x_1,y_1)$, $Q_2(x_2,y_2)$ 和它们到另一点Q 的距离 $p_1=|QQ_1|$, $p_2=|QQ_2|$, 求Q 点的坐标.

解 如图1-2所示, 向量

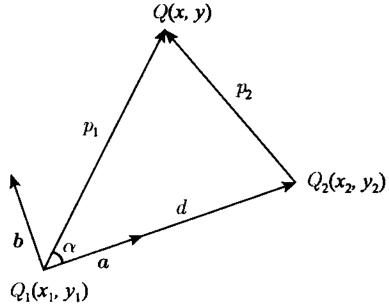


图1-2

$$\overrightarrow{Q_1Q_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1).$$

它的单位向量是

$$\boldsymbol{a}=\left(\frac{x_2-x_1}{d},\frac{y_2-y_1}{d}\right),$$

其中

$$d=\left|\overrightarrow{Q_1Q_2}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

设$\boldsymbol{b}$ 是$\boldsymbol{a}$ 逆时针转动90° 后所得到的向量, 那么

$$\boldsymbol{b}=\left(-\frac{y_2-y_1}{d},\frac{x_2-x_1}{d}\right).$$

我们可把向量$\overrightarrow{Q_1Q}$ 关于$\boldsymbol{a}$ 和$\boldsymbol{b}$ 进行分解:

$$\overrightarrow{Q_1Q}=p_1(\boldsymbol{a}\cos\alpha+\boldsymbol{b}\sin\alpha),$$

其中α 表示从$\overrightarrow{Q_1Q_2}$ 到$\overrightarrow{Q_1Q}$ 的转角.

可是$\overrightarrow{Q_1Q}=(x-x_1,y-y_1)$, 而且

$$\boldsymbol{a}\cos\alpha+\boldsymbol{b}\sin\alpha=\cos\alpha\left(\frac{x_2-x_1}{d},\frac{y_2-y_1}{d}\right)+\sin\alpha\left(-\frac{y_2-y_1}{d},\frac{x_2-x_1}{d}\right),$$

所以, 从上面的分解式得出

$$x = x_1 + \frac{p_1}{d}\left[(x_2 - x_1)\cos\alpha - (y_2 - y_1)\sin\alpha\right],$$
$$y = y_1 + \frac{p_1}{d}\left[(y_2 - y_1)\cos\alpha + (x_2 - x_1)\sin\alpha\right].$$

我们只要求出$\cos\alpha$ 和$\sin\alpha$ 就可获得Q 点的坐标. 根据余弦定理得知

$$\cos\alpha = \frac{p_1^2 + d^2 - p_2^2}{2p_1 d},$$

于是

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{p_1^2 + d^2 - p_2^2}{2p_1 d}\right)^2}.$$

由于$\sin\alpha$ 一般有两个数值, 分别对应于$\overrightarrow{Q_1Q_2}$, 旋转到$\overrightarrow{Q_1Q}$ 时的方向是逆时针或顺时针, 所以有两个Q 点符合题目的要求.

这个例题在数学上是很简单的向量运算, 但是在复杂的实际问题中归结出这样的数学问题可绝不是轻而易举的事情.

例2 利用向量的运算可以推导球面三角学里的公式. 取单位球, 过球中心O 的平面与球面的交线称为大圆. 以大圆为边的三角形叫做球面三角形. 以A, B, C 代表它的三个顶点, 其对应的对边用α, β, γ 表示(图1-3). 而A, B, C 点位置向量用$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 表示. A 角, B 角, C 角, α, β, γ 间的关系就是球面三角学中的重要公式. 假定A, B, C, α, β, γ 都小于π , 我们可以证明下列球面三角的余弦定理

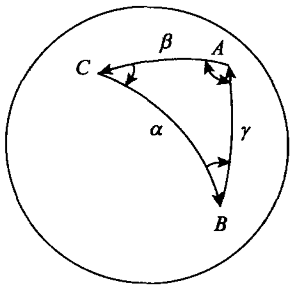


图1-3

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A,$$
$$\cos\beta = \cos\gamma\cos\alpha + \sin\lambda\sin\alpha\cos B,$$
$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos C.$$

这里, 我们只证明其中第一式, 其余式子的证明是完全类似的. 由Lagrange恒等式

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}),$$

得

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}),$$

由于

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\cos\beta,\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=\cos\gamma,\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\cos\alpha,$$

又因为向量$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$ 的长度各为$\sin\gamma,\sin\beta$, 它们的夹角就是$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 所构成的平面与$\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}$ 所构成平面的夹角, 即A 角, 所以$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})=\sin\beta\sin\gamma\cos A$, 因此有

$$\sin\beta\sin\gamma\cos A=\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma,$$

这就是第一式.

习 题

1. 说明定义两个向量夹角的公式(2.4)是有意义的.
2. 直接证明Lagrange恒等式(2.7).
3. 利用公式(2.7)证明公式(2.8).
4. 利用公式(2.8)证明公式(2.7).
5. 证明

$$(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\cdot[(\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3)\times(\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_1)]=(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3)^2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_1 & \boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2 & \boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_3\\ \boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_1 & \boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_2 & \boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_3\\ \boldsymbol{r}_3\cdot\boldsymbol{r}_1 & \boldsymbol{r}_3\cdot\boldsymbol{r}_2 & \boldsymbol{r}_3\cdot\boldsymbol{r}_3\end{vmatrix}.$$

6. 证明

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\times(\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_4)\\&=(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_3,\boldsymbol{r}_4)\boldsymbol{r}_2-(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3,\boldsymbol{r}_4)\boldsymbol{r}_1\\&=(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_4)\boldsymbol{r}_3-(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3)\boldsymbol{r}_4.\end{aligned}$$

7. 证明球面三角中的正弦定理

$$\frac{\sin\alpha}{\sin A}=\frac{\sin\beta}{\sin B}=\frac{\sin\gamma}{\sin C},$$

其中记号参看图1-3.

8. 证明

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_4,\boldsymbol{r}_5\times\boldsymbol{r}_6)\\=&(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_4)(\boldsymbol{r}_3,\boldsymbol{r}_5,\boldsymbol{r}_6)-(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3)(\boldsymbol{r}_4,\boldsymbol{r}_5,\boldsymbol{r}_6).\end{aligned}$$

9. 化简

$$(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3,\boldsymbol{r}_3+\boldsymbol{r}_1).$$

10. 证明

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\cdot(\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_4)+(\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3)\cdot(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_4)\\&+(\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_1)\cdot(\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_4)=0.\end{aligned}$$

1.3 向量函数与曲线的参数表示

若对应于$a \leqslant t \leqslant b$ 中的每一个t 值, 有一个确定的向量$\boldsymbol{r}$, 则$\boldsymbol{r}$ 称为t 的一个向量函数, 记为$\boldsymbol{r}(t)$. 显然向量函数$\boldsymbol{r}(t)$ 的三个分量都是t 的函数, 即

$$\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t)),a \leqslant t \leqslant b.$$

关于函数的极限以及连续的概念都可容易推广到向量函数. 设$\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t)),\boldsymbol{r}_0=(x_0,y_0,z_0)$, 如果下式成立

$$\lim_{t\to t_0} x(t)=x_0,\lim_{t\to t_0} y(t)=y_0,\lim_{t\to t_0} z(t)=z_0,$$

我们说, 当t 趋向于t_0 时, $\boldsymbol{r}(t)$ 趋向于极限$\boldsymbol{r}_0$, 记为

$$\lim_{t\to t_0} r(t)=\boldsymbol{r}_0,$$

不难证明上式等价于

$$\lim_{t\to t_0}|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{r}_0|=0.$$

容易证明极限运算具有如下的性质:

$$\lim_{t\to t_0}\lambda(t)\boldsymbol{r}(t)=\lim_{t\to t_0}\lambda(t)\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t),$$

$$\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{r}_1(t)+\boldsymbol{r}_2(t)]=\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_1(t)+\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_2(t),$$

$$\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{r}_1(t)\cdot\boldsymbol{r}_2(t)]=\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_1(t)\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_2(t),$$

$$\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{r}_1(t)\times\boldsymbol{r}_2(t)]=\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_1(t)\times\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_2(t),$$

其中$\lambda(t)$ 为一个在$[a,b]$ 中定义的数量函数.

类似地, 向量函数$\boldsymbol{r}(t)$ 的连续性被定义为它的分量函数的连续性. 具体地说, 如果$x(t),y(t),z(t)$ 关于t 具有直到k 阶的连续导函数, 我们就称向量函数$\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ 为c^k 阶向量函数. 特别当$x(t),y(t),z(t)$ 是t 的连续函数时, 称$\boldsymbol{r}(t)$ 是连续向量函数.

类似地, 可以定义多个自变量的向量函数.

如果把向量函数$\boldsymbol{r}(t)$ 看成空间一点P 的位置向量, $\boldsymbol{r}(t)=\overrightarrow{OP}$, 则t 在闭区间$[a,b]$ 里变动时, P 的轨迹一般是一条曲线Γ (图1-4). 这时, 方程$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t),a\leqslant t\leqslant b$, 称为曲线$\Gamma$ 的参数方程.

在解析几何课程里, 我们知道一条过P_0 点而以$\boldsymbol{v}$ 为方向的直线有下列方程:

$$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0=t\boldsymbol{v},$$

其中$\boldsymbol{r}_0=\overrightarrow{OP_0}$，$t$ 是实数. 又例如在xy 平面上，圆的参数方程可以写成

$$\boldsymbol{r}=a(\cos\theta\boldsymbol{i}+\sin\theta\boldsymbol{j}),\quad 0\leqslant\theta<2\pi,$$

它是以坐标原点为圆心，a 为半径的圆.

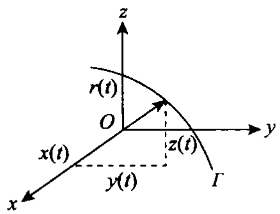


图1-4

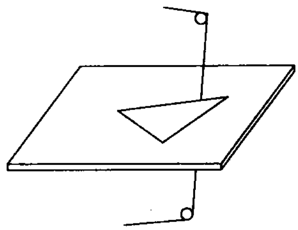


图1-5

直线和圆弧是最简单的曲线，但也是最有用的曲线，很多复杂的曲线都可以用许多直线段或圆弧段来近似地表示它们的形状(称为曲线的拟合，本书后面专门有一章讨论这个问题)，所以有一种专门加工直线和圆弧的数字程序控制线切割机床. 我们取一个实例来作概要的描述.

例3 数字程序控制线切割机床是一种新技术，切割曲线的精密度很高，它是用电子计算机控制切割(曲线)的. 在切割时，把工件固定在机床的十字型拖板上，利用钼丝和工件间加接高频电源产生的高频脉冲，使钼丝对金属起腐蚀作用，以达到切割的目的(图1-5). 十字型拖板由纵板和横板组成，它们由步进马达带动. 步进马达每走一步，拖板就移动一μ 米(即一微米，千分之一毫米)，钼丝也切割一μ 米. 计算机就是通过步进马达控制纵横拖板的进退，使钼丝切割出规定的直线和圆弧的.

设加工的圆弧是以原点为圆心、半径为R 的圆周的一部分，它落在第 I 象限内(横纵拖板分别取为x 轴和y 轴). 因为拖板只能在纵横两个方向运动，实际上加工得到的是一条与圆弧十分近似的折线(图1-6).

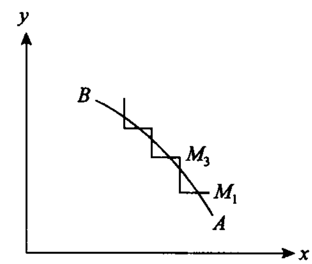


图1-6

线切割机床采用逐点比较法控制钼丝对加工点的位置. 拖板每移动一步，就比较一下加工点M 和圆的位置关系，判断M 点在圆内还是在圆外. 如果M 在圆外，

则移动横拖板使加工点向x 轴的负方向移动; 如果M 点在圆内, 则移动纵拖板让加工点向y 轴的正方向移动.

如何判断M 点在圆内还是在圆外呢? 这就要用到圆的方程. 以原点为圆心, R 为半径的圆的方程是

$$x^2+y^2=R^2.$$

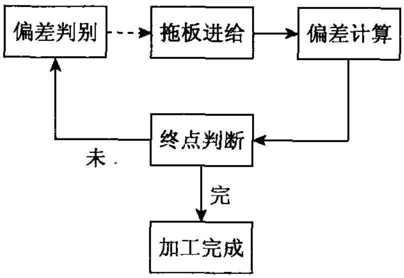
如果$M(x,y)$ 在圆内, 它的坐标必须满足

$$x^2+y^2<R^2.$$

如果$M(x,y)$ 在圆外, 它的坐标必须满足

$$x^2+y^2>R^2.$$

记$F=x^2+y^2-R^2$, 它表示加工点M 到原点的距离的平方减去圆弧半径的平方, F 的数值表示M 点对圆的偏差. 电子计算机控制拖板每走一步都要经过四个过程, 用框图表示如下:



另外, 谈一谈直线的加工. 因为把加工起点取作为坐标原点, 所以可把加工点和原点的连线斜率同规定直线的斜率进行比较. 设规定直线的终点的坐标是(x_e,y_e), 那么, 它的斜率是$\dfrac{y_e}{x_e}$, 而加工点$M(x,y)$ 和原点连线的斜率是$\dfrac{y}{x}$, 这两斜率的差值是

$$\frac{y}{x}-\frac{y_e}{x_e}=\frac{yx_e-xy_e}{xx_e}.$$

因为加工点始终和(x_e,y_e) 在同一象限里, $xx_e>0$, 所以

$$\bar{F}=yx_e-xy_e$$

和上面的斜率差值同符号. 因此实际加工时, 是用$\bar{F}$ 作为偏差进行逐点比较的. 这样, 只要求电子计算机能做加、减和乘的运算就行了. 电子计算机控制拖板的过程, 完全和加工圆弧时一样.

1.4 向量函数的微分、曲线的切线

设$\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ 是定义在闭区间$[a,b]$ 上的向量函数, $t_0\in[a,b]$. 如果极限

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t} \tag{4.1}$$

存在, 那么称$\boldsymbol{r}(t)$ 在t_0 是可微的, 这个极限就称为$\boldsymbol{r}(t)$ 在t_0 的导向量, 记为$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)_{t_0}$ 或$\boldsymbol{r}'(t_0)$, 即

$$\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)_{t_0}=\boldsymbol{r}'(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t}.$$

从极限的定义出发, 容易证明下式成立:

$$\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)_{t_0}=\boldsymbol{r}'(t_0)=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)), \tag{4.2}$$

式中$x'(t_0)=\left[\frac{dx(t)}{dt}\right]_{t=t_0}$, 等等.

如果$\boldsymbol{r}(t)$ 对$[a,b]$ 中每一个t 值都是可微的, 那么它称为在$[a,b]$ 上是可微的.

设λ 是t 的数量函数, 而且$\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3$ 都是t 的向量函数. 如果它们都是可微的, 那么下列公式的验证是容易的:

$$(\lambda\boldsymbol{r})'=\lambda'\boldsymbol{r}+\lambda\boldsymbol{r}', \tag{4.3}$$

$$(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2)'=\boldsymbol{r}_1'+\boldsymbol{r}_2', \tag{4.4}$$

$$(\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2)'=\boldsymbol{r}_1'\cdot\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2', \tag{4.5}$$

$$(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)'=\boldsymbol{r}_1'\times\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2', \tag{4.6}$$

$$(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3)'=(\boldsymbol{r}_1',\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3)+(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2',\boldsymbol{r}_3)+(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3') \tag{4.7}$$

式中的撇“′”表示关于t 的导数.

导向量有重要的几何意义. 设C 为对应于连续向量函数$\boldsymbol{r}(t)$ 的连续曲线, P_0 为C 上一个定点, 它对应的参数为t_0 (图1-7). 又设P 为C 上在P_0 邻近的一点. 当P 点沿曲线C 趋向于P_0 时, 曲线的弦P_0P 有极限位置, 则这个极限位置称为曲线C 在P_0 点的切线. 如果P 点的对应参数为$t_0+\Delta t$, 那么向量

$$\overrightarrow{P_0P}=\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)$$

为P_0P 弦上的一个向量. 当Δt 趋于零, 即当P 点趋于P_0 点时, $\overrightarrow{P_0P}$ 也趋于零. 同时向量

$$\frac{\overrightarrow{P_0P}}{\Delta t}=\frac{\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t}$$

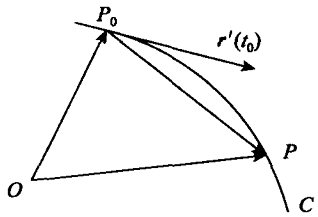


图1-7

也是P_0P 弦上的一个向量, 而且当Δt 趋于零时, 它的极限如果不是零向量, 就可以代表C 在P_0 点的切线方向. 由此可见, 如果$\boldsymbol{r}'(t_0)\neq 0$, 曲线$C$ 在P_0 点的切线一定存在, 这个向量就是切线上的一个非零向量. 对曲线C , 如果选取了它的一种参数表示, 也就自然地定义了曲线C 的正向为参数增加的方向. 这样, 由于$\boldsymbol{r}'(t_0)$ 的方向是$\overrightarrow{P_0P}$ 方向的极限而恰好表示了曲线C 的正向. 具有正向的曲线称为有向曲线.

和普通函数的微分一样, 向量函数的微分定义为

$$d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'(t)dt=(dx(t),dy(t),dz(t)).$$

对于复合函数

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t),t=\phi(u),$$

则有

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{du}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\frac{dt}{du}=\boldsymbol{r}'(t)\phi'(u). \tag{4.8}$$

对多自变量的向量函数也可引进偏导向量的概念. 例如,

$$\boldsymbol{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)),$$

则有

$$\boldsymbol{r}_u=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}=(x_u,y_u,z_u),$$
$$\boldsymbol{r}_v=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}=(x_v,y_v,z_v),$$

这里

$$x_u=\frac{\partial x}{\partial u},y_u=\frac{\partial y}{\partial u},z_u=\frac{\partial z}{\partial u},$$
$$x_v=\frac{\partial x}{\partial v},y_v=\frac{\partial y}{\partial v},z_v=\frac{\partial z}{\partial v}.$$

对于复合向量函数$\boldsymbol{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$, $u=u(\bar{u},\bar{v}),v=v(\bar{u},\bar{v})$, 则成立链式法则:

$$\boldsymbol{r}_{\bar{u}}=\boldsymbol{r}_u\frac{\partial u}{\partial\bar{u}}+\boldsymbol{r}_v\frac{\partial v}{\partial\bar{u}},$$
$$\boldsymbol{r}_{\bar{v}}=\boldsymbol{r}_u\frac{\partial u}{\partial\bar{v}}+\boldsymbol{r}_v\frac{\partial v}{\partial\bar{v}}.$$