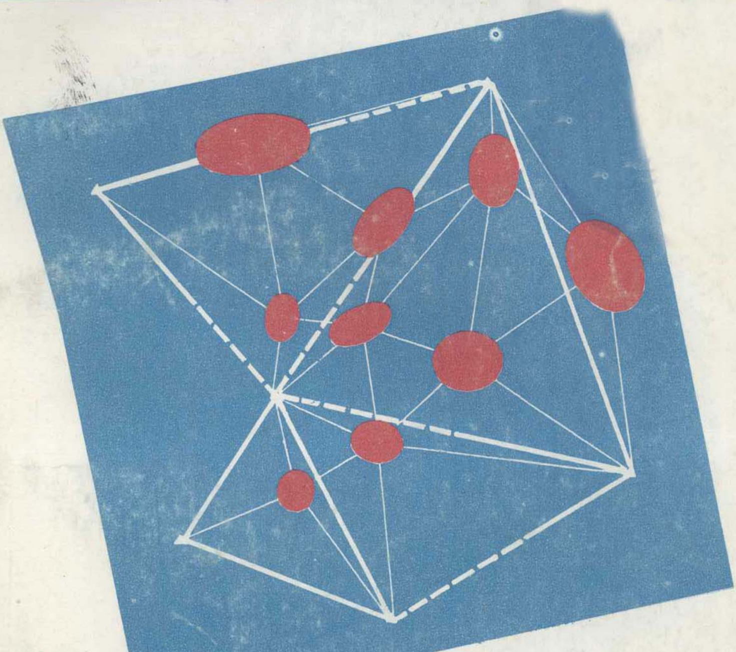
E LIANG KONG ZHI WANG DE YOU HUA SHE JI

测量控制网的优化设计

彭先进　编著



武汉测绘科技大学出版社

测量控制网的优化设计

彭先进　编著

武汉测绘科技大学出版社

(鄂)新登字14号

测量控制网的优化设计

彭先进　编著

武汉测绘科技大学出版社出版发行
武汉测绘科技大学出版社印刷厂印刷
*
787×1092 1/32开本　10.125印张　224千字
1991年10月第一版　1991年10月第1次印刷
ISBN7-81030-085-/P・20

印数：0001—2000册　　定价：4.30元

前　言

在过去的十多年中，测量控制网的优化设计问题在我国测量界受到了广泛的重视。不仅出现了一批理论研究成果，而且在测量实践中也开始推广运用，产生了技术经济效益。与国外的同行们相比，我们的研究进展并不逊色。在这种形势下，武汉测绘科技大学工程测量教研室在1985年决定开设一门选修课，向测量专业的学生系统介绍最优化方法和测量控制网的优化设计技术。作者不揣学识浅薄，承担了这项任务，于1986年编写出讲义，并先后在工程测量系83、84、85级教学中使用。本书就是在该讲义的基础上修订而成的。

本书第一至五章简要地介绍了最优化方法；第六章讨论了测量控制网的质量准则；第七至十章依次阐述了控制网零、一、二、三类设计问题；第十一章则是专用测量控制网设计与优化的知识。全书力求从总体上建立测量控制网优化设计的方法体系，反映这一领域的最新研究成果，尽可能地结合测绘生产实际，给出应用例子。

需要指出的是，在本书之前，虽然有大量的论文、专著可供参考借鉴，但是毕竟没有一本可供课堂使用的教材。因此，在教学大纲的制定、教材内容的取舍方面都是初次尝试，难免有种种欠妥当之处。另一方面，测量控制网的优化设计是一个尚未结束的课题，许多问题尚未完善地解决；而随着空间测量技术、电子计算机技术及其他科学技术的发展，测量控制网的优化设计内容正在日益丰富和深化。这些都使这本教材面临着修正、补充和更新的任务。

在本书出版之际，作者深切缅怀曾经给予过精心指导的李青岳教授。他也是最早在国内提出测量控制网优化设计问题的学者之一。本书在编写过程中，受到了全国测绘教材委员会暨工测专业组的热忱关怀，并得到了武汉测绘科技大学工程测量教研室的大力帮助和支持，在此，作者谨向他们表示衷心的感谢。

书中不当之处，恳请读者批评指正。

编著者

1991 年 1 月于武汉

目　　录

第一章　导论……………………………………………………（1）
§1-1　最优化方法 …………………………………………（1）
§1-2　优化设计 ……………………………………………（6）
§1-3　测量控制网优化设计概述…………………………（11）
§1-4　与数学规划有关的基本概念………………………（14）
第二章　线性规划 ……………………………………………（22）
§2-1　线性规划的标准形式及其解的性质………………（22）
§2-2　单纯形法……………………………………………（29）
§2-3　初始基本可行解……………………………………（38）
§2-4　整数线性规划………………………………………（42）
第三章　无约束极值问题 ……………………………………（51）
§3-1　解单变量最优化问题的 0.618 法…………………（51）
§3-2　解单变量最优化问题的多项式近似法……………（57）
§3-3　解多变量最优化问题的变量轮换法………………（61）
§3-4　解多变量最优化问题的方向加速法………………（64）
§3-5　解多变量最优化问题的梯度法……………………（73）
第四章　非线性规划及多目标规划 …………………………（83）
§4-1　用逐步线性化方法求解非线性规划问题…………（83）
§4-2　二次规划的 Wolfe 算法 …………………………（89）
§4-3　非线性规划化为无约束极值问题求解……………（93）
§4-4　多目标规划 ………………………………………（102）
第五章　动态规划……………………………………………（107）
§5-1　多阶段决策过程 …………………………………（107）
§5-2　动态规划的最优化原理 …………………………（109）

第六章　测量控制网的质量准则…………………… (112)
§6-1　测量控制网的精度 ………………………… (112)
§6-2　测量控制网的可靠性 ……………………… (117)
§6-3　测量控制网的费用 ………………………… (127)
§6-4　变形监测网的灵敏度 ……………………… (129)
第七章　测量控制网零类设计问题………………… (137)
§7-1　概述 ……………………………………… (137)
§7-2　测量控制网平差与基准问题 ……………… (138)
§7-3　自由网基准变换 …………………………… (144)
§7-4　测量控制网基准设计 ……………………… (151)
第八章　测量控制网一类设计问题………………… (161)
§8-1　概述 ……………………………………… (161)
§8-2　用变量轮换法进行点位优化 ……………… (162)
§8-3　用梯度法进行点位优化 …………………… (167)
§8-4　用逐次逼近法进行点位优化 ……………… (175)
§8-5　计算机模拟法进行网形优化的概念 ……… (180)
§8-6　多余观测的优选 …………………………… (181)
第九章　测量控制网二类设计问题………………… (189)
§9-1　测量控制网中不同观测值的作用
　　　及其配合 …………………………………… (189)
§9-2　观测权总和一定时的最优分配 …………… (201)
§9-3　由准则矩阵求解观测值权 ………………… (204)
§9-4　用线性规划法求解观测值权 ……………… (209)
§9-5　用非线性规划法求解观测值权 …………… (222)
§9-6　用梯度法求解观测值权 …………………… (228)
§9-7　用动态规划法求解观测值权 ……………… (234)
§9-8　用机助模拟法作观测权优化设计 ………… (237)

第十章　测量控制网三类设计问题…………………… (245)
§10-1　概述 ………………………………………… (245)
§10-2　测量控制网加密问题 ………………………… (247)
§10-3　测量控制网设计修正 ………………………… (252)
§10-4　加密网动态平差模型与三类设计
准则矩阵 ……………………………………… (256)
第十一章　专用测量控制网设计与优化……………… (264)
§11-1　隧道控制网设计与优化 ……………………… (264)
§11-2　桥梁控制网设计与优化 ……………………… (276)
§11-3　水利枢纽控制网布设 ………………………… (279)
§11-4　导线网设计与优化 …………………………… (282)
§11-5　精密控制网设计与优化 ……………………… (289)
§11-6　监测网准则矩阵的构成 ……………………… (297)
附录A　有关的矩阵运算公式………………………… (303)
附录B　单纯形法程序 ……………………………… (307)
参考文献……………………………………………… (312)

第一章　导　论

§1-1　最优化方法

最优化方法是近代应用数学的一个分支，是研究从所有可能方案中选择一种最合理方案以达到最优目标的学科。

人们经常遇到各种最优化问题，如何以最低的成本、最高的效率达到最优的目标，是人们普遍关心的问题。生活中有些简单的优化问题，可以凭直觉或经验解决。例如，从武汉到上海可以乘飞机、轮船或火车，如果想省钱，通过票价及其他开销的比较就可选定方案；如果想省时间，当然是乘飞机最快。由这个简单的例子可以看出，最优化方法的原始模式包括：

第一步，列出所有可能的方案（乘飞机、轮船或火车）；

第二步，确定一个鉴别优劣的准则（省钱或省时间）；

第三步，选出最合理的方案。

事实上大量的最优化问题难以按上述模式来解决，因为我们通常无法将所有可能的方案毫无遗漏地列举出来，有时被遗漏的恰是最优方案。例如，不受地形限制时控制网的选点方案可以有无数种。同时，判别方案优劣的准则往往不止一个，而且各种准则有时相互影响、相互制约甚至相互矛盾，增加了遴选最合理方案的难度。

随着生产的发展和科学技术的进步，最优化问题越来越受重视，不仅吸引了一批数学工作者，也引起了其它科技领域，如建筑工程、化学工程、船舶设计、动力装置、电子科学、航空航天以及生产管理等众多的工程师、经济学者、管理人员和军事专家的重视和研究。特别是电子计算机技术的发展，为最

优化技术的实施提供了有效手段，最优化理论和方法得到了迅速发展，并广泛应用于各个领域。

总的来说，所有的最优化问题都有一个内在的优化表达式：

$$S = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \min(\text{或} \max) \tag{1-1}$$

其中 S 是性能特征量或成本，$x_j(j = 1, \cdots, n)$ 是独立变量或中间设计变量。为了保证方案的可行性，还要对式(1-1)附加等式或不等式约束。其一般形式为：

$$g_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \quad (i = 1, \cdots, m) \tag{1-2}$$

$$h_k(x_1, x_2, \cdots, x_n) \geqslant 0 \quad (k = 1, \cdots, l) \tag{1-3}$$

设 R^n 为 n 维向量空间，向量 X 为其中一个 n 维向量：

$$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$$

则可将最优化问题的一般形式表示为：

$$\left.\begin{aligned} &\min(\text{或} \max) S = f(X) \\ &\text{s.t.} \quad g_i(X) = 0 \quad (i = 1, \cdots, m) \\ &\qquad h_k(X) \geqslant 0 \quad (k = 1, \cdots, l) \end{aligned}\right\} \tag{1-4}$$

此处 s. t. 是 subject to(受约束于)的缩写，f、g_i、h_k 都是 X 的实值连续函数。f 通常称为目标函数。

满足约束条件 $g_i(X) = 0$ 和 $h_k(X) \geqslant 0$ 的向量 X 称为可行解，一般这样的可行解不止一个，它们的集合称为可行解集。求解最优化问题(1-4)的过程，就是在可行解集中寻找一点 X^*，使得目标函数 $S = f(X)$ 在该点取最小(或最大)值，即

$$\begin{aligned} f(X^*) &= \min(\text{或} \max) f(X) \\ \text{s.t.} \quad g_i(X^*) &= 0 \\ h_k(X^*) &\geqslant 0 \end{aligned}$$

这样的 $X^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)^T$ 称为问题的最优解。

在实际的最优化问题中，每个可行解都代表一个可能的

方案，不同的方案对应于不同的目标函数值。目标函数值的大小就是衡量这个方案优劣的数量表征。

在式(1-4)中，如果 $m=l=0$，便没有约束条件，称为无约束问题。此时若 $n=1$，就是一维问题；$n>1$，就是多维问题。

若 m 和 l 至少有一个不等于 0，则称(1-4)为约束问题。在约束问题中，如果 f、g_i、h_k 都是线性函数，就称为线性规划，否则称为非线性规划。

以上所讨论的都属于静态问题，此外还有动态问题。这里，将最优化问题分类如下：

- 最优化问题
  - 静态问题
    - 无约束问题
      - 一维问题
      - 多维问题
    - 约束问题
      - 线性规划
      - 非线性规划
  - 动态问题

例 1-1（一维无约束问题） 在边长为 a 的正方形铁板的四角剪去相等的正方形以制成方形无盖箱（图 1-1），问如何剪才能使其容积最大？

设剪去的正方形边长为 x，则箱容积为：

$$V=x(a-2x)^2=4x^3-4ax^2+a^2x$$

求 V 的导数并令其为 0，得：

$$\frac{dV}{dx}=12x^2-8ax+a^2=0$$

解之得 $x_1=a/2$（不合题意，舍去），$x_2=a/6$。此时，$V_{最大}=2a^3/27$。

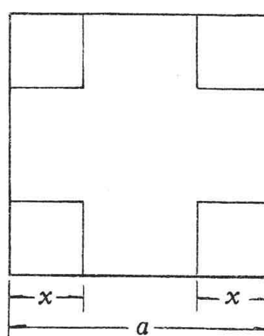


图 1-1

例 1-2（多维无约束问题） 将宽为 b 的铁皮制成如图 1-2 所示的梯形槽，问斜

边 x 和倾角 α 为多大时其截面积最大?

梯形的截面积为:

$$A=\frac{1}{2}[(b-2x)+(b-2x+2x\cos\alpha)]\cdot x\sin\alpha$$

分别求 x、α 的偏导数并令其为 0,得方程组:

$$\frac{\partial A}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial A}{\partial \alpha}=0$$

解之可得 x 和 α(读者可自行完成计算)。

图 1-2

上述二例都是用微分方法求极值(此外还有用拉格朗日乘子求极值的方法),将问题归结为非线性方程组求解。这种方法已见于微积分理论,在此姑称为经典最优化理论,以区别于近代最优化理论。

实际中的问题比上面的例子复杂得多,有时无法写出象上面对 V 和 A 那样明确的表达式。这就需要求助于其他解法,例如直接搜索法、坐标轮换法、梯度法等。

例 1-3(线性规划) 设某产品有 m 个产地,其产量分别为 a_1、a_2、…、a_m 吨。现将这些产品分别运往 n 个销地,各地需要量分别为 b_1、b_2、…、b_n 吨。已知每吨产品由 i 产地运至 j 销地的运价为 c_{ij}元/吨,问如何调运产品才能使总运费最省?

设从 i 地运至 j 地的产品为 x_{ij}吨,则总运费为:

$$S=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

问题的目标是使 S 最小,但未知量 x_{ij}的取值受到以下限制:

(1)第 i 个产地的产品数量与运出的数量相等:

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i\quad(i=1,\cdots,m)$$

(2)第 j 个销地的运入量等于需求量：

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1, \cdots, n)$$

(3)所有的调运量非负：

$$x_{ij} \geqslant 0 \quad (i = 1, \cdots, m;\ j = 1, \cdots, n)$$

综上所述，本问题的数学描述为：

$$\begin{aligned}
\min S = & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = 1, \cdots, m) \\
& \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1, \cdots, n) \\
& x_{ij} \geqslant 0
\end{aligned}$$

此例的目标函数和约束条件均为线性函数，故称为线性规划。线性规划主要用单纯形法求解(包括改进的单纯形法)，也可用初等矩阵法、迭代法、椭球体方法等求解。

例 1-4(非线性规划) 设计一个用给定厚度和密度的金属薄板做成的箱子，要求在体积一定的条件下其重量最轻。

设箱子的长、宽、高分别为 x_1、x_2、x_3，给定的体积为 V，金属薄板的密度为 ρ，厚度为 t，则箱子的重量为 $2\rho t(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)$，体积为 $x_1x_2x_3$，问题的数学表达为：

$$\begin{aligned}
\min S = & 2\rho t(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) \\
\text{s.t.} \quad & x_1x_2x_3 = V
\end{aligned}$$

此例的目标函数和约束条件均为非线性函数，故称为非线性规划。解非线性规划问题可以用分析方法，如综合梯度法、鞍点迭代法、梯度投影法、容许方向法，或用直接方法，如格点法、复合形法、随机试验法，也可用线性规划逐步逼近的

方法或转换成无约束极值问题求解。

§1-2 优化设计

优化设计是最优化理论和方法在设计中的应用。设计人员从工程本身的设计要求和技术条件出发，应用专业理论和优化技术，在电子计算机上，从满足技术条件和设计要求的各种可行方案中，按照规定的指标自动选出最优的设计方案。

“设计”一词本身即有优化的涵义。但是在传统的设计过程中，尽管设计人员的主观愿望是要按最好的方案设计，却难以真正达到最优。因为在设计中，每改变一次设计参数，往往需要通过大量的计算工作才能看出其影响效益。在手算(使用对数表、计算器等)情况下，对更多的方案进行探讨和比较几乎是不可能的。因此，传统的设计思想主要是解决方案的可行性。

优化设计不同于传统设计之处，首先在于设计的思想不仅是可行性，更注重最优性。优化设计以达到最优为目标，从众多的可行方案甚至全部可行方案中找出最优的方案，并且有数学上的保证，证明其最优性。

其次，从工具来说，优化设计使用的是电子计算机，计算时可以采用较精确的数学模型和分析方法，扩大分析范围(变量的数目与定义域)，不易漏掉最优方案。计算机也使设计人员从繁重的绘图和计算工作中解脱出来，把精力和时间主要用于数学模型的建立和程序的编制。

第三，优化设计采用最优化理论和方法，它不需要人工罗列各种备选方案，而是由计算机按照一定的数学模型和解算方法沿着改善方案的方向自动进行调整，直至选出最优方案。

当然，在计算机按最优化方法作出设计方案之后，还要经过试验证实，以验证数学模型是否准确、所采用的参数是否适宜，最终确定实施。

尽管各种问题千差万别，但其优化设计的原理和过程是相似的，这可以用图 1-3 所示的框图来说明。

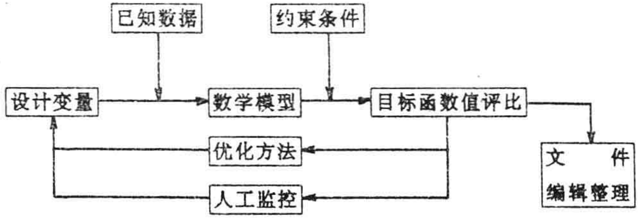


图 1-3

1. 设计变量

设计变量是设计过程中有选择余地、可以改变的量。设计变量的每一组取值代表一种设计方案。在优化设计中，通常要对设计变量赋予初始值，由初始值所对应的初始方案出发，自动进行调整，直至获得最优方案。初始方案愈接近最优方案，也即设计变量的初始值愈接近其最优值，计算机进行调整所需的时间就愈短，得到最优方案也愈快。但是，初始方案的好坏并不妨碍最终获得最优结果。只要是满足约束条件的可行方案，均可作为初始方案。

在工程设计中有很多设计参数，究竟选择哪些参数作为设计变量，应该遵循以下原则：

(1)设计变量应该相互独立。例如在控制网观测方案设计中，有几种可供选择的参数：观测值的权 p_i，观测值中误差 m_i，测回数 n_i。由于 p_i、m_i、n_i 是相关的，故只能选其中一种作为设

计变量。

(2)应该选择对目标函数有较大影响的参数作为设计变量。同时,这些参数应该对目标函数有着矛盾的影响,以使目标函数有明显的极值存在。如在观测方案设计中,若以总工作量为目标函数,可选观测值方差为设计变量。因为观测值方差愈小,意味着总工作量愈大,这就是矛盾的影响。

(3)在满足设计要求的前提下,应该充分分析各设计变量的主次,减少变量的数目,使优化问题简化。

在优化设计中,并非对每个设计变量在$(-\infty,+\infty)$的整个范围进行搜索,而是在优化之前就大致确定了设计变量的取值范围(搜索区间),即 X 的定义域。例如在三角网选点时,点位受到地形限制,只能在一定范围内选点。当以待定点坐标为设计变量时,它们的取值范围便可在图上圈定量出。如果设计人员有把握,取值范围可以取得准确些;否则,可取得大些。

在设计中,有时会发现所选的设计变量在单位制、数量级方面存在差异。例如在边角网中,测角中误差以(″)为单位,而测边中误差以 cm 或 mm 为单位,如果同时出现于一组设计变量中,就会在单位制上存在矛盾。此外,当测边中误差以 mm 为单位时,同一边角网中边角观测中误差的数量级也必然有较大差异(例如测角$\pm1''$,测边±10mm)。若以方差为设计变量差异则更大(分别为 $1('')^2$ 和 100mm^2),这些都会影响求解计算。在进行优化设计时,必须对设计变量作适当的处理,必要时可将设计变量加以标准化,使每一个设计变量的取值都在 0～1 之间。例如测角中误差在 0″～5″之间,若测角中误差为 2″,其相应的标准值为 $2/5=0.4$。如果优化结果某一设计变量标准值为 0.14,其相应的实际值为 $5\times0.14=0.7''$。测边中误差也可作类似的标准化。

2. 数学模型

建立数学模型就是将设计问题以数学形式描述，这是优化设计中最重要的步骤。数学模型反映了设计变量与性能参数的内在联系，为评比提供了依据。设计者通过一定的数学模型来描述所追求的最优目标，优化设计的结果是否可行，主要取决于数学模型是否准确地反映了工程实际，是否体现了设计意图。

对数学模型的一般要求是：

(1)现实性——在一定程度上确切地反映设计意图，符合问题的客观情况。

(2)适应性——随着具体条件的变化，模型具有一定的适应能力。

(3)简洁性——模型应尽量简单明了，以节省建立模型和上机时间，也便于推广应用。

上述要求中，现实性与简洁性含有相互矛盾的因素。为了满足现实性，会使模型过于复杂，增加求解的困难，缺乏简洁性。复杂的模型现实性好，适应性较差。一般要求是力求具有现实性，在此基础上达到简洁性，尽可能有较好的适应性。

3. 约束条件

任何设计问题都有其本身的约束条件。在测量控制网设计中，点位应有一定的密度，边长不能超长或特短，精度应达到某些指标，测回数不能无限制地增加，等等，这些都是约束条件。只有满足约束条件的设计方案才算可行。

约束条件提出后，即对设计变量的取值范围加以限制，形成一个封闭的约束空间。当设计变量在此约束空间内或边界