GAILULUNYU S U I J I G U O C H E N G

概率论与随机过程

GAILULUNYU

胡国雷 何 铭 孔告化 编

S U I J I G U O C H E N G

东南大学出版社

概率论与随机过程

胡国雷　何　铭　孔告化　编

东南大学出版社

·南　京·

内容提要

本书根据教育部关于“高等工业学校概率论与数理统计课程教学基本要求”并结合通信类专业的特点编写而成。内容主要包括概率论与随机过程两大部分，其中概率论部分主要包括基本概念、随机变量及其分布、数字特征、大数定律与中心极限定理；随机过程部分主要包括随机过程的基本概念、马尔可夫链、平稳过程、随机信号分析。每章末均附有习题。

本书可作为工科院校本科的教材使用，也可供工程技术人员和科研人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与随机过程/胡国雷，何铭，孔告化编．－南京：东南大学出版社，199.12

ISBN 7－81050－571－8

Ⅰ．概…　Ⅱ．①胡…②何…③孔…　Ⅲ．①概率论②随机过程　Ⅳ．021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 55135 号

东南大学出版社出版发行
(南京四牌楼 2 号　邮编 210096)
出版人：宋增民
江苏省新华书店经销　　南京邮电学院印刷厂印刷
开本：787mm×1092mm 1/16　　印张：10.75　字数：258.6 千字
1999 年 12 月第 1 版　　1999 年 12 月第 1 次印刷
印数：1－4000　　定价 14.00 元

序

概率论与随机过程是研究随机现象统计规律性的数学学科，是近代数学的重要组成部分，是工科专业学生的一门十分重要的课程。它既是众多专业的数学基础，又能直接提供某些应用的数学方法。通过本课程的学习，可使学生获得研究随机现象的基本思想和方法，以及分析和解决一些简单随机现象问题的能力。

本书根据教育部关于“高等工业学校概率论与数理统计课程教学基本要求”，结合通信类专业的特点编写而成，内容主要包括概率论与随机过程两大部分。其中概率论部分主要包括概率论的基本概念、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理等，为读者提供了必要的理论基础；随机过程部分主要包括随机过程的基本概念、马尔可夫链、平稳过程随机信号分析等。在讲清基本知识的基础上，主要讨论了马尔可夫链、平稳过程、随机信号分析，为学生学习后继课程打下坚实的基础。

本书是我们几位教师通过多年的教学实践经验积累编写而成的，在选材和叙述上尽量做到联系工科专业的特点，从实例出发，引出基本概念，注重概率与随机过程在通信领域的应用。写法上力图直观新颖、通俗易懂，既利于教学又便于自学。在例题和习题的选择上也作了很大的努力，使得这些题目既具有启发性，又具有广泛的应用性。

全书共分 8 章，由胡国雷担任主编。具体分工是：第 1、2 章由孔告化撰写；第 3、4 章由何铭撰写；第 5、6、7、8 章由胡国雷撰写。王健明副教授、李惠孙老师对本书进行了审阅，他们提出了很多宝贵意见，对此我们表示衷心的感谢。

本书可作为工科院校，特别是通信类专业概率与随机过程的教材和参考书，也可供工程技术人员和科研人员的参考。

书中不足之处，垦请读者批评指正。

编　　者

1999 年 8 月于南京

目　录

第 1 章　随机事件与概率

1.1　随机事件

1.1.1　随机试验与样本空间

概率论与随机过程是一门研究随机现象规律性的数学学科。所谓随机现象，就是在一定条件下，事先无法确切预言结果的现象。例如：抛一枚硬币，可能出现“正面”，也可能出现“反面”，但事先无法准确预言出现哪一面；在单位时间内，某电话总机收到的呼唤次数，事先也不能确切预言；掷一棵骰子，可能出现 1 点，2 点，…，6 点六种结果，事先也不能确切预言，等等。

在概率论中，把对随机现象进行的观察或试验，称为**随机试验**(简称**试验**)。随机试验一般具有以下三个特性：

(1)　试验可在相同的条件下重复进行(可重复性)；

(2)　每次试验的可能结果不止一个，且一切可能结果均已知(多样性)；

(3)　在每次试验前，不能确定哪一个结果会出现(随机性)。

随机试验通常用字母 E 表示。

【例 1.1】　E_1：抛一枚硬币，观察其正面 H，反面 T 出现的情况；

E_2：掷一枚骰子，观察其出现的点数；

E_3：记录某电话交换台单位时间内收到呼唤的次数；

E_4：从一批产品中任意抽捡 5 件，观察出现的次品数；

E_5：在完全相同的条件下接连进行两次射击，观察其结果；

E_6：在一批灯泡中任取一只，测试它的寿命。

随机试验中出现的各种可能结果称为试验的**基本结果**。显然，随机试验具有两个或两个以上的基本结果，而且事前不知哪个结果会在试验中出现。

随机试验的基本结果，可以按不同的方法来定义，这取决于试验的目的。例如：从一批产品中任意抽测一件产品是一个随机试验，如果抽测的目的仅是考察产品是正品或次品，试验只有两种基本结果(抽得正品和抽得次品)；如果抽测的目的是考察产品是一等品、二等品或等外品，则试验就有三种基本结果。

定义 1.1　随机试验 E 的所有基本结果组成的集合称为试验 E 的**样本空间**，记为 S。样本空间的元素，即 E 的每个基本结果，称为**样本点**。

下面列出例 1.1 中试验 $E_k(k=1,2,\cdots,6)$ 的样本空间：

$S_1=\{H,T\}$；

$S_2=\{1,2,3,4,5,6\}$；

$S_3=\{0,1,2,\cdots\}$；

$S_4=\{0,1,2,3,4,5\}$；

$S_5=\{00,01,10,11\}$,这里 0 表示未击中,1 表示击中;

$S_6=\{t \mid t \geqslant 0\}$。

1.1.2 随机事件

现利用样本空间的概念,给出随机事件的定义。

定义 1.2 称试验 E 的样本空间 S 的子集为 E 的随机事件,简称**事件**,通常用大写英文字母 A、B、C 等来表示随机事件。在每次试验中,当且仅当这一子集中的一个基本结果出现时,称这一事件发生。

通常,把只含一个样本点的事件称为**基本事件**。事件 S 称为**必然事件**,事件 $\varnothing(\varnothing \subset S)$ 称为**不可能事件**。

【例 1.2】 在例 1.1 的 E_4 中事件 A_1:"至多只有 2 件次品",即 $A_1=\{0,1,2\}$;

在例 1.1 的 E_5 中事件 A_2:"第一次击中",即 $A_2=\{10,11\}$;事件 A_3:"至少击中一次",即 $A_3=\{10,01,11\}$。

1.1.3 随机事件间的运算和关系

在随机试验中,有的随机事件简单,有的比较复杂。为了从简单的事件出发来研究一些复杂的事件,还需要研究随机事件间的关系和运算。

1) 事件间的运算

设有随机事件 A,B,即 $A,B \subseteq S$(样本空间)。由集合运算的定义可知,集合 $A \cup B$,$A \cap B$,$A-B$,$\bar{B}$ 等所表示的各个事件与事件 A,B 的关系如下:

(1) 事件的和:集合 $A \cup B$ 表示事件"A 与 B 至少有一个发生",称 $A \cup B$ 为事件 A,B 的和事件。

类似地,$\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i=A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 表示"事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生",称 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件。

$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 表示"可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 中至少有一个发生",称 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 为 $A_1,A_2,\cdots$ 的和事件。

(2) 事件的积:集合 $A \cap B$ 表示事件"事件 A 与事件 B 同时发生",称为事件 A 与 B 的积事件,$A \cap B$ 可简记为 AB。

类似可定义 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

以及 $A_1,A_2,\cdots$ 的积:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots$$

(3) 事件的差:集合 $A-B$ 表示"事件 A 发生而事件 B 不发生",称为事件 A 与 B 的差事件。

(4) 事件的逆:集合 $S-B$,即 $\bar{B}$ 表示事件"B 不发生",称 $\bar{B}$ 为 B 的逆事件。

【例 1.3】 在电路中,经常出现以下两种电路。

(1) 并联(如图 1-1)

令 $B=\{MN\text{ 连通}\}, A_i=\{a_i\text{ 连通}\}, i=1,2,3$。

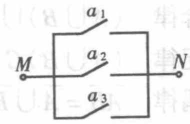

图 1-1　并联电路

由于 a_1,a_2,a_3 只要有一个连通，则 MN 连通，所以

$$B = A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

(2) 串联(如图 1-2)

由于 a_1,a_2,a_3 要同时连通，MN 才能连通，所以

$$B = A_1 \cap A_2 \cap A_3$$

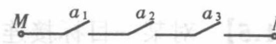

图 1-2　串联电路

又如令 $C=\{a_1\text{ 连通}, a_2\text{ 和 } a_3\text{ 均不连通}\}$，则 $C=A_1-(A_2\cup A_3)$。

2) 两个事件间的关系

(1) 包含关系：若事件 A 发生，必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，记为 $A\subseteq B$。

(2) 相等关系：若 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq A$，则称事件 A 和 B 相等，记为 $A=B$。

(3) 互斥关系(互不相容)：若事件 A 与 B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与 B 互斥，或称 A 与 B 互不相容。

如果对 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 有 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j; i,j=1,2,\cdots,n)$，则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容。

(4) 互逆关系(对立关系)：若事件 A 与 B 满足 $AB=\varnothing$ 且 $A\cup B=S$，则称事件 A 与 B 是互逆的，或称 A 与 B 是对立的，记为 $A=\bar{B}$ 或 $B=\bar{A}$。

【例 1.4】 E：从标号分别为 $1,2,\cdots,10$ 的 10 个球中任取一个球，令：

$A=\{$抽中 2,4 号球$\}$，$B=\{$抽中偶数号球$\}$，$C=\{$抽中奇数号球$\}$，$D=\{$抽中 2,4,6,8,10 号球$\}$。

显然

$$A\subset B, B=\bar{C}, BC=\varnothing$$

在讨论随机事件的关系和运算时，常借助于文氏图来帮助理解，显得直观简洁(见图 1-3)。

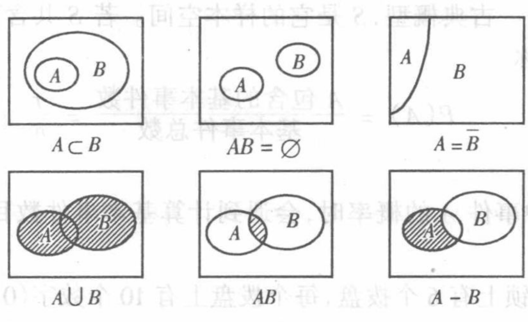

图 1-3　文氏图

3) 事件的运算规律

由事件运算的定义并结合文氏图很容易验证下列基本关系式成立：

1) 交换律　$A\cup B=B\cup A, AB=BA$；

2）结合律　$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (AB)C = A(BC)$；

3）分配律　$(A \cup B)C = AC \cup BC, (AB) \cup C = (A \cup C)(B \cup C)$；

4）对偶律　$\overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}, \overline{A \cup B} = \overline{A}\overline{B}$。

分配律和对偶律可以推广到任意有限个或可列个事件，如

$$(\bigcup_i A_i)C = \bigcup_i (A_i C)$$

$$\overline{\bigcup_i A_i} = \bigcap_i \overline{A}_i, (\overline{\bigcap_i A_i}) = \bigcup_i \overline{A}_i$$

【例 1.5】 对某一目标接连进行三次射击，设 $A_i = \{$第 i 次射击命中目标$\}$，$(i = 1,2,3)$；记 $B_j = \{$三次射击中恰好有 j 次命中目标$\}$，$(j = 0,1,2,3)$；则：$B_0 = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$；$B_1 = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 \cup \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3$；$B_2 = A_1 A_2 \overline{A}_3 \cup A_1 \overline{A}_2 A_3 \cup \overline{A}_1 A_2 A_3$；$B_3 = A_1 A_2 A_3$。

1.2　随机事件的概率

对于一个随机事件来说，在一次试验中可能发生，也可能不发生。我们希望有一个能刻划随机事件发生的可能性大小的数量指标，这个数量指标就是下面将要讨论的随机事件的概率。事件 A 的概率以 $P(A)$ 表示。

1.2.1　概率的古典定义

有许多随机试验满足以下两个条件：

(1) 试验的样本空间只有有限个样本点，即基本事件数有限；

(2) 在每次试验中，各基本事件发生的可能性相同。

这种随机试验是概率论发展早期的研究对象，称为**古典随机试验**，简称**古典概型**。

例如：10 件产品中有 2 件次品，从中随机抽取 1 件检验。记 $A_i = \{$取到第 i 件产品$\}(i = 1, 2, \cdots, 10)$，则此试验的样本空间含有 10 个基本事件，且每个产品被取到的可能性相同，即各个基本事件发生的可能性相同。因此，这是一个古典概型问题。

在古典概型中，事件的概率可以按照下面的概率的古典定义直接计算。

定义 1.3　设 E 是一古典概型，S 是它的样本空间。若 S 共含有 n 个基本事件，而事件 A 含有 r 个基本事件，则称

$$P(A) = \frac{A\text{ 包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}} = \frac{r}{n}$$

为事件 A 的概率。

在计算古典概型中事件 A 的概率时，会遇到计算基本事件数目的问题，这些计算需要利用排列与组合的知识。

【例 1.6】 一号码锁上有 6 个拨盘，每个拨盘上有 10 个数字$(0,1,2,\cdots,9)$，它给定了一个 6 位数字暗码（首位可以是 0），只有拨对号码时，才能将锁打开。如果不知道锁的号码，问“一次就能把锁打开”的概率是多少？

解　样本空间的基本事件总数 $n = 10^6$。设 $A = \{$一次就把锁打开$\}$，而 A 所包含的基本事件数 $r = 1$，所以

$$P(A) = \frac{1}{10^6}$$

这个数字很小,说明在不知开锁密码的情况下,一次就把锁打开几乎是不可能的。当某一事件的概率接近于0时,这样的事件称为**小概率事件**。

【例1.7】 袋中装有 n 个球,其中有 n_1 个白球和 n_2 个黑球,从中任取 m 个,求所取的球中恰含有 m_1 个白球和 m_2 个黑球的概率($n=n_1+n_2, m=m_1+m_2$)。

解 样本空间的基本事件总数为 C_n^m。设 $A=\{$所取的球中恰含有 m_1 个白球和 m_2 个黑球$\}$。

"恰有 m_1 个白球"的取法有 $C_{n_1}^{m_1}$,"恰有 m_2 个黑球"的取法有 $C_{n_2}^{m_2}$,故 A 包含的基本事件数 $r=C_{n_1}^{m_1}C_{n_2}^{m_2}$,所以

$$P(A)=\frac{C_{n_1}^{m_1}C_{n_2}^{m_2}}{C_n^m}$$

这个概率公式称为**超几何分布公式**。

超几何分布公式更一般的提法为:一袋中有 n 个球,其中 n_1 个带号码"1",n_2 个带号码"2",…,n_k 个带号码"k",$n_1+n_2+\cdots+n_k=n$。从此袋中任取 m 个球,求恰有 m_i 个带有号码"i"($i=1,2,\cdots,k$)的概率 P,其中 $m_1+m_1+\cdots+m_k=m$。

类似于例1.7,可得

$$P=\frac{C_{n_1}^{m_1}C_{n_2}^{m_2}\cdots C_{n_k}^{m_k}}{C_n^m}$$

【例1.8】 将100只同型号的三极管按电流放大系数分类,有40只属于甲类,60只属于乙类。现从中任意抽取3只,分别按下列两种方法抽取:

$A=\{$抽取的3只都是乙类$\}$;

$B=\{$抽取的3只中,2只是甲类,1只是乙类$\}$。

求下列事件的概率:

(1) 每次抽取1只,测试后放回,然后再抽取下1只(返回抽样)。

(2) 每次抽取1只,测试后不放回,在剩下的三极管中再抽取下1只(不返回抽样)。

解 先求 $P(A)$:

(1) 返回抽样,基本事件总数 $n=100\cdot100\cdot100=100^3$。$A$ 事件包含的基本事件数 $r_A=60\cdot60\cdot60=60^3$,所以

$$P(A)=\frac{r_A}{n}=\frac{60^3}{100^3}=0.216$$

(2) 不返回抽样,基本事件总数 $n=100\cdot99\cdot98=P_{100}^3$。$A$ 事件包含的基本事件数 $r_A=60\cdot59\cdot58=P_{60}^3$,所以

$$P(A)=\frac{P_{60}^3}{P_{100}^3}\approx0.212$$

下面求 $P(B)$:

(1) 返回抽样,基本事件总数 $n=100^3$,B 事件包含的基本事件数 $r_B=C_3^2\cdot40^2\cdot60$,所以

$$P(B)=\frac{C_3^2\cdot40^2\cdot60}{100^3}=0.288$$

(2) 不返回抽样,基本事件总数 $n=P_{100}^3$。B 事件包含的基本事件数 $r_B=C_3^2\cdot40\cdot39\cdot60$,

所以

$$P(B)=\frac{C_3^2\cdot 40\cdot 39\cdot 60}{P_{100}^3}\approx 0.289$$

从例 1.8 可以看出,对返回抽样和不返回抽样,计算出的概率是不同的,特别在抽取的对象数目不大时更是如此。当被抽取的对象数目较大时,这两种抽样所计算出的结果相差不大。正因为如此,人们在实际工作中常利用这一点,把抽取对象数目较大时的不返回抽样(如破坏性抽样),当作返回抽样来处理,这样将给分析问题和解决问题带来许多方便。

【例 1.9】 袋中有 a 个白球,b 个彩球,从中逐一摸出,试求第 k 次摸得彩球的概率($k=1,2,\cdots,a+b$)。

解 设 $A_k=\{$第 k 次摸得彩球$\}$,$k=1,2,\cdots,a+b$

假设每个球被编号因而可分辨,摸出后依次排列在 $a+b$ 个空格内。于是每一种排列即对应着试验的一个结果,共有$(a+b)!$ 个不同结果,即基本事件总数 $n=(a+b)!$

现考察事件 A_k:第 k 个空格内可以是 b 个彩球中的任一个,共有 C_b^1 种结果,其余 $a+b-1$ 个球在余下的 $a+b-1$ 空格内可任意排列,共有$(a+b-1)!$ 种排列法,从而事件 A_k 包含的基本事件数 $r=C_b^1\cdot(a+b-1)!$,所以

$$P(A_k)=\frac{C_b^1\cdot(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{b}{a+b}\qquad k=1,2,\cdots,a+b$$

例 1.9 中 $P(A_k)$与 k 无关,说明无论第几次取球,取得彩球的概率都相同,这正好和我们日常生活经验相符。如 5 人分 2 张足球票,采用抽签方法,每人抽中的机会均等,与抽签的先后顺序无关,所以抽签不必争先恐后。

就古典概率来说,容易证明下列三个基本性质:

性质 1 非负性 对任一事件 A,有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

性质 2 规范性 对必然事件 S,有 $P(S)=1$;

性质 3 可加性 若事件 A 和 B 互不相容,则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$。

由以上三性质,很易得到:

推论 1 对不可能事件$\varnothing$,有 $P(\varnothing)=0$;

推论 2 对任一事件 A,有 $P(\overline{A})=1-P(A)$;

推论 3 若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容,则 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)$。

1.2.2 概率的几何定义

古典概率成功地解决了一类概率问题,但它要求试验的可能结果只有有限多个。然而,在实际问题中经常出现试验的可能结果有无穷多个的情况。后来人们发现有些这类问题可以用几何方法来解决,即用几何概率来解决。

向某一可度量的区域 S 内投一点,如果所投的点落在 S 中任意区域 g 内的可能性大小与 g 的度量成正比,而与 g 的位置和形状无关,则称这个随机试验 E 为**几何型随机试验**,或称**几何概型**,S 称为 E 的样本空间。

上面所说的度量,指的是线段的长度、平面区域的面积、空间区域的体积,等等。

定义 1.4 设 E 是一几何概型,S 是它的样本空间。$A\subset S$ 且 A 是可度量的,分别以 L

(S)、$L(A)$表示 S 和 A 的度量。事件“随机点落入区域 A”仍以 A 表示，则称

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(S)}$$

为事件 A 的概率，并称之为**几何概率**。

【例 1.10】 有两个不相关的信号各自在时间间隔 T 内任何瞬间，等可能地进入收音机，如果当且仅当这两个信号进入收音机的时间间隔不大于 t，则收音机受到干扰，试求收音机受到干扰的概率。

解 设 x 及 y 分别表示两信号进入收音机的瞬间，由假定

$$0\leqslant x\leqslant T,0\leqslant y\leqslant T$$

则样本空间是由点(x,y)构成的边长为 T 的正方形 S，其面积为 T^2（见图 1-4）。

依题意，收音机受到干扰的充要条件是

$$|x-y|\leqslant t \quad \text{即} -t\leqslant x-y\leqslant t$$

这个区域就是图 1.4 中的 A，也就是说当(x,y)落入 A 中，则收音机受到干扰。$L(A)=T^2-(T-t)^2$，所以

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(S)}=\frac{T^2-(T-t)^2}{T^2}=1-\left(1-\frac{t}{T}\right)^2$$

从上式可以看到，当 t 相对 T 来说很小时，则 $P(A)\approx 0$，即收音机受到干扰的概率很小，而当 $t\approx T$ 时，则 $P(A)\approx 1$，即收音机以概率 1 受到干扰。

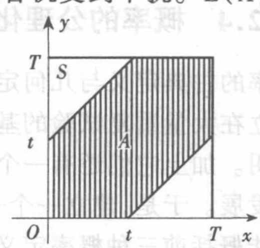

图 1-4

几何概率也具有以下三个基本性质：

性质 1 非负性 对任一事件 A，有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

性质 2 规范性 对必然事件 S，有 $P(S)=1$；

性质 3 可加性 若事件 A 与 B 互不相容，则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$。

1.2.3 概率的统计定义

设事件 A 在 n 次重复试验中出现了 N_A 次，则称比值$\frac{N_A}{n}$为 n 次试验中 A 出现的**频率**，记为 $f_n(A)=\frac{N_A}{n}$。

人们经过长期的实践发现，虽然一个随机事件在一次试验中可能发生，也可能不发生，但在大量的重复试验中这个事件发生的频率具有稳定的特性。

具体地说，在 n 次重复试验中，事件 A 发生了 N_A 次，则当 n 无限增大时，频率 $f_n(A)=\frac{N_A}{n}$ 总是稳定地在某个数值附近摆动。例如掷一枚均匀硬币的试验，随着试验次数的增大，出现正面这一事件的频率总稳定在 $p=0.5$ 附近，请看下表：

试验者	投掷次数	出现正面的次数	出现正面的频率
蒲　丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
维　尼	30000	14994	0.4998

可以看出,不管什么人去投掷,当试验的次数逐渐增多时,出现正面的概率总是在0.5附近摆动且逐渐稳定于0.5,这个数字反映了正面出现的可能性的大小。

频率的稳定性在理论上已经被证明,有关的内容将在5.1节中作介绍。下面我们给出概率的统计定义。

定义1.5 如果随着试验次数 n 的增大,事件 A 发生的频率$\frac{N_A}{n}$在区间[0,1]上某个数字 p 附近摆动,则称事件 A 发生的概率为p。

不难理解,频率同古典概率、几何概率一样,也具有以下性质:

性质1 非负性 对任一事件A,有$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$;

性质2 规范性 对必然事件S,有$f_n(S)=1$;

性质3 可加性 若事件A与B互不相容,则$f_n(A\cup B)=f_n(A)+f_n(B)$。

1.2.4 概率的公理化定义

概率的古典定义与几何定义都是建立在事件的等可能基础上的,因而有局限性。统计定义是建立在大量重复试验的基础上的,虽然比较实用,但试验次数 n 究竟大到什么程度,没有确切说明。加上它们还有一个共同的局限性是不便使用现代数学工具,这就大大地限制了概率论的发展。于是,建立一个一般的定义,以便更广泛更确切地描述随机现象出现的规律性,使其既能概括前三种概率定义,具有一般性,又能使用现代数学工具,就显得十分必要了,概率的公理化定义,就是在这样的背景下产生的。

定义1.6 设S是样本空间,A是随机事件,即$A\subset S$,$P(A)$是实值函数,如果$P(A)$满足以下三条公理:

(1) 非负性:对任一事件A,有$P(A)\geqslant 0$;

(2) 规范性:对必然事件S,有$P(S)=1$;

(3) 可列可加性:若事件$A_1,A_2,\cdots$两两互不相容,则$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$。

则称$P(A)$为事件A的概率。

可以验证,古典概率、几何概率和统计概率都满足此公理化定义,因此,根据这一公理化定义,所推出的任何规律、性质,对它们都是适用的。

由概率的公理化定义,可以推出概率具有下列性质:

性质1 对不可能事件$\varnothing$,有$P(\varnothing)=0$;

性质2 对任一事件A,有$P(\bar{A})=1-P(A)$;

性质3 若$A_1,A_2,\cdots,A_n$两两互不相容,则$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$;

性质4 若$B\subset A$,则$P(A-B)=P(A)-P(B)$,且$P(B)\leqslant P(A)$;

性质5(加法公式) 对任意事件A与B,有$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$。

下面我们只给出性质4和性质5的证明,其余证明请读者自行完成。

性质4:因为$B\subset A$,所以$A=B\cup(A-B)$,又因为$B\cap(A-B)=\varnothing$,故有$P(A)=P(B)+P(A-B)$,于是得

$$P(A-B)=P(A)-P(B)$$

又因为 $P(A-B)\geqslant 0$,所以 $P(B)\leqslant P(A)$。

性质5：由于 $A\cup B=A\cup(B-A)=A\cup(B-AB)$,且 $A\cap(B-AB)=\varnothing, AB\subset A$,因此有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)=P(A)+P(B)-P(AB)$

加法公式(性质5)可以推广到多个事件情形。

例如：$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

一般地,对任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,用数学归纳法不难证明

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1\cdots A_n)$$

【例1.11】 已知 $P(A)=0.3$, $P(B)=0.6$, 试在下列两种情形下分别求出 $P(A-B)$和 $P(B-A)$。

(1) 事件 A,B 互不相容;

(2) 事件 A,B 有包含关系。

解 (1) 由于 $AB=\varnothing$,因此 $A-B=A, B-A=B$,所以

$$P(A-B)=P(A)=0.3$$

$$P(B-A)=P(B)=0.6$$

(2) 由于 $P(A)<P(B)$,因此由性质推得必定是 $A\subset B$,所以

$$P(A-B)=P(\varnothing)=0$$

$$P(B-A)=P(B)-P(A)=0.6-0.3=0.3$$

【例1.12】 某商店开展送货服务,服务质量由是否按期交货以及是否准确交货来评价。根据统计资料,已知其按期交货(记为事件 A)的概率为0.7,准确交货(记为事件 B)的概率为0.8,既按期交货又准确交货的概率为0.6,求:

(1) 既不按期又不正确交货的概率;

(2) 服务质量不好的概率。

解 (1) $\bar{A}\bar{B}=\{$既不按期又不准确交货$\}$

$$\begin{aligned}P(\bar{A}\bar{B})&=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)\\&=1-P(A)-P(B)+P(AB)\\&=1-0.8-0.7+0.6=0.1\end{aligned}$$

(2) 设 $C=\{$服务质量不好$\}$,则 $C=\bar{A}\cup\bar{B}$

$$\begin{aligned}P(C)&=P(\bar{A}\cup\bar{B})=P(\overline{AB})\\&=1-P(AB)\\&=1-0.6=0.4\end{aligned}$$

1.3 条件概率与三个重要公式

1.3.1 条件概率

在实际问题中,除了要知道事件 A 发生的概率 $P(A)$外,有时还需要知道在事件 B 已发生