众创精品

普通高等教育规划教材
PUTONG GAODENG JIAOYU GUIHUA JIAOCAI

[高等数学]

GAODENG SHUXUE

上

◆主编 周文龙 裴东林

北京邮电大学出版社
http://www.buptpress.com

普通高等教育规划教材
PUTONG GAODENG JIAOYU GUIHUA JIAOCAI

[高等数学]

GAODENG SHUXUE

上

主　编　周文龙 裴东林

副主编　赵大一　张士军　李中恢

北京邮电大学出版社

·北　京·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(上)/周文龙，裴东林主编. —北京：北京邮电大学出版社，2009.12

ISBN 978-7-5635-2198-2

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①周… ②裴… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第223882号

书　　名	高等数学(上)
主　　编	周文龙　裴东林
责任编辑	李　欣
出版发行	北京邮电大学出版社
社　　址	北京市海淀区西土城路10号　邮编　100876
经　　销	全国各地新华书店
印　　刷	北京市彩虹印刷有限责任公司
开　　本	787 mm×1092 mm　1/16
印　　张	13.75
字　　数	352千字
版　　次	2009年12月第1版　2009年12月第1次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5635-2198-2
定　　价	26.00元

如有印刷问题请与北京邮电大学出版社联系　电话:(010)82551166　(010)62283578

E-mail:publish@bupt.edu.cn　Http://www.buptpress.com

前言

为了顺应高等院校教育普及化迅速发展的趋势，配合高等院校的教学改革和教材建设，坚持“因材施教”的教学原则，注重理论联系实际，全面促进高等院校教材建设，进一步提高我国高校教材的质量，我们特组织一些一线教师编写了本教材，教材以“应用、实用、适用”为基本原则，淡化理论、注重实践、内容体系更趋合理，尽量体现新知识、新技术、新方法和新材料，注重技术与应用的结合，以利于学生综合素质的形成和科学思维方法与创新能力的培养。本书分为上下册，上册主要包括一元函数及其极限与连续、导数与微分、微分学的应用、不定积分、定积分及其应用等内容，下册主要包括向量代数与空间解析几何初步、多元函数与微分学、二元函数及多元函数积分学、无穷级数和常微分方程等内容。

高等数学是研究客观世界数量关系和空间形式的一门科学，它是借助极限理论，解决微分和积分问题，从而研究变化现象的，变化现象大小与动因有关，而动因或者只有一个，或者不止一个，前者我们用一元函数表示，后者我们用多元函数表示，于是就涉及到它们的相关运算，因此，高等数学不仅可以作为一种工具，而且可作为一种思维模式；不仅可以理解为一种知识、一门科学，而且可以理解为一种素养、一种文化。再者，高等数学课程是高等院校学生必修的重要理论基础课程之一，它是一门非常重要的基础课，它内容丰富，理论严谨，应用广泛，影响深远，不仅为学习后继课程和进一步扩大数学知识面奠定必要的基础，而且在培养学生抽象思维、逻辑推理能力，综合利用所学知识分析问题解决问题的能力，较强的自主学习的能力，创新意识和创新能力上都具有非常重要的作用。

高等数学教育在培养高素质科技人才中具有其独特的、不可替代的作用，为适应新形势、新目标下对数学的要求，更好地为后续课程提供必要的基础理论和知识准备，进一步为培养学生的创新意识和创新能力服务，从中体现“强化基础，突出实践，重在素质”。本套教材在编写上具有以下特点：

1. 把概念和定理的引出、建立与证明尽可能处理成一个“发现”的过程。这种处理方法将有利于学生创新意识和能力的培养。使学生熟练掌握高等数

学的基本知识和基本运算技巧，为主干课程及延伸课程的学习提供必需的数学基础知识，为学生分析和解决实际问题提供必要而有效的数学方法。

2. “数学源于物理”不很准确，却也是事实，本书不但强调它们在数学上的作用，同时也阐述了它们在物理或几何上的解释。这样做能使非数学专业的理工科学生认识到数学作为一种自然科学语言时所具有的精确描述能力，从而激发学习数学的兴趣。

3. 本书在阐述上，力求通俗地解释概念、简洁地概括方法，使学生易于掌握，从而逐步培养学生具有一定的抽象概括问题的能力，一定的逻辑推理能力，比较熟练的运算能力，综合分析并解决实际问题的能力，严谨处理问题的能力等。

本书在编写过程中，参考了大量同类图书，有些典型例题和示例，是各位老师教学经验的成果，在本书中我们用来参考，在这里我们不一一联系老师致谢，而采用编委中体现其姓名，以示敬意。

由于编者水平有限，成书仓促，请有关专家、学者及使用本书的老师、同学和读者批评指正。同时在本书编写过程中我们进行了探索与尝试，难免会存在问题与不足，诚恳地欢迎广大师生提出意见和建议，帮助我们不断改进。

编　者

目录

第1章　函数、极限与连续

第2章　导数与微分

第3章　微分中值定理与导数的应用

目录

第4章 不定积分

第5章 定积分及其应用

第1章 函数、极限与连续

微积分是一门以变量作为研究对象、以极限方法作为基本研究手段的数学学科. 应用极限方法研究各类变化率问题和几何学中曲线的切线问题,就产生了微分学;应用极限方法研究诸如曲边图形的面积等这类涉及到微小量无穷积累的问题,就产生了积分学. 可以说,整个微积分学是建立在极限理论的基础之上的.

在本章我们将在复习映射与函数等初等数学内容的基础上,介绍极限的概念、性质和运算法则;介绍与极限概念密切相关、且在微积分运算中扮演重要角色的无穷小量;我们还将求得两个应用非常广泛的重要极限. 学好这些内容,准确理解极限概念,熟练掌握极限运算方法,是学好微积分的基础.

本章的最后部分将通过极限引入函数的一类重要性质——连续性,连续性是对客观世界广泛存在的连续变动现象的数学描述. 由于连续函数具有良好的性质,不论在理论上还是在应用中都十分重要,故本课程主要讨论连续函数.

第一节 映射与函数

一、区间和邻域

在微积分中最常用的一类实数集是区间. 设 a 和 b 都是实数且 $a<b$,实数集 $\{x|a<x<b\}$ 称为开区间并记作 (a,b),即

$$(a,b)=\{x|a<x<b\}.$$

a 和 b 称为区间的端点,它们均不属于 (a,b). 类似地可定义以 a、b 为端点的闭区间、半开

区间等. 它们的记号和定义如下所列：

闭区间 $[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$，

半开区间 $[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$，$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$.

以上这些区间都称为有限区间（或有界区间），它们都可以用数轴上长度有限的线段来表示，如图 1－1 (a)、(b) 分别表示闭区间 $[a,b]$ 与开区间 (a,b). 此外还有无限区间（或无穷区间），引进记号 $+\infty$（读作正无穷大）及 $-\infty$（读作负无穷大）后，则可用类似的记号表示无限区间，例如：

$$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\},(-\infty,b)=\{x|x<b\}.$$

$$(-\infty,+\infty)=\{x|x\in\mathbf{R}\}.$$

前两个无限区间在数轴上的表示如图 1－1 (c)、(d) 所示.

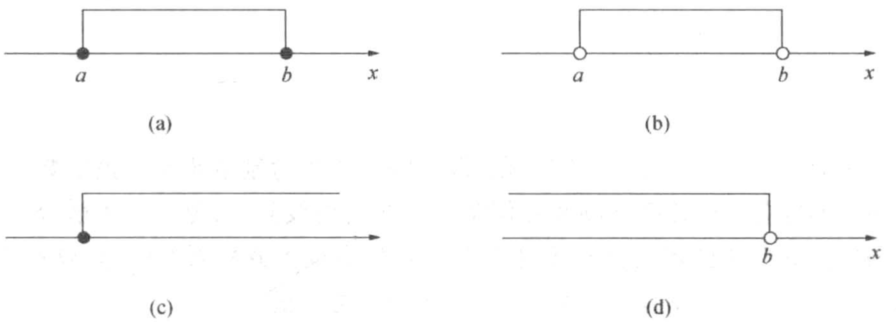

图 1－1

邻域是一种常用的集合. 设 a、δ 是实数且 $\delta>0$，则定义点 a 的 δ 邻域（记作 $U(a,\delta)$）为下列集合：

$$U(a,\delta)=\{x|\ |x-a|<\delta\},$$

或写作

$$U(a,\delta)=\{x|\ a-\delta<x<a+\delta\},$$

可见 $U(a,\delta)$ 就是开区间 $(a-\delta,a+\delta)$. 点 a 叫做邻域的中心，δ 叫做邻域的半径（图 1－2）. 如果把邻域的中心去掉，所得到的集合称为点 a 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x|\ 0<|x-a|<\delta\}.$$

为了方便，有时把开区间 $(a-\delta,a)$ 称为 a 的左 δ 邻域，把开区间 $(a,a+\delta)$ 称为 a 的右 δ 邻域.

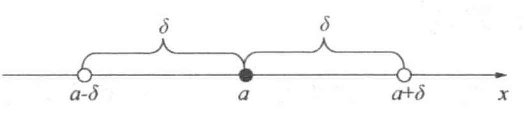

图 1－2

两个闭区间的直积表示 xOy 平面上的矩形区域,例如:

$$[a,b]\times[c,d]=\{(x,y)\mid x\in[a,b],y\in[c,d]\},$$

即为 xOy 平面上的一个矩形区域,其相邻两边各自平行于 x 轴与 y 轴,并且在 x 轴与 y 轴上的投影分别为区间 $[a,b]$ 和 $[c,d]$.

二、映射

1. 映射的概念

设 X 和 Y 是两个非空集合,如果存在一个法则 T,使得 X 中的每个元素 x 按法则 T 在 Y 中有唯一的元素 y 与之对应,那么称 T 为从 x 到 y 的映射,记作

$$T:X\to Y,$$

元素 y 称为元素 x(在映射 T 下)的像,并记作 $T(x)$,即

$$y=T(x),$$

而元素 x 称为元素 y(在映射 T 下)的一个原像.

集合 X 称为映射 T 的定义域,T 的定义域常记作 $d(T)$. X 中所有元素的像所组成的集合称为映射 T 的值域,T 的值域常记作 $R(T)$. T 的值域有时也称为集合 X(在映射 T 下)的像并记作 $T(X)$,即

$$R(T)=T(X)=\{T(x)\mid x\in X\}.$$

2. 几类重要映射

设 T 是从集合 X 到集合 Y 的映射,若 $T(X)=Y$,即 Y 中任一元素均是 X 中某元素的像,则称 T 为 X 到 Y 上的满射;若对任意的 x_1、$x_2\in X$, $x_1\neq x_2$,必有 $T(x_1)\neq T(x_2)$,则称 T 为 X 到 Y 的单射;若 T 既是满射又是单射,则称 T 为 X 到 Y 上的一一映射,或称 T 为 X 与 Y 之间的一一对应.

【例1】 设 $X_1=(-\infty,+\infty)$, $X_2=[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, $Y_1=(-\infty,+\infty)$, $Y_2=[-1,1]$.

考虑 $f_1:X_1\to Y_1$, $f_2:X_1\to Y_2$, $f_3:X_2\to Y_1$, $f_4:X_2\to Y_2$,其中 $f_i(i=1,2,3,4)$ 均为如下的对应规则:对定义域内的任一 x, $f_i(x)=\sin x$. 易知 f_1 是 X_1 到 Y_1 的映射,但既非满射,又非单射;f_2 是 X_1 到 Y_2 上的满射,但非单射;f_3 是 X_2 到 Y_1 的单射,但非满射;f_4 是 X_2 到 Y_2 上的满射,又是单射,即为一一映射.

3. 逆映射与复合映射

逆映射 设映射 T 为 X 到 Y 上的一一映射,则由定义,对每个 $y\in Y$,有唯一的 $x\in X$ 适合 $T(x)=y$,于是我们可得到一个从 Y 到 X 的映射,它将每个 $y\in Y$ 映为 X 中的元素 x,这里的 x 满足 $T(x)=y$. 我们把这个映射称为 T 的逆映射,记作 T^{-1}. 即,T^{-1} 为从 Y 到 X 的映射,对每个 $y\in Y$,如果 $T(x)=y$,则 $T^{-1}(y)=x$.

注意，只有一一映射才存在逆映射，因此也把一一映射称为可逆映射. 比如在例 1 中，只有 f_4 才存在逆映射 f_4^{-1}，f_4^{-1} 即为大家熟悉的反正弦函数：$f_4^{-1}(x) = \arcsin x$，其定义域为 $[-1,1]$，值域为 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

复合映射 设有映射 $T_1: X \to Y_1$，$T_2: Y_2 \to Z$，且 $T_1(x) \subset Y_2$，由 T_1 和 T_2 可确定从 X 到 Z 的一个对应规则，它将每个元素 $x \in X$，映为 Z 中的元素 $z = T_2[T_1(x)]$，显然这个对应规则是从 X 到 Z 的一个映射，我们把这个映射称为由 T_1、T_2 构成的复合映射，并记作 $T_2 \circ T_1$，即

$$T_2 \circ T_1: X \to Z，对每个元素\ x \in X，(T_2 \circ T_1)(x) = T_2[T_1(x)].$$

例如，设有映射 $T_1: \mathbf{R} \to [-1,1]$，$u = T_1(x) = \sin x$，和映射 $T_2: [-1,1] \to [0,1]$，$y = T_2(u) = u^2$，则可构成复合映射 $T_2 \circ T_1: \mathbf{R} \to [0,1]$，对 $\mathbf{R}$ 中的任一元素 x，

$$(T_2 \circ T_1)(x) = T_2[T_1(x)] = T_2(\sin x) = \sin^2 x.$$

三、函数

1. 函数概念

设数集 $D \subset \mathbf{R}$，则 D 到 $\mathbf{R}$ 的任一映射，称为定义在 D 上的一元函数，简称为函数，通常简记为 $y = f(x)$，$x \in D$. $x(x \in D)$ 称为函数的自变量，$y(y \in f(D))$ 称为函数的因变量，习惯上也称 y 为 x 的函数. 前面定义的与映射有关的一些概念，如定义域、值域等，也适用于函数. 对于函数 $y = f(x)$，$x \in D$，我们把 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ 中的集合 $\{(x,y) \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数 $y = f(x)$ 的图形（或图像）.

表示函数的符号是任意选取的，除了常用的 f 外，还可以用其他的英文或希腊字母，如“g”、“F”、“φ”、“Φ”等等. 如果在同一个问题中讨论到几个不同的函数，则必须用不同的记号分别表示这些函数，以示区别.

在一些实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的. 例如自由落体运动中，设物体下落的时间为 t，下落的距离为 s. 如果开始下落的时刻是 $t = 0$，落地时刻是 $t = T$，那么 s 与 t 之间的对应关系是

$$s = s(t) = \frac{1}{2}gt^2,\ t \in [0,T].$$

这个函数的定义域是区间 $[0,T]$.

在数学中，有时不考虑函数的实际意义，而抽象地研究用算式表达的函数，这时约定函数的定义域就是使得算式有意义的一切实数组成的集合，称为函数的自然定义域. 例如 $s = \frac{1}{2}gt^2$ 的自然定义域是 $(-\infty, +\infty)$，$y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的自然定义域是区间 $(-1,1)$.

我们定义的函数是指在确定的对应法则下，定义域内的每个元素只对应一个数值，即所谓的“单值函数”. 但是往往会有这样的情况，即在某种对应规则下，变元 x 的一个值对应

变元 y 的多于一个的值. 例如在 xOy 平面上,圆心在原点,半径为 a 的圆方程是 $x^2+y^2=a^2$. 如果将“满足这个方程”作为 x 与 y 之间的对应法则,那么当 $x=a$ 或 $-a$ 时,对应 $y=0$ 一个值;但当 x 取开区间 $(-a,a)$ 内任一个值时,对应的 y 有两个值. 因此当 $x\in(-a,a)$ 时,若仅仅以“满足方程 $x^2+y^2=a^2$”作为 x 与 y 之间的对应法则,那么这个法则就不符合函数的定义. 但是我们只要把对应法则稍作补充,比如规定当 $x\in[-a,a]$ 时,以“满足方程 $x^2+y^2=a^2$, 并且 $y\geqslant 0$”作为对应法则,那么我们就得到了一个确定的(单值)函数,将它记为 $y=y_1(x)$, 这时函数有算式表示 $y_1(x)=\sqrt{a-x^2}$. 同样,对应规则“满足方程 $x^2+y^2=a^2$, 并且 $y\leqslant 0$”也确定了一个函数,将它记作 $y=y_2(x)$, $y_2(x)=-\sqrt{a-x^2}$. 有时为了叙述的方便,我们说方程 $x^2+y^2=a^2$ 确定了多值函数,并把 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 称为这个多值函数的两个单值分支.

具体表示一个函数时,可以用表格法、图形法、解析法(即算式表示法),有时也可用语言描述,这些是大家在中学里已熟悉的内容,这里就不再详细说明了.

下面举几个函数的例子,例中的定义域均指自然定义域.

【例2】 (1)常数函数 $y=3$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$, 值域是 $\{3\}$;

(2)绝对值函数 $y=|x|$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$, 值域是 $[0,+\infty)$.

【例3】 符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

的定义域是 $(-\infty,+\infty)$, 值域是 $\{-1,0,1\}$. 它的图形如图 1-3 所示. 对任何 $x\in\mathbf{R}$, 有 $x=\operatorname{sgn}x\cdot|x|$ 或 $|x|=x\operatorname{sgn}x$.

【例4】 取整函数

对任意的 $x\in\mathbf{R}$,用记号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数,从而得到定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数

$$y=[x],$$

称此函数为取整函数, $[x]$ 称为 x 的整数部分. 例如 $\left[\frac{5}{7}\right]=0$, $[\sqrt{2}]=1$, $[\pi]=3$, $[-1]=-1$, $[-3.5]=-4$.

$y=[x]$ 的定义域是 $\mathbf{R}$,值域是 Z. 图 1-4 是它的图形. 取整函数还可以表示成

$$y=[x]=n,\ 当\ x\in[n,n+1),\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

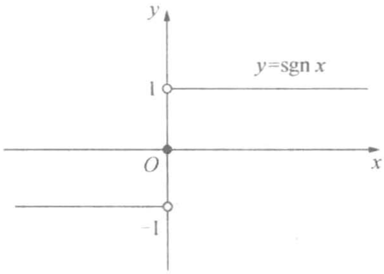

图 1－3

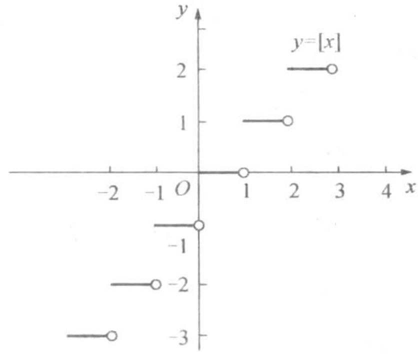

图 1－4

从例 3、例 4 中看到，有些函数在其定义域的不同部分，对应法则由不同的算式表达，这种函数叫作分段函数. 在科学技术和日常生活中，经常会遇到分段函数.

2. 函数的几种特性

有界性 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X \subset D$. 如果存在正数 M，使对任一数 $x \in X$，都满足

$$|f(x)| \leqslant M,$$

就称函数 f 在 X 上有界.

如果这样的 M 不存在，就称 f 在 X 上无界. 换言之，若对任意给定的一个正数 M（不论它多么大），总有某个 $x \in X$，使得 $|f(x)| > M$，那么称 f 在 X 上无界.

函数有界的定义也可以这样表述：如果存在常数 M_1 和 M_2，使得对任一 $x \in X$，都有 $M_1 < f(x) < M_2$，就称 f 在 X 上有界，并分别称 M_1 和 M_2 为 $f(x)$ 在 X 上的一个下界和一个上界，通常把在 X 上全体有界函数所成之集记作 $B(X)$. 于是，f 在 X 上有界就可表示为 $f \in B(X)$.

容易知道，若 $f(x)$ 在 X 上有界，则它在 X 上的上界和下界均不是唯一的.

单调性 设函数 $f(x)$ 的定义域是 D，区间 $I \subset D$. 如果对任意的 $x_1, x_2 \in I$，当 $x_1 < x_2$ 时总有

$$f(x_1) < f(x_2),$$

就称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是增加（或称递增）的；如果当 $x_1 < x_2$ 时，总有

$$f(x_1) > f(x_2),$$

就称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是减少（或称递减）的.

增加或减少的函数均称为单调函数.

有的教科书中把函数单调性定义中的不等式写作非严格的不等式，即 $\leqslant$ 或 $\geqslant$，而在本书中，除非另行说明，函数单调均指严格不等式意义下的单调，即严格单凋.

奇偶性 设函数$f(x)$的定义域D关于原点对称(即当$x \in D$时必有$-x \in D$),如果对任意的$x \in D$,总有

$$f(x) = f(-x),$$

就称$f(x)$是偶函数;如果对任意的$x \in D$,总有

$$f(x) = -f(-x),$$

就称$f(x)$是奇函数.

偶函数的图形是关于y轴对称的;奇函数的图形是关于原点对称的.

周期性 设函数$f(x)$的定义域为D. 如果存在不为0的数T,使得对每一个$x \in D$,有$x \pm T \in D$,且总有

$$f(x + T) = f(x),$$

就称$f(x)$是周期函数,T称作$f(x)$的周期. 通常我们说的周期指的是最小正周期.

熟知$y = \sin x$,$y = \cos x$是周期为2π的周期函数,$y = \tan x$是周期为π的周期函数. 显然,周期函数的定义域必是无界集.(集合$A \subset \mathbf{R}$称为有界集,是指存在有限区间(a, b),使得$A \subset (a,b)$. 若集合不是有界的,就称为无界集.)

【例5】 狄利克雷(Dirichlet)函数 $D(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 是有理数}, \\ 0, & \text{当 } x \text{ 是无理数}. \end{cases}$

容易验证,$D(x)$是周期函数,任何有理数r都是它的周期,然而它没有最小正周期. 这个函数的图形是无法画出的.

3. 反函数与复合函数

相应于前面的逆映射与复合映射的概念,在一元函数中有反函数与复合函数的概念.

反函数 设一元函数$f: D \to f(D)$为一一映射,则称逆映射$f^{-1}: f(D) \to D$为函数f的反函数,f^{-1}的对应规则由f的对应规则所确定,即对每个$y \in f(D)$,如果$y = f(x)$,则$x = f^{-1}(y)$. 由于改变自变量和因变量的字母并不改变函数的对应关系,而且习惯上总是以x表示自变量,因此常把$x = f^{-1}(y)$写作$y = f^{-1}(x)$. 例如函数$y = x^3$是一个从$\mathbf{R}$到$\mathbf{R}$的一一映射,故有反函数$x = y^{\frac{1}{3}}$,$y \in \mathbf{R}$. 互换x和y的符号,将这个反函数写作$y = x^{\frac{1}{3}}$,$x \in \mathbf{R}$.

容易证明,若$f(x)$为定义在区间I上的单调函数,则$f(x)$是从I到$f(I)$的一一映射,其反函数必定存在,且$f(x)$与$f^{-1}(x)$有相同的单调性,即如果$f(x)$是增加(减少)的,则$f^{-1}(x)$也是增加(减少)的.

函数$y = f(x)$与它的反函数$y = f^{-1}(x)$的图形在同一坐标平面上是关于直线$y = x$对称的(图1-5).

复合函数 复合函数是一种特殊的复合映射. 如果复合映射定义中的集合X、Y_1、Y_2、Z都包含于实数集$\mathbf{R}$,就可得到复合函数的定义. 为了便于应用,下面我们利用通常

的函数记号来把复合函数的定义重新叙述一遍.

设函数 $y = f(u)$ 的定义域是 D'，函数 $u = g(x)$ 在集合 D 上有定义且 $g(D) \subset D'$，则将由下式

$$y = f[g(x)](x \in D)$$

定义的函数称为由函数 $y = f(u)$ 、$u = g(x)$ 构成的复合函数. 变量 u 称为中间变量，$u = g(x)$ 称为中间函数. 用 $f \circ g$ 来记这个复合函数，即对每个 $x \in D$，有

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)].$$

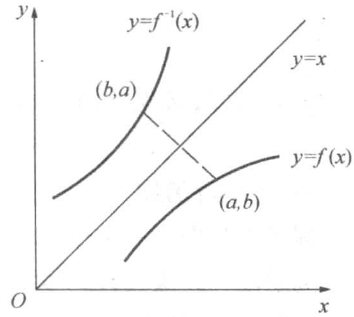

图 1－5

要注意，函数经复合后，其自然定义域未必是中间函数的自然定义域. 例如函数 $y = \arcsin x^2$ 可看作由 $y = \arcsin u$ 和 $u = x^2$ 复合而成，但是 $u = x^2$ 的自然定义域是 $(-\infty, +\infty)$，相应的值域 $[0, +\infty)$ 并没有完全包含在 $y = \arcsin u$ 的自然定义域 $[-1,1]$ 内，只有当 $u = x^2$ 的自变量 x 在 $D = [-1,1]$ 内取值时，u 的对应值才属于 $y = \arcsin u$ 的定义域，因此复合函数 $y = \arcsin x^2$ 的定义域是 $D = [-1,1]$. 还要注意两个函数能够复合的条件. 例如 $y = \arcsin u$ 和 $u = 2 + x^2$ 就不能构成复合函数，因为表达式 $y = \arcsin(2 + x^2)$ 对任何实数都没有意义.

4. 函数的运算

设函数 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 均在集合 D 上有定义，α 、β 为实数，则在 D 上可定义这两个函数的下列各种运算：

函数的和，记作 $f + g$，定义为 $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$，$x \in D$；

函数的差，记作 $f - g$，定义为 $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$，$x \in D$；

函数的积，记作 $f \cdot g$，定义为 $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$，$x \in D$；

函数的商，记作 $\dfrac{f}{g}$，定义为 $\dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$，$x \in D$ 且 $g(x) \neq 0$；

函数的线性组合，记作 $\alpha f + \beta g$（α 、β 为实数），定义为

$$(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x),\ x \in D.$$

5. 初等函数

在初等数学中已经讲过下面几类函数：

幂函数：$y = x^{\mu}$（$\mu \in \mathbf{R}$ 是常数），

指数函数：$y = a^x$（$a > 0$，且 $a \neq 1$），

对数函数：$y = \log_a x$（$a > 0$，且 $a \neq 1$，特别当 $a = \mathrm{e}$ 时，记为 $y = \ln x$），

三角函数：如 $y = \sin x$，$y = \cos x$，$y = \tan x$ 等，

反三角函数：如 $y = \arcsin x$，$y = \arccos x$，$y = \arctan x$ 等.

以上列举的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函

数.

我们把由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和函数复合步骤所构成的并可以用一个算式表示的函数统称为初等函数. 例如 $y = \sqrt{x^2+1}$, $y = e^{\frac{1}{1-x}}$ 等都是初等函数,在本课程中讨论的函数基本上都是初等函数.

另外我们介绍一下工程技术上常用到的一类初等函数,即双曲函数及其反函数.

(1) 双曲正弦

$$y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

它的定义域是 **R**,值域也是 **R**. 它是 **R** 上单调增加的奇函数.

(2) 双曲余弦

$$y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

它的定义域是 **R**,值域是区间 $[1, +\infty)$. 它是偶函数并在区间 $(-\infty, 0]$ 上减少,在区间 $[0, +\infty)$ 上增加. $\cosh 0 = 1$ 是这函数的最小值.

(3) 双曲正切

$$y = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

它的定义域是 **R**,它是 **R** 上单调增加的奇函数. 由于对任意的 $x \in \mathbf{R}$,

$$\tanh x = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1} < 1,$$

又

$$\tanh x = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = -1 + \frac{2}{1 + e^{-2x}} > -1,$$

故它的图形夹在直线 $y = 1$ 与 $y = -1$ 之间.

以上三个双曲函数的图形见图 1-6 与图 1-7.

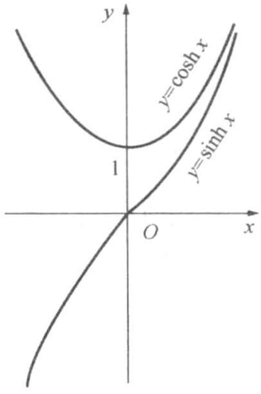

图 1-6

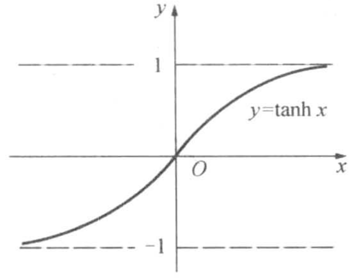

图 1-7

由双曲函数的定义，可以证明下面的恒等式：

$$\sinh(x+y)=\sinh x\cdot\cosh y+\cosh x\cdot\sinh y\ ; \tag{1}$$

$$\cosh(x+y)=\cosh x\cdot\cosh y+\sinh x\cdot\sinh y\ ; \tag{2}$$

$$\sinh(x-y)=\sinh x\cdot\cosh y-\cosh x\cdot\sinh y\ ; \tag{3}$$

$$\cosh(x-y)=\cosh x\cdot\cosh y-\sinh x\cdot\sinh y. \tag{4}$$

在等式(1)和(2)中令 $y=x$，得

$$\sinh 2x=2\sinh x\cdot\cosh x, \tag{5}$$

$$\cosh 2x=\cosh^2x+\sinh^2x, \tag{6}$$

再在等式(4)中令 $y=x$，并由于 $\cosh 0=1$，就得

$$\cosh^2x-\sinh^2x=1. \tag{7}$$

请注意，将这些双曲函数的恒等式与三角函数恒等式加以比较，注意两者的异同.

(4) 反双曲正弦

双曲正弦函数 $y=\sinh x$ 的反函数称为反双曲正弦函数，记为

$y=\operatorname{arsinh}x$.

这个函数可以用自然对数来表示，可推得：

$$y=\operatorname{arsinh}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1}). \tag{8}$$

函数 $y=\operatorname{arsinh}x$ 的定义域是 **R**，它是 **R** 上单调增加的奇函数. 其图形如图 1-8 所示.

(5) 反双曲余弦

双曲余弦 $y=\cosh x$ 是 **R** 上的偶函数，它不是从自然定义域 **R** 到值域 $[1,+\infty)$ 的一一映射. 如果把它的定义域限制在函数保持单调的区间 $[0,+\infty)$ 上，这样得到的双曲余弦有反函数，称为反双曲余弦函数，记为

$$y=\operatorname{arcosh}x.$$

它也可用自然对数表示，可推得：

$$\operatorname{arcosh}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1}). \tag{9}$$

函数 $y=\operatorname{arcosh}x$ 的定义域是区间 $[1,+\infty)$，值域是区间 $[0,+\infty)$，并在定义域上是单调增加的（图 1-9）.

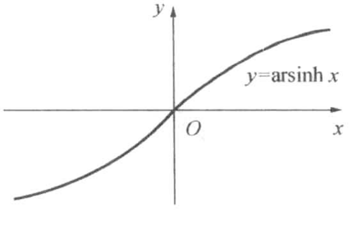

图 1-8

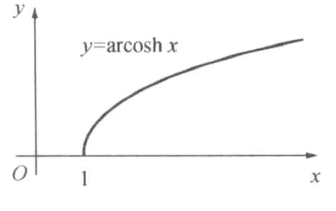

图 1-9