清华北大学子

高效学习法

中国第一套
杂志式教辅
讲述学习和考试的方法

配套人民教育出版社实验教科书
——A版
高中数学 必修5

主 编 薛金星

祖冲之（429—500）

贡献 在世界数学史上第一次将圆周率（π）值计算到小数点后七位；编制了《大明历》。
影响 揭开了中国古代历法改革的新一页。
赞誉 杰出的数学家、天文学家、机械专家。
名言 愿闻显据，以核理实。浮辞虚贬，窃非所惧。

团结出版社
北京二十一世纪金星教育科技有限公司研发

责任编辑 郑　纪
责任校对 汪　滢
封面设计 魏晋文化

无论你是狮子还是羚羊 你都必须奔跑

NIBIXUBENPAO

速度与生存

黎明的曙光刚刚划破草原的夜空
羚羊猛然惊醒：赶快跑
如果慢了，就可能被狮子吃掉
羚羊起身就跑，向着太阳飞奔而去
狮子也惊醒了：赶快跑
如果慢了，就可能会被饿死
狮子奋起狂追，向着羚羊飞驰而去
无论是自然界兽中之王，还是大草原上食草的羚羊
都意识到一个问题：速度决定生存
那么你是否意识到：什么决定速度

那就是**高效**！

19.80

ISBN 978-7-5126-0449-0
9 787512 604490 >
总定价：148.00元

诚邀全国名师加盟

金星国际教育集团专注于少儿、小学、中学和大学教育类图书的研发策划与出版发行工作，现热诚邀请全国名师加盟“金星教育名师俱乐部”：每县拟选名师 1 人；俱乐部会员将成为本公司长期签约作者，稿酬从优，并可长期享受购书优惠、赠书和及时提供各类教学科研信息等服务。联系地址：山东省潍坊市安顺路 4399 号金星大厦　联系人：王老师
联系电话：0536－2228658　邮编：261021

恳请各位名师对我们研发、出版的图书提出各类修订建议，并提供相应的文字材料。我们将根据建议采用情况及时支付给您丰厚报酬。

诚征各位名师在教学过程中发现的好题、好方法、好教案、好学案等教学与考试研究成果，一旦采用，即付稿酬。

我们欢迎广大一线师生来信、来函、来电、上网与我们交流沟通，为确保交流顺畅，我们特设以下几个交流平台，供您选用：

图书邮购热线：010－61743009　61767818
图书邮购地址：北京市天通苑邮局 6503 信箱　邮购部(收)　邮政编码：102218
第一教育书店：http://www.firstedubook.com
　　　　　　　http://www.第一教育书店.中国
第一教育书店一淘宝店：http://shop58402493.taobao.com
电子邮箱：book@jxedue.net
质量监督热线：0536－2223237
集团网站：http://www.jxedue.net
　　　　　http://www.金星教育.中国
金星教学考试网：http://www.jxjxks.com
金星教育名师俱乐部：http://ms.jxjxks.com

说 明

本书在编辑过程中，为了方便学生学习，选用了一些优秀文章。由于种种原因，有的作者我们未能及时联系上，祈请诸君见谅。请作者老师见书后及时与我们联系，支取为您预留的稿酬，多谢。

地　址：山东省潍坊市安顺路 4399 号　邮　编：261021　电　话：0536－2223136

图书在版编目(CIP)数据
高效学习法：人教实验 A 版．高中数学：必修 / 薛金星主编．
—北京：团结出版社，2011.5
ISBN 978－7－5126－0449－0
Ⅰ.①高… Ⅱ.①薛… Ⅲ.①中学数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.①G634
中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 082152 号

书　名：高效学习法·高中数学必修 5

出　版：团结出版社
(北京市东城区东皇城根南街 84 号　邮编：100006)
电　话：(010)(61743009)(发行部)
　　　　(010)(65228880)(总编室)
网　址：http://www.tjpress.com
Email：65244790@tjpress.com(投诉)
经　销：各地书店经销
印　装：北京海德伟业印务有限公司

开　本：880×1230mm　1/16
总印张：75　字数：3000 千　印数：5000 册
版　次：2011 年 5 月第 1 版　2012 年 1 月第 2 次修订
印　次：2012 年 1 月第 1 次印刷

书　号：ISBN 978－7－5126－0449－0/G·745
总定价：148.00 元

做一个创造名牌的人

>>张之路

我家住的楼房北面，与一所中学隔街相望，紧挨着我家的南面也有一所中学，两所中学相隔不到100米。北面的中学是区重点，南面的中学不但不是什么重点，连一所好的中学也算不上。

去年高考过后，爆出一个新闻：南中理科第一名的分数比北中理科第一名的分数居然高出两分。尽管北中的升学率是百分之九十二，南中只是百分之五，但第一名就是第一名，就像是赛跑，从第二名到第十名尽管是属于你的，但第一名是人家的，就好像北中得了团体总分第一，而南中却得了个单项冠军。这条新闻在我所住的小区不胫而走。街道的大妈大婶们逢人便说，有孩子在南中读书的家长更是喜形于色。

新的学期开始不几天，我接到南中的一份邀请，邀请我去参加他们的一个校会，由考上大学的那个“状元”回母校讲一讲心得体会，请我们这些嘉宾去助威，和学生们讲点鼓励的话。

主席台上站起一个中等个子的男生，不知道是由于紧张还是因为激动，他的声音有些发抖，但他的面前没有预备好的讲稿：

三年前，我是南中的初中毕业生，以我当时的成绩，我是可以考上马路对面的北中的。在填写中考报名表的时候，我突然想，如果我继续留在南中，难道我就考不上大学吗？我不相信！我想证明，南中也有很棒的学生……所有的名牌都是人创造的，我想做一个创造名牌的人，不想做一个享受名牌的人……

我要感谢我的父亲，当时，他鼓励我说，我有这样的想法比他看见我考上大学还要高兴。

在这三年里，可能没有任何人注意，我始终戴着南中的校徽，再热的天气里，我也把它别在背心上。它是一个标志，我用这个标志向一切看不起这个标志的人挑战，也向我自己挑战，在挑战中我获得了力量，在挑战中我得到了快乐！

我不愿意站在太阳的光环下对人说：你们看，我有多亮！我要做一盏灯，用自己的热，发自己的光，我要让南中因为有我这样的学生而有光彩……

会场很安静，我心中感到一阵激动。我已经好多年没有听到这样的话了。

这是一个年轻人的话。

这是一个男子汉应该说的话。

主　　编　薛金星
本册主编　徐桂湘
本册编委　张洪伟
　　　　　张付友

图书邮购热线:(010)61743009　61767818
图书邮购地址:北京市天通苑邮局6503号信箱
邮政编码:102218
图书邮购网址:http://www.firstedubook.com
质量监督热线:(0536)2223237
集团网站:http://www.jxedue.net
金星教学考试网:http://www.jxjxks.com

目录

contents

contents

征稿启事

《高效学习法》面向全国优秀教师征稿。
学科范围：初中语、数、英、物、化，高中语、数、英、物、化、生、政、史、地
开设栏目：重难点突破 易错点辨析 高效能解题 零距离备考 单元复习方法
征稿要求：1. 原创，观点新颖，符合新课标理念，解题方法实用性强。
2. 文中如有计量单位，一律采用国际标准。
3. 文稿字数以不超过 1000 字为宜。
《高效学习法》面向广大中学生征集卷首语。
征稿要求：原创，抒写真情实感的励志美文。字数 800—1000。

师生来稿须知

1. 来稿确保不一稿多投，文责自负。
2. 来稿请用稿纸书写，字迹工整，打印稿更佳，网上投稿也可。注明详细联系地址。
3. 本书有权对来稿作必要的删改，如不同意，请来稿时注明。恕不退稿。
4. 投稿三个月内如未接到稿件采用通知，可转投。
5. 所有来稿，一经采用，稿酬从优。
6. 本公司享有对来稿的出版权。

来稿请寄：山东省潍坊市潍城区安顺路 4399 号
邮　　编：261021
联 系 人：张老师
E—mail：aimengzhang@163.com

第一章 解三角形

1.1 正弦定理和余弦定理

1.1.1 正弦定理

重难点 突破法

正弦定理及其应用

一、正弦定理

在一个三角形中，各边和它所对角的正弦的比相等，并且都等于外接圆的直径，即 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$.

二、正弦定理的常见变形公式

$a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{c\sin A}{\sin C}$，$b=\frac{c\sin B}{\sin C}=\frac{a\sin B}{\sin A}$，$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{b\sin C}{\sin B}$.

$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$.

$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$（R 为 $\triangle ABC$ 外接圆的半径）.

$\sin A=\frac{a}{2R}$，$\sin B=\frac{b}{2R}$，$\sin C=\frac{c}{2R}$.

$\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

三、正弦定理的运用

利用正弦定理，可以解决以下两类有关解三角形的问题：

①已知两角和任意一边，求其他两边和另一角；

②已知两边和其中一边的对角，求另一边的对角.

四、求解与三角形有关的问题

正弦定理是有力的解题工具，解题的关键是找出具备可解决条件的三角形，明确已知的边和角以及待求的边和角.

例 1 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $b=\sqrt{3}$，$B=60^\circ$，$c=1$，解三角形.

解：由正弦定理，知 $\sin C=\frac{c}{b}\cdot\sin B=\frac{1}{2}$.

解得 $C=30^\circ$ 或 150°.

$\because A+B+C=180^\circ$，$\therefore C=150^\circ$ 不合题意，舍去.

从而 $A=90^\circ$，$\therefore a=\sqrt{b^2+c^2}=2$.

例 2 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $2B=A+C$，$b=1$，求 $a+c$ 的取值范围.

解：$\because 2B=A+C$，$\therefore B=60^\circ$.

$\because b=1$，$\therefore \triangle ABC$ 外接圆的半径 $R=\frac{1}{2\sin 60^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore a+c=2R(\sin A+\sin C)=2R[\sin A+\sin(120^\circ-A)]$

$=\frac{2\sqrt{3}}{3}(\sin A+\sin 120^\circ\cos A-\cos 120^\circ\sin A)$

$=2\sin(A+30^\circ)$.

$\because 0^\circ<A<120^\circ$，$\therefore \frac{1}{2}<\sin(A+30^\circ)\leqslant 1$.

故 $a+c$ 的取值范围是 $(1,2]$.

例 3 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\frac{b+a}{a}=\frac{\sin B}{\sin B-\sin A}$，且 $2\sin A\cdot\sin B=2\sin^2 C$，试判断其形状.

解：由正弦定理可得 $\frac{b+a}{a}=\frac{\sin B}{\sin B-\sin A}=\frac{b}{b-a}$，

$\therefore b^2-a^2=ab$. ①

又 $\because 2\sin A\sin B=2\sin^2 C$，

由正弦定理，得 $2ab=2c^2$. ②

由①、②得 $b^2-a^2=c^2$，即 $b^2=a^2+c^2$，

$\therefore$ 该三角形为以 B 为直角顶点的直角三角形.

例 4 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $B=30^\circ$，$AB=2\sqrt{3}$，$AC=2$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

解：由正弦定理，得 $\sin C=\frac{AB\cdot\sin B}{AC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\because AB>AC$，$\therefore C>B$，故 C 有两解.

(1)若 C 为锐角，则 $C=60^\circ$，$A=90^\circ$，

故 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC=2\sqrt{3}$.

(2)若 C 为钝角，则 $C=120^\circ$，$A=30^\circ$，

故 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A=\sqrt{3}$.

即学即练 1

1.（2010·山东）在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c. 若 $a=\sqrt{2}$，$b=2$，$\sin B+\cos B=\sqrt{2}$，则角 A 的大小为________.

2. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=2$，$b=2\sqrt{2}$，$A=30^\circ$，则 $B=$________.

如何应用正弦定理解三角形

正弦定理是解有关三角形知识的继续和发展，进一步揭示了任意三角形的边角关系，是解三角形的利剑之一，下面大家就随我一起去见识一下吧.

一、已知两边及其中一边的对角

例 1 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=\sqrt{2}$，$b=1$，$B=30^\circ$，解三角形.

分析：先由正弦定理求另一边的对角，再由内角和定理求第三角，最后求第三边.

解：由正弦定理和已知条件，

有 $\frac{\sqrt{2}}{\sin A}=\frac{1}{\sin 30^\circ}$，解得 $\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

因为 $a>b$，所以 $A>B$，所以 $A=45^\circ$ 或 135°.

当 $A=45°$ 时，$C=105°$，$c=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$；

当 $A=135°$ 时，$C=15°$，$c=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

点评：在已知两边及其中一边的对角解三角形时，应对是否有解进行判断，如有解，是一解还是两解，千万不要出现漏解的情况.

二、已知两角及任一边

例2 在△ABC中，已知 $a=10\sqrt{2}$，$B=45°$，$C=60°$，求 b、c 及 A.

分析：可先由三角形内角和定理求 A，然后由正弦定理求 c 与 b.

解：由三角形内角和定理，得

$A=180°-(B+C)=180°-(45°+60°)=75°$.

由正弦定理，得

$c=\frac{a\cdot\sin C}{\sin A}=\frac{10\sqrt{2}\cdot\sin 60°}{\sin 75°}=30-10\sqrt{3}$.

$b=\frac{c\cdot\sin B}{\sin C}=\frac{(30-10\sqrt{3})\sin 45°}{\sin 60°}$

$=10\sqrt{6}-10\sqrt{2}$，

所以 $b=10\sqrt{6}-10\sqrt{2}$，$c=30-10\sqrt{3}$，$A=75°$.

点评：如果已知三角形的两个角及任一边，由三角形内角和定理可以计算出三角形的另一角，并由正弦定理计算出三角形的另两边.

当然并不是说所有的三角形问题都能用正弦定理这把利剑来解决，如碰到已知三个边、两边及其夹角等类型的问题就显得力不从心了，要解决它们还需用到解三角形的另一把利剑——余弦定理(下节将学习)，两剑合一，必将所向披靡.

名师导学

即学即练②

1. 在△ABC中，已知 $b=10$，$c=5\sqrt{6}$，$C=60°$，求 A、B 及 a.
2. 在△ABC中，三个内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，若 $a=\frac{\sqrt{5}}{2}b$，$A=2B$，求 $\cos B$.
3. 已知△ABC中，$a=1$，$b=\sqrt{3}$，$B=60°$，求 A、C 和 c.

易错点辨析法　运用正弦定理，小心产生分歧

在运用正弦定理解三角形问题时，同学们在解题时，经常因为审题不细、考虑不周、忽视性质等原因而错解题目. 下面举例作以归纳，以引起同学们的注意.

一、忽视隐含条件

例1 在△ABC中，若 $C=3B$，求 $\frac{c}{b}$ 的取值范围.

错解：由正弦定理可知 $\frac{c}{b}=\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{\sin 3B}{\sin B}=\frac{\sin(B+2B)}{\sin B}=$ $\frac{\sin B\cos 2B+\cos B\sin 2B}{\sin B}=\cos 2B+2\cos^2 B=4\cos^2 B-1$.

由于 $0\leqslant\cos^2 B\leqslant 1$，所以 $-1\leqslant 4\cos^2 B-1\leqslant 3$，

即 $0<\frac{c}{b}\leqslant 3$.

剖析：上述解法中，得到了 $\frac{c}{b}=4\cos^2 B-1$ 后，忽视了三角形内角和定理及隐含的 A、B、C 均为正角这一条件，从而致错.

正解：由正弦定理可知 $\frac{c}{b}=\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{\sin 3B}{\sin B}=\frac{\sin(B+2B)}{\sin B}=$ $\frac{\sin B\cos 2B+\cos B\sin 2B}{\sin B}=\cos 2B+2\cos^2 B=4\cos^2 B-1$.

又 $A+B+C=180°$，$C=3B$，

所以 $0°<B<45°$，所以 $\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos B<1$，

所以 $1<4\cos^2 B-1<3$，故 $1<\frac{c}{b}<3$.

二、忽视分类条件

例2 在△ABC中，已知 $b=3$，$c=3\sqrt{3}$，$B=30°$，求 A 及 a.

错解：由正弦定理和已知条件得 $\sin C=\frac{c\sin B}{b}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 $C=60°$，$A=90°$，所以 $a=\frac{b}{\sin B}=\frac{3}{\frac{1}{2}}=6$.

剖析：本题为已知两边及其中一边的对角解三角形问题，解题时应根据题设分类讨论，而上述解题过程中未根据题设条件分类讨论.

正解：由正弦定理和已知条件得 $\sin C=\frac{c\sin B}{b}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $c\sin B<b<c$，则 C 有两解(锐角或钝角)，

即 $C=60°$ 或 $C=120°$.

①若 $C=60°$，则 $A=90°$，于是 $a=6$；

②若 $C=120°$，则 $A=30°$，于是 $a=3$.

所以 $a=6$，$A=90°$ 或 $a=3$，$A=30°$.

点评：对于已知 a、b 和 A 运用正弦定理求 B 时，必须认真对其进行分类讨论，具体情况参考教材第8页的探究与发现"解三角形的进一步讨论".

三、忽视制约条件

例3 在△ABC中，$c=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，$C=30°$，求 $a+b$ 的最大值.

错解：因为 $C=30°$，所以 $A+B=150°$，则 $B=150°-A$.

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，得

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin(150°-A)}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sin 30°}$.

又因为 $a+b\leqslant 2(\sqrt{6}+\sqrt{2})+2(\sqrt{6}+\sqrt{2})=4(\sqrt{6}+\sqrt{2})$，

故 $a+b$ 的最大值为 $4(\sqrt{6}+\sqrt{2})$.

剖析：上述解法错误的原因是未弄清 A 与 $150°-A$ 之间的关系，这里 A 与 $150°-A$ 是相互制约的量，不是相互独立的量，$\sin A$ 与 $\sin(150°-A)$ 不能同时取最大值1，因此所得的结果是错误的.

正解1：因为 $C=30°$，所以 $A+B=150°$.

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，得

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin(150°-A)}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sin 30°}$.

又因为 $\sin A\leqslant 1$，$\sin(150°-A)\leqslant 1$，

所以 $a+b=2(\sqrt{6}+\sqrt{2})[\sin A+\sin(150°-A)]$

$=(8+4\sqrt{3})\cos(A-75°)\leqslant 8+4\sqrt{3}$，

且当 $A=75°$ 时，等号成立，

故 $a+b$ 的最大值为 $8+4\sqrt{3}$.

正解2：因为 $C=30°$，所以 $A+B=150°$，则 $B=150°-A$.

由正弦定理，得

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin(150^\circ-A)}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sin 30^\circ},$$

因此 $a+b=2(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cdot[\sin A+\sin(150^\circ-A)]$

$$=2(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cdot\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2}\cdot\sin A+\frac{1}{2}\cdot\cos A\right)$$

$$=2(\sqrt{6}+\sqrt{2})\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\times\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\cdot\sin A+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\cdot\cos A\right)$$

$$=2(\sqrt{6}+\sqrt{2})\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\cdot\sin(A+15^\circ).$$

$\because\ \sin(A+15^\circ)\leqslant 1,$

$\therefore\ a+b$ 的最大值为 $2(\sqrt{6}+\sqrt{2})\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$，即 $8+4\sqrt{3}$.

正解 3：如图 1-1-1，延长 BC 到 C'，使 $CC'=AC=b$，则易知 $C'=15^\circ$，

$$a+b=BC'=\frac{BA\cdot\sin\angle BAC'}{\sin\angle BC'A}\leqslant\frac{c}{\sin 15^\circ}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}=8+4\sqrt{3}.（当且仅当 a=b 时等号成立）$$

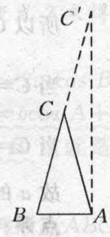


图 1-1-1

点评：解决三角形问题时，要留心三角形内角和为 180° 这一决定性条件，千万不要因为不求甚解而导致错误.

即学即练 3

1. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=8$，$B=60^\circ$，$C=75^\circ$，则 b 等于______.
2. 在 $\triangle ABC$ 中，$\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$，则 $C=$______.
3. 在 $\triangle ABC$ 中，$A=60^\circ$，$B=45^\circ$，$c=1$，求此三角形的最小边长.
4. 在 $\triangle ABC$ 中，$A=45^\circ$，$a=2$，$b=\sqrt{2}$，求角 B.

解题法 高效能

活用正弦定理变形解题

正弦定理的应用极为广泛，它将三角形的边和角有机地联系起来，从而使三角函数与三角形产生联系，是判断三角形形状、解三角形的重要依据. 本文将列举正弦定理的几种变形应用.

一、简单变形：$\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}$，$\frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}$

例 1 在 $\triangle ABC$ 中，若 $b=2a\cdot\sin B$，则 $A=$______.

解析：由 $b=2a\cdot\sin B$，得 $\frac{b}{a}=2\sin B$.

由正弦定理，得 $\frac{b}{a}=\frac{\sin B}{\sin A}$.

所以 $2\sin B=\frac{\sin B}{\sin A}$，又 $\because\ \sin B\neq 0$，所以 $\sin A=\frac{1}{2}$.

所以 $A=30^\circ$ 或 150°.

答案：30° 或 150°

点评：将已知条件全部转化成角的关系，有利于寻求到角与角的内在联系. 这种方法在解其他有关三角形的问题中也是常用的.

二、合比变形：$\frac{a}{\sin A}=\frac{a+b}{\sin A+\sin B}=\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}$

例 2 在 $\triangle ABC$ 中，$A=60^\circ$，$a=\sqrt{3}$，则 $\frac{a+b+2\,010c}{\sin A+\sin B+2\,010\sin C}=$______.

解析：由正弦定理，得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，

所以 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{2\,010c}{2\,010\sin C}$.

所以 $\frac{a+b+2\,010c}{\sin A+\sin B+2\,010\sin C}=\frac{a}{\sin A}$.

又 $A=60^\circ$，$a=\sqrt{3}$，

所以 $\frac{a+b+2\,010c}{\sin A+\sin B+2\,010\sin C}=\frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}=2$.

答案：2

点评：在结构中出现分子和分母中系数对应结构时，可考虑用合比变形处理，即 $\frac{ma+nb+pc}{m\sin A+n\sin B+p\sin C}=\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，$m,n,p\in\mathbf{R}$.

三、连比变形：$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

例 3 在 $\triangle ABC$ 中，$3a+b=2c$，$2a+3b=3c$，则 $\sin A:\sin B:\sin C=$______.

解析：由已知 $\begin{cases}3a+b=2c,\\2a+3b=3c,\end{cases}$ 解得 $b=\frac{5}{7}c$，$a=\frac{3}{7}c$.

所以 $a:b:c=\frac{3}{7}c:\frac{5}{7}c:c=3:5:7$，

所以 $\sin A:\sin B:\sin C=3:5:7$.

答案：$3:5:7$

点评：题中虽不能求出三角形三边的具体值，但是可以求出三边的比，根据正弦定理的变形，即可求出三个内角对应的正弦值的比，简化解题过程.

即学即练 4

1. 在 $\triangle ABC$ 中，$A:B:C=1:2:3$，则 $a:b:c=$______.
2. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $A=\frac{\pi}{3}$，$b=12$，$C=\frac{\pi}{6}$，则 $\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=$______.
3. 在 $\triangle ABC$ 中，求证：$\frac{\cos 2A}{a^2}-\frac{\cos 2B}{b^2}=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}$.

备考法 零距离

走进高考看正弦定理

正弦定理作为解三角形最常用的工具之一，是高考考查的常见题型. 下面举例说明正弦定理在高考中是以何"面貌"现身的.

考点一：与向量相结合

例 1 （2010·浙江）已知平面向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0},\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{\beta})$ 满足 $|\boldsymbol{\beta}|=1$，且 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}$ 的夹角为 120°，则 $|\boldsymbol{\alpha}|$ 的取值范围是______.

解析：记 $\theta=\langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}\rangle$，由正弦定理得 $\frac{|\boldsymbol{\beta}|}{\sin 60^\circ}=\frac{|\boldsymbol{\alpha}|}{\sin\theta}$，

$\therefore\ |\boldsymbol{\alpha}|=\sin\theta\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta$.

又 $0<\theta<120^\circ$，$\therefore\ 0<\sin\theta\leqslant 1$.

即 $0<|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

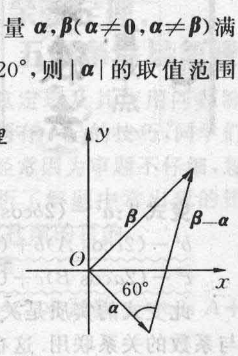


图 1-1-2

答案：$\left(0,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$

点评:本题考查向量的数量积的意义及向量减法的几何意义,考查了数形结合的数学思想,关键是利用正弦定理构造方程进行求解,属难题.

考点二:与倍角公式相结合

例2 (2010·天津)在$\triangle ABC$中,$\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{\cos B}{\cos C}$.

(1)证明$B=C$;

(2)若$\cos A=-\dfrac{1}{3}$,求$\sin\left(4B+\dfrac{\pi}{3}\right)$的值.

(1)**证明**:在$\triangle ABC$中,由正弦定理及已知,得$\dfrac{\sin B}{\sin C}=\dfrac{\cos B}{\cos C}$.

于是$\sin B\cos C-\cos B\sin C=0$,即$\sin(B-C)=0$.

因为$-\pi<B-C<\pi$,从而$B-C=0$.所以$B=C$.

(2)**解**:由$A+B+C=\pi$和(1)得$A=\pi-2B$,

故$\cos 2B=-\cos(\pi-2B)=-\cos A=\dfrac{1}{3}$.

又$0<2B<\pi$,于是$\sin 2B=\sqrt{1-\cos^2 2B}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

从而$\sin 4B=2\sin 2B\cos 2B=\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$,

$\cos 4B=\cos^2 2B-\sin^2 2B=-\dfrac{7}{9}$.

所以$\sin\left(4B+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin 4B\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos 4B\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{4\sqrt{2}-7\sqrt{3}}{18}$.

点评:本题主要考查正弦定理、两角和与差的正弦、同角三角函数的基本关系、二倍角的正弦与余弦等基础知识,同时考查基本运算能力.

考点三:与三角函数相结合

例3 (2010·重庆)设函数$f(x)=\cos\left(x+\dfrac{2}{3}\pi\right)+2\cos^2\dfrac{x}{2}$,$x\in\mathbf{R}$.

(1)求$f(x)$的值域;

(2)记$\triangle ABC$的内角A、B、C的对边长分别为a、b、c,若$f(B)=1$,$b=1$,$c=\sqrt{3}$,求a的值.

解:(1)$f(x)=\cos x\cos\dfrac{2}{3}\pi-\sin x\sin\dfrac{2}{3}\pi+\cos x+1=-\dfrac{1}{2}\cos x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\cos x+1=\dfrac{1}{2}\cos x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x+1=\sin\left(x+\dfrac{5\pi}{6}\right)+1$,因此$f(x)$的值域为$[0,2]$.

(2)由$f(B)=1$得$\sin\left(B+\dfrac{5\pi}{6}\right)+1=1$,

即$\sin\left(B+\dfrac{5\pi}{6}\right)=0$.

又因为$0<B<\pi$,故$B=\dfrac{\pi}{6}$.

由正弦定理$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$,得$\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

所以$C=\dfrac{\pi}{3}$或$C=\dfrac{2\pi}{3}$.

当$C=\dfrac{\pi}{3}$时,$A=\dfrac{\pi}{2}$,从而$a=\sqrt{b^2+c^2}=2$;

当$C=\dfrac{2\pi}{3}$时,$A=\dfrac{\pi}{6}$,又$B=\dfrac{\pi}{6}$,从而$a=b=1$.

故a的值为1或2.

点评:本题考查三角函数的性质、三角变换及解三角形的有关知识,考查学生的运算能力;解题关键是(1)把函数转化为正弦函数求值域;(2)注意C有两解.属基础题.

即学即练 5

1.(2011·浙江)在$\triangle ABC$中,角A,B,C所对的边分别为a,b,c.若$a\cos A=b\sin B$,则$\sin A\cos A+\cos^2 B=$( )

A.$-\dfrac{1}{2}$ B.$\dfrac{1}{2}$ C.-1 D.1

2.(2010·广东)已知a,b,c分别是$\triangle ABC$的三个内角A,B,C所对的边.若$a=1$,$b=\sqrt{3}$,$A+C=2B$,则$\sin C=$____.

3.(2009·杭州高一检测)在$\triangle ABC$中,已知$a^2\tan B=b^2\tan A$,试判断$\triangle ABC$的形状.

4.(2010·大纲全国Ⅱ)$\triangle ABC$中,D为边BC上的一点,$BD=33$,$\sin B=\dfrac{5}{13}$,$\cos\angle ADC=\dfrac{3}{5}$,求$AD$.

1.1.2 余弦定理

突破重难点法

余弦定理变形应用

余弦定理是揭示三角形边角关系的重要定理,直接运用它可以求解两类解三角形问题.若对余弦定理加以变形并适当迁移、应用于其他问题,则更为方便、灵活.

变式1:$a^2-(2b\cos C)a+(b^2-c^2)=0$;

$b^2-(2c\cos A)b+(c^2-a^2)=0$;

$c^2-(2a\cos B)c+(a^2-b^2)=0$.

此变式的实质是关于其中一边的一元二次方程,常和根与系数的关系联用.这在许多问题的处理上,显得简洁明快,比如:已知三角形的两边与其中一边的对角,求第三边.

例1 在$\triangle ABC$中,a、b、c分别是角A、B、C的对边,$a=2\sqrt{3}$,$b=6$,$A=30°$,求角B和边c.

解:由$b^2-(2c\cos A)b+(c^2-a^2)=0$,得

$6^2-(2c\cos 30°)\times 6+c^2-(2\sqrt{3})^2=0$,

整理得$c^2-6\sqrt{3}c+24=0$,

解得$c=4\sqrt{3}$或$c=2\sqrt{3}$.

当$c=4\sqrt{3}$时,

$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{12+48-36}{2\times 2\sqrt{3}\times 4\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}$,

所以$B=60°$;

当$c=2\sqrt{3}$时,$c=a=2\sqrt{3}$,所以$C=A=30°$,所以$B=120°$.

点评:本题利用变式1求解很是巧妙.

变式2:$a^2=(b+c)^2-2bc(1+\cos A)$;

$b^2=(a+c)^2-2ac(1+\cos B)$;

$c^2=(a+b)^2-2ab(1+\cos C)$.

此变式对于给定三角形两边之和及其夹角的问题求解非常便利.

例2 在$\triangle ABC$中，$BC=a$，$AC=b$，a、b是方程$x^2-2\sqrt{3}x+2=0$的两个根，且$2\cos(A+B)=1$.求：

(1)角C的度数；(2)AB的长度.

解：(1)由$2\cos(A+B)=1$，得$\cos(A+B)=\frac{1}{2}$.

所以$A+B=60°$，则$C=120°$.

(2)因为a、b是方程$x^2-2\sqrt{3}x+2=0$的两个根，

所以$a+b=2\sqrt{3}$，$ab=2$.

由变式2得$AB^2=c^2=(a+b)^2-2ab(1+\cos C)=(2\sqrt{3})^2-2\times2(1+\cos 120°)=10$，

所以$AB=\sqrt{10}$，即AB的长度为$\sqrt{10}$.

点评：本题考虑到$2\cos(A+B)=1$，据此先求出$A+B$，再利用三角形内角和定理求出C的度数，最后利用变式2求得AB的长度.

变式3：将$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$两式相加可得$2c^2-2bc\cos A-2ac\cos B=0$，即$c=b\cos A+a\cos B$.同理$b=a\cos C+c\cos A$，$a=b\cos C+c\cos B$.这就是三角形中的射影定理.

例3 在$\triangle ABC$中，若$c=\frac{a+b}{\cos A+\cos B}$，试判断$\triangle ABC$的形状.

解：原等式即$c\cos A+c\cos B=a+b=(b\cos C+c\cos B)+(a\cos C+c\cos A)$，整理得$(a+b)\cos C=0$.

因为$a+b\neq0$，所以$\cos C=0$，即$C=\frac{\pi}{2}$.

故$\triangle ABC$是直角三角形.

点评：三角形中的射影定理和正、余弦定理一样，也是沟通三角形边角关系的重要工具.

即学即练 1

1. 在$\triangle ABC$中，若其面积为$S=\frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2)$，则$C$的大小为( )

A. 135° B. 45° C. 60° D. 120°

2. (2010·天津)在$\triangle ABC$中，内角A,B,C的对边分别是a,b,c.若$a^2-b^2=\sqrt{3}bc$，$\sin C=2\sqrt{3}\sin B$，则$A=$( )

A. 30° B. 60° C. 120° D. 150°

三角形中多解问题支招

学习了正、余弦定理后，不少同学为判断三角形的解的个数而烦恼.当三角形中已知两边和其中一边的对角时，可能出现一解、两解、无解等情况，虽然书上也有相应的方法，可是一些同学茫然依旧.下面提供"两招"供同学们选择，希望能帮助同学们顺利破解.

第一招：大角对大边

在已知$\triangle ABC$中的边长a，b和角A，且已知a，b的大小关系，常利用正弦定理结合"大边对大角"来判断三角形解的个数.一般的做法如下，首先利用大边对大角，判断出角B与角A的大小关系，然后求出B的值，根据三角函数的有界性求解.

例1 在$\triangle ABC$中，已知$a=\sqrt{3}$，$b=\sqrt{2}$，$B=45°$，求A、C及c.

解：由正弦定理，得

$\sin A=\frac{a\sin B}{b}=\frac{\sqrt{3}\sin 45°}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为$B=45°<90°$，$b<a$，所以$A=60°$或$120°$.

当$A=60°$时，$C=75°$，$c=\frac{b\sin C}{\sin B}=\frac{\sqrt{2}\sin 75°}{\sin 45°}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$；

当$A=120°$时，$C=15°$，

$c=\frac{b\sin C}{\sin B}=\frac{\sqrt{2}\sin 15°}{\sin 45°}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

点评：本例属于已知两边及其中一边的对角求解三角形问题类型.此类问题解的情况如下：

	A为钝角	A为直角	A为锐角	
$a>b$	一解	一解	一解	
$a=b$	无解	无解	一解	
$a<b$	无解	无解	$a>b\sin A$	两解
			$a=b\sin A$	一解
			$a<b\sin A$	无解

第二招：二次方程的正根个数

一般地，在$\triangle ABC$中，已知a，b和角A，常常可对角A应用余弦定理，并将其整理为关于c的一元二次方程$c^2-2bc\cos A+b^2-a^2=0$，若该方程无解或只有负数解，则该三角形无解；若方程有一个正数解，则该三角形有一解；若方程有两个不等的正数解，则该三角形有两解.

例2 如图1-1-3，在四边形$ABCD$中，已知$AD\perp CD$，$AD=10$，$AB=14$，$\angle BDA=60°$，$\angle BCD=135°$，求BC的长.

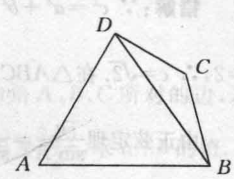


图 1-1-3

解：在$\triangle ABD$中，设$BD=x$，则$BA^2=BD^2+AD^2-2BD\cdot AD\cdot\cos\angle BDA$，

即$14^2=x^2+10^2-2\cdot10\cdot x\cdot\cos 60°$，

整理得$x^2-10x-96=0$，解得$x_1=16$，$x_2=-6$(舍去).

由正弦定理，得$BC=\frac{BD}{\sin\angle BCD}\cdot\sin\angle CDB=\frac{16}{\sin 135°}\cdot\sin 30°=8\sqrt{2}$.

点评：已知三角形两边和其中一边的对角，我们可以采用正弦定理或余弦定理求解，从上述例子可以看出，利用余弦定理结合二次方程来判断显得更加简捷.

触类旁通

即学即练 2

1. 在三角形ABC中，已知$b=2$ cm，$c=3$ cm，$A=60°$，解三角形.

2. 已知$\triangle ABC$中，$a=8$，$b=7$，$B=60°$，求边c的长.

易错点 辨析法

应用正、余弦定理，五类条件易忽视

正、余弦定理及其应用问题综合性强、解题有一定的技巧，同学们在解题时，经常因为审题不仔细，忽视一些条件而导致错误.本文分类剖析了解题中常出现的错误，旨在为同学们提个醒，以达到防微杜渐的目的.

一、忽视三角形三边大小关系致错

例1 在$\triangle ABC$中，如果$AB=AC$，求函数$y=\cos A+\cos B+\cos C$的取值范围.

错解：设三个内角A,B,C对应的三边长分别为a,b,c.由$AB=AC$，得$b=c$，由余弦定理得

$y=\cos A+\cos B+\cos C=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+2\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

$=-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^2+\frac{a}{b}+1=-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}-1\right)^2+\frac{3}{2}\leqslant\frac{3}{2}$,所以 $y\leqslant\frac{3}{2}$,即函数 y 的取值范围为 $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right]$.

剖析:上面解法中,应用余弦定理求函数 y 的表达式是正确的,错误的原因在于求函数 y 的取值范围时,忘记了三角形三边本身所固有的任意两边之和大于第三边.

正解:接错解 $y=-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}-1\right)^2+\frac{3}{2}$.

$\because b+c>a$,即 $2b>a$,$\therefore 0<\frac{a}{b}<2$.

$\therefore 1<-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}-1\right)^2+\frac{3}{2}\leqslant\frac{3}{2}$,

$\therefore$ 函数 y 的取值范围为 $\left(1,\frac{3}{2}\right]$.

二、忽视三角形边角对应关系致错

例2 在 $\triangle ABC$ 中,a,b,c 分别为角 A,B,C 的对边.已知 $a=1,b=2,\cos C=\frac{3}{4}$,求 $\sin(C-A)$ 的值.

错解:$\because c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=1^2+2^2-2\times1\times2\times\frac{3}{4}=2$,$\therefore c=\sqrt{2}$.在 $\triangle ABC$ 中,$\because \cos C=\frac{3}{4}$,$\therefore \sin C=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$ 得 $\sin A=\frac{\sqrt{14}}{8}$,$\therefore \cos A=\pm\frac{5\sqrt{2}}{8}$.

当 $\cos A=\frac{5\sqrt{2}}{8}$ 时,$\sin(C-A)=\sin C\cos A-\cos C\sin A=\frac{\sqrt{7}}{4}\times\frac{5\sqrt{2}}{8}-\frac{3}{4}\times\frac{\sqrt{14}}{8}=\frac{\sqrt{14}}{16}$.同理当 $\cos A=-\frac{5\sqrt{2}}{8}$ 时,

$\sin(C-A)=-\frac{\sqrt{14}}{4}$,$\therefore \sin(C-A)$ 的值为 $\frac{\sqrt{14}}{16}$ 或 $-\frac{\sqrt{14}}{4}$.

剖析:在上述解法中,没有考虑到 $a=1<2=b$ 这个隐含条件,即三角形的边角对应关系,亦即角 A 为锐角.

正解:与上述错解过程相同,求得 $\sin A=\frac{\sqrt{14}}{8}$.

$\because a=1<2=b$,$\therefore A<B$,A 为锐角.$\therefore \cos A=\frac{5\sqrt{2}}{8}$.

$\therefore \sin(C-A)=\sin C\cos A-\cos C\sin A=\frac{\sqrt{7}}{4}\times\frac{5\sqrt{2}}{8}-\frac{3}{4}\times\frac{\sqrt{14}}{8}=\frac{\sqrt{14}}{16}$,$\therefore \sin(C-A)$ 的值为 $\frac{\sqrt{14}}{16}$.

三、忽视三角形的性质而致错

例3 在 $\triangle ABC$ 中,若 $a\cos A=b\cos B$,则 $\triangle ABC$ 的形状是( )

A. 等腰三角形 B. 直角三角形

C. 等腰三角形或直角三角形 D. 等边三角形

错解:因为 $a\cos A=b\cos B$,由正弦定理得,$\sin A\cos A=\sin B\cos B$,即 $\sin 2A=\sin 2B$,所以 $2A=2B$,即 $A=B$,所以 $\triangle ABC$ 是等腰三角形,故选 A.

剖析:仅由 $\sin 2A=\sin 2B$ 就推出 $2A=2B$ 是错误的,忽视了角的范围.

实际上,因为 A,B 是三角形的内角,所以 $2A,2B\in(0,2\pi)$,由 $\sin 2A=\sin 2B$ 应该推出 $2A=2B$ 或 $2A=\pi-2B$,即 $A=B$ 或 $A+B=\frac{\pi}{2}$.故 $\triangle ABC$ 是等腰三角形或直角三角形.

正解:C

点评:常借助正、余弦定理将条件转化成只关于边(或角)的关系,进而判断三角形的形状,但在应用公式求解时,不能忽视三角形的固有条件,如三个内角的范围是 $(0,\pi)$,两边之和大于第三边、两边之差小于第三边等.

四、忽视制约条件而致错

例4 在锐角 $\triangle ABC$ 中,$b=1,c=2$,则 a 的取值范围是( )

A. $1<a<3$ B. $1<a<\sqrt{5}$

C. $\sqrt{3}<a<\sqrt{5}$ D. 不确定

错解:由三角形的性质,知 $c-b<a$,得 $a>1$.

又由 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{5-a^2}{2bc}>0$,得 $0<a<\sqrt{5}$.

所以 $1<a<\sqrt{5}$.

剖析:上述解法忽视了三角形三个内角的关系,即 $A+B+C=180°$,$\cos A>0$ 只能推出 A 为锐角,而不能推出 $\triangle ABC$ 一定为锐角三角形,因为 $A+B+C=180°$,当 $\triangle ABC$ 为锐角三角形时,不仅 $\cos A>0$,还必须满足 $\cos B>0,\cos C>0$.

正解:由三角形的性质,知 $c-b<a$,得 $a>1$.

又由 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{5-a^2}{4}>0$,得 $0<a<\sqrt{5}$.

由 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+3}{2ac}>0$,得 $a\in\mathbf{R}$,

由 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2-3}{2ab}>0$,得 $a>\sqrt{3}$,

综上可得 $\sqrt{3}<a<\sqrt{5}$,故选 C.

五、忽视隐含条件致错

例5 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $a=4+b,a+c=2b$,最大角为 $120°$,求最大边长.

错解:由 $\begin{cases}a-b=4,\\a+c=2b,\end{cases}$ 可得 $b-c=4$,

所以 $a>b>c$,即最大边长为 a,所以 $A=120°$,

因为 $b=a-4,c=b-4=a-8$,

所以在 $\triangle ABC$ 中,由余弦定理得

$\cos A=\frac{(a-4)^2+(a-8)^2-a^2}{2(a-4)(a-8)}=-\frac{1}{2}$,

解得 $a=14$ 或 $a=4$,

所以最大边长为 4 或 14.

剖析:上述错解忽视了已知条件 $a=4+b$ 中隐含的 $a>4$ 这一要求.

正解:由 $\begin{cases}a-b=4,\\a+c=2b,\end{cases}$ 可得 $b-c=4$,

所以 $a>b>c$,即最大边长为 a,

所以 $A=120°$,

因为 $b=a-4,c=b-4=a-8$,

所以在 $\triangle ABC$ 中,由余弦定理得

$\cos A=\frac{(a-4)^2+(a-8)^2-a^2}{2(a-4)(a-8)}=-\frac{1}{2}$,

解得 $a=14$ 或 $a=4$,

因为 $a=4+b$,所以 $a>4$,

所以最大边长为 14.

点评:对于题目中的隐含条件,尤其是范围条件,一定要善于挖掘.

即学即练 3

1. 在 $\triangle ABC$ 中,若 $A=2B$,求 $\frac{a}{b}$ 的取值范围.

2. 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $A=60°,a=\sqrt{6},b=2$,则 $B=$ ______.

3. 在$\triangle ABC$中，已知$a=2$，$b=2\sqrt{2}$，$B=45°$，则$A=$______.

4. 在$\triangle ABC$中，已知$a=2$，$b=2\sqrt{2}$，$C=15°$，则$A=$______.

高效能 解题法

正、余弦定理新交汇点

正、余弦定理是高考的必考内容，题目常交汇，考查同学们综合应用知识解决实际问题的能力，随着新课改的推进，正余弦的交汇点也正发生新变化，下文举例说明，供参考。

一、与二次函数的交汇

例1 在$\triangle ABC$中，$AB=1$，$BC=2$，求角C的取值范围.

解：设$AC=x$，由构成三角形的条件得$1<x<3$.

根据余弦定理得$x^2+4-4x\cos C=1$，

即$x^2-4x\cos C+3=0$.

因为关于x的方程在$(1,3)$之间有解，

令$f(x)=x^2-4\cos C\cdot x+3$，

所以有$f(1)f(3)<0$或$\begin{cases}f(1)>0,\\ f(3)>0,\\ 1<2\cos C<3,\\ \Delta\geqslant 0,\end{cases}$

解得$\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant\cos C<1$. 又$0<C<\pi$，所以$0<C\leqslant\frac{\pi}{6}$.

二、与三角函数的交汇

例2 在$\triangle ABC$中，a、b、c分别是内角A、B、C的对边，已知$2\sqrt{2}(\sin^2A-\sin^2C)=(a-b)\sin B$，$\triangle ABC$的外接圆半径为$\sqrt{2}$.

(1)求C的大小；

(2)求$\triangle ABC$的面积S的最大值.

解：(1)因为$\triangle ABC$外接圆半径为$\sqrt{2}$，

所以$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2\sqrt{2}$，

故$\sin A=\frac{a}{2\sqrt{2}}$，$\sin B=\frac{b}{2\sqrt{2}}$，$\sin C=\frac{c}{2\sqrt{2}}$.

由$2\sqrt{2}(\sin^2A-\sin^2C)=(a-b)\sin B$，得

$2\sqrt{2}\left(\frac{a^2}{8}-\frac{c^2}{8}\right)=(a-b)\cdot\frac{b}{2\sqrt{2}}$，

即$a^2+b^2-c^2=ab$，

所以$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2}$.

又C为三角形的一个内角，所以$C=60°$.

(2)由题意，得$c=2\sqrt{2}\sin 60°=\sqrt{6}$，

所以$a^2+b^2-6=ab$，

由$a^2+b^2\geqslant 2ab$，可得$2ab-6\leqslant ab$，所以$ab\leqslant 6$.

故$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin 60°\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

所以$\triangle ABC$的面积S的最大值为$\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

点评：同学们在解题过程中，要注意挖掘题目中的隐含条件，根据大边对大角，小边对小角，三个内角和为180°等公理，正确确定变量的取值范围. 三角形内的三角函数问题，往往和三角形面积、周长，三角形的外接圆、内切圆，三角形的重心、垂心、内心相联系，解决问题运用的数学思想方法主要有函数与方程思想，消元、变元思想，要注意掌握.

三、与三角恒等变换的交汇

例3 化简：$\sin 50°(1+\sqrt{3}\tan 10°)$.

分析：该例是一道常规的三角恒等变形的问题，可构造三角形，借助正弦定理来求解.

解：如图1-1-4，作$\triangle ABC$，使$\angle BAC=40°$，$\angle B=80°$，$\angle C=60°$，$AC=2$.

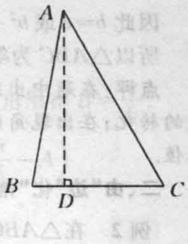


图 1-1-4

作$AD\perp BC$于D，则$\angle BAD=10°$，

$AD=AC\sin 60°=\sqrt{3}$，$BD=AD\tan 10°=\sqrt{3}\tan 10°$，$DC=1$，$BC=1+\sqrt{3}\tan 10°$.

在$\triangle ABC$中，由正弦定理得

$\frac{BC}{\sin\angle BAC}=\frac{AC}{\sin B}$，

所以$\frac{1+\sqrt{3}\tan 10°}{\sin 40°}=\frac{2}{\sin 80°}=\frac{1}{\sin 40°\cos 40°}$，

即$\cos 40°(1+\sqrt{3}\tan 10°)=1$，

故$\sin 50°(1+\sqrt{3}\tan 10°)=1$.

点评：解三角形问题，若能利用图形，可以帮你直观思考，并能使问题的解决变得简洁明快.

即学即练 4

1. 在锐角$\triangle ABC$中，a、b、c分别为角A、B、C所对的边，若$C=\frac{\pi}{3}$，$c=\sqrt{7}$，且$\triangle ABC$的面积为$\frac{3\sqrt{3}}{2}$，求$a+b$的值.

2. 设正数x、y、z满足方程组$\begin{cases}x^2+xy+\frac{1}{3}y^2=5^2,\\ \frac{1}{3}y^2+z^2=3^2,\\ x^2+xz+z^2=4^2,\end{cases}$

试求$xy+2yz+3xz$的值.

3. 在$\triangle ABC$中，已知$A:B=1:2$，求证：$a^2+ac=b^2$.

4. 在$\triangle ABC$中，$a^2+\sqrt{3}ab+b^2=c^2$，求C.

边角互化 巧定形状

应用正、余弦定理判断三角形形状主要有如下两条途径：

(1)利用正、余弦定理把已知条件转化为边边关系，通过因式分解、配方等得出边的相应关系，从而判断三角形的形状.

(2)利用正、余弦定理把已知条件转化为内角的三角函数间的关系，通过三角函数恒等变形，得出内角的关系，从而判断出三角形的形状，此时要注意应用$A+B+C=\pi$这个结论.

下面通过典型例题，体验一下正、余弦定理判断三角形形状的妙处.

一、由"角"化"边"

例1 (1)在$\triangle ABC$中，若$\cos B\sin A=\sin C$，则$\triangle ABC$的形状一定是(　　)

A. 等腰直角三角形　　B. 直角三角形

C. 等腰三角形　　D. 等边三角形

分析：利用$\frac{\sin C}{\sin A}=\frac{c}{a}$可实现角化边，出现$\cos B$，再利用余弦定理化成边.

解：$\because\cos B\sin A=\sin C$，$\therefore\cos B=\frac{c}{a}$.

又由余弦定理，知$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$.

$\therefore c^2+b^2=a^2$.　　**答案**：B

(2)在$\triangle ABC$中,已知$a(b\cos B-c\cos C)=(b^2-c^2)\cos A$,试判断$\triangle ABC$的形状.

解:根据余弦定理,得$a\left(b\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}-c\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)=(b^2-c^2)\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$,整理得$(b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)=0$,

因此$b=c$或$b^2+c^2=a^2$,

所以$\triangle ABC$为等腰三角形或直角三角形.

点评:在题中出现角的余弦值时常可以根据余弦定理完成边的转化;在出现角的正弦比时常见思路是转化为相应边的比值.

二、由“边”化“角”

例2 在$\triangle ABC$中,若$B=60°$,$2b=a+c$,试判断$\triangle ABC$的形状.

分析:题中边的大小没有明确给出,而是通过一个关系式给出的,可以考虑利用正弦定理将边的关系转化为角的关系来判断.

解:根据正弦定理,$2b=a+c$可转化为$2\sin B=\sin A+\sin C$.又$\because B=60°$,

$\therefore A+C=120°$,即$C=120°-A$,

$\therefore 2\sin 60°=\sin A+\sin(120°-A)$,

$\therefore \sqrt{3}=\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\frac{1}{2}\sin A$,

$\therefore \sqrt{3}=\frac{3}{2}\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A$,

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2}\sin A+\frac{1}{2}\cos A=1$.

整理得$\sin(A+30°)=1$,$\therefore A=60°$,$C=60°$.

$\therefore \triangle ABC$是等边三角形.

点评:当条件中出现“边”的齐次式时,可利用正弦定理来转化,特别是把$a=2R\sin A$,$b=2R\sin B$,$c=2R\sin C$代入,可将边转化为角.

三、“边”“角”互化

例3 在$\triangle ABC$中,已知$(a^2+b^2)\sin(A-B)=(a^2-b^2)\cdot\sin(A+B)$,试判断该三角形的形状.

解法1:(化边)设$\triangle ABC$的外接圆半径为R,因为$(a^2+b^2)(\sin A\cos B-\cos A\sin B)=(a^2-b^2)(\sin A\cos B+\cos A\sin B)$,即$2a^2\cos A\sin B=2b^2\sin A\cos B$,

所以$a^2\frac{b}{2R}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=b^2\frac{a}{2R}\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$,

化简得$(a^2-b^2)c^2-(a^2-b^2)(a^2+b^2)=0$,

故有$(a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)=0$,

所以$a^2-b^2=0$或$a^2+b^2-c^2=0$,

即$a=b$或$c^2=a^2+b^2$.

故该三角形为等腰三角形或直角三角形.

解法2:(化角)因为$(a^2+b^2)(\sin A\cos B-\cos A\sin B)=(a^2-b^2)(\sin A\cos B+\cos A\sin B)$,

即$2a^2\cos A\sin B=2b^2\sin A\cos B$,

由正弦定理得$\sin^2 A\cos A\sin B=\sin^2 B\cos B\sin A$,

所以$\sin A\sin B(\sin A\cos A-\sin B\cos B)=0$.

因为$A>0$,$B>0$,所以$\sin A\sin B\neq 0$,

从而$\sin A\cos A-\sin B\cos B=0$,

所以$\sin A\cos A=\sin B\cos B$,

即$\sin 2A=\sin 2B$,

得$2A=2B$或$2A+2B=180°$,

即$A=B$或$A+B=90°$.

故$\triangle ABC$是等腰三角形或直角三角形.

例4 在$\triangle ABC$中,若已知$(a+b+c)(a+b-c)=3ab$,并且$\sin C=2\sin B\cos A$,试判断$\triangle ABC$的形状.

分析:本题出现了正弦的比值,要注意向边的方向转化.

解:由正弦定理,可得$\sin B=\frac{b}{2R}$,$\sin C=\frac{c}{2R}$.

由余弦定理,得$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

代入$\sin C=2\sin B\cos A$,得$c=2b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

整理得$a=b$.

又因为$(a+b+c)(a+b-c)=3ab$,所以$a^2+b^2-c^2=ab$,

即$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2}$,故$C=\frac{\pi}{3}$.

又$a=b$,所以$\triangle ABC$为等边三角形.

点评:本题是将所给的边的关系$(a+b+c)(a+b-c)=3ab$,利用余弦定理转化为角,同时将角的关系$\sin C=2\sin B\cos A$,利用正弦定理和余弦定理转化为边.

即学即练 5

1. 在$\triangle ABC$中,$\sin B=\sin A\cdot\cos C$,其中A,B,C是$\triangle ABC$的三个内角,且$\triangle ABC$最大边长是12,最小角的正弦值是$\frac{1}{3}$.

(1)判断$\triangle ABC$的形状;

(2)求$\triangle ABC$的面积.

2. 在$\triangle ABC$中,$\sin A:\sin B:\sin C=2:3:4$,试判断$\triangle ABC$的形状.

3. 在$\triangle ABC$中,已知$c=a\cos B$,$b=a\sin C$,试判断$\triangle ABC$的形状.

4. 已知方程$x^2-(b\cos A)x+a\cos B=0$的两根之积等于两根之和,且a,b为$\triangle ABC$的两边,A,B为两内角,试判断这个三角形的形状.

备考法 零距离

高考青睐的正、余弦定理

正、余弦定理是十分重要的基本定理,在中学数学中有着非常广泛的应用.高考命题作为中学数学教学的“指挥棒”,它特别青睐这一块内容,下面请欣赏各地的高考真题.

一、求三角形的边与角

例1 (2010·浙江)在$\triangle ABC$中,角A,B,C所对的边分别为a,b,c,已知$\cos 2C=-\frac{1}{4}$.

(1)求$\sin C$的值;

(2)当$a=2$,$2\sin A=\sin C$时,求b及c的长.

解:(1)$\because \cos 2C=1-2\sin^2 C=-\frac{1}{4}$,$0<C<\pi$,

$\therefore \sin C=\frac{\sqrt{10}}{4}$.

(2)当$a=2$,$2\sin A=\sin C$时,由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$,得$c=4$.

由$\cos 2C=2\cos^2 C-1=-\frac{1}{4}$及$0<C<\pi$得$\cos C=\pm\frac{\sqrt{6}}{4}$.

由余弦定理$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$,得

$b^2\pm\sqrt{6}b-12=0(b>0)$,

解得 $b=\sqrt{6}$ 或 $2\sqrt{6}$，

$\therefore \begin{cases} b=\sqrt{6}, \\ c=4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} b=2\sqrt{6}, \\ c=4. \end{cases}$

点评：本题主要考查三角变换、正弦定理、余弦定理等基础知识，同时考查运算求解能力.

二、判断三角形的形状

例2 (2010·辽宁)在 $\triangle ABC$ 中，a,b,c 分别为内角 A，B,C 的对边，且 $2a\sin A=(2b+c)\sin B+(2c+b)\sin C$.

(1)求 A 的大小；

(2)若 $\sin B+\sin C=1$，试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

解：(1)由已知，根据正弦定理得

$2a^2=(2b+c)b+(2c+b)c$，

即 $a^2=b^2+c^2+bc$. ①

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

故 $\cos A=-\dfrac{1}{2}$，$A=120°$.

(2)由①得 $\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C+\sin B\sin C$.

又 $\sin B+\sin C=1$，故 $\sin B=\sin C=\dfrac{1}{2}$.

因为 $0°<B<90°$，$0°<C<90°$，故 $B=C$.

所以 $\triangle ABC$ 是等腰钝角三角形.

点评：本题主要考查正、余弦定理及两角和的正弦公式，侧重考查了三角形的性质及运算求解能力，难度较小.

三、求范围

例3 (广东高考)已知 $\triangle ABC$ 顶点的直角坐标分别为 $A(3,4)$、$B(0,0)$、$C(c,0)$.

(1)若 $c=5$，求 $\sin A$ 的值；

(2)若 A 是钝角，求 c 的取值范围.

(1)**解法1：**$\because A(3,4)$，$B(0,0)$，

$\therefore AB=5$，$\sin B=\dfrac{4}{5}$.

当 $c=5$ 时，$BC=5$，

$AC=\sqrt{(5-3)^2+(0-4)^2}=2\sqrt{5}$.

根据正弦定理得

$\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{AC}{\sin B}$，$\therefore \sin A=\dfrac{BC}{AC}\sin B=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

解法2：$\because A(3,4)$，$B(0,0)$，$\therefore AB=5$.

当 $c=5$ 时，$BC=5$，

$AC=\sqrt{(5-3)^2+(0-4)^2}=2\sqrt{5}$.

根据余弦定理得

$\cos A=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

$\therefore \sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

(2)**解：**已知 $\triangle ABC$ 顶点坐标为 $A(3,4)$、$B(0,0)$、$C(c,0)$，

$\therefore AC^2=(c-3)^2+4^2$，$BC^2=c^2$，

根据余弦定理得

$\cos A=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}$，

若 A 是钝角，则 $\cos A<0$，

$\therefore AB^2+AC^2-BC^2<0$，

即 $5^2+(c-3)^2+4^2-c^2=50-6c<0$，

解得 $c>\dfrac{25}{3}$.

点评：本题考查两个定理的综合应用，在利用余弦定理解三角形时要注意，若 A 为钝角，则 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}<0\Leftrightarrow$ $b^2+c^2<a^2$；若 A 为锐角，则 $\cos A>0\Leftrightarrow b^2+c^2>a^2$.

例4 (全国高考Ⅰ)设锐角 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，$a=2b\sin A$.

(1)求 B 的大小；

(2)求 $\cos A+\sin C$ 的取值范围.

解：(1)由 $a=2b\sin A$，

根据正弦定理得 $\sin A=2\sin B\sin A$，

所以 $\sin B=\dfrac{1}{2}$. 由 $\triangle ABC$ 为锐角三角形得 $B=\dfrac{\pi}{6}$.

(2)$\cos A+\sin C=\cos A+\sin\left(\pi-\dfrac{\pi}{6}-A\right)$

$=\cos A+\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+A\right)$

$=\cos A+\dfrac{1}{2}\cos A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin A$

$=\sqrt{3}\sin\left(A+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

由 $\triangle ABC$ 为锐角三角形知，

$\dfrac{\pi}{2}>A>\dfrac{\pi}{2}-B$，$\dfrac{\pi}{2}-B=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}$.

所以 $\dfrac{2\pi}{3}<A+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{5\pi}{6}$，

所以 $\dfrac{1}{2}<\sin\left(A+\dfrac{\pi}{3}\right)<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

由此有 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}<\sqrt{3}\sin\left(A+\dfrac{\pi}{3}\right)<\dfrac{3}{2}$.

所以 $\cos A+\sin C$ 的取值范围为 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2}\right)$.

点评：本题容易忽略 $\triangle ABC$ 为锐角三角形 $\Leftrightarrow A,B,C\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

四、数形结合解三角形

例5 (2010·陕西)如图1-1-5，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle B=45°$，D 是 BC 边上的一点，$AD=10$，$AC=14$，$DC=6$，求 AB 的长.

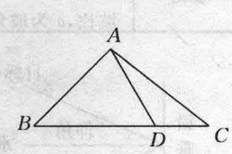


图1-1-5

解：在 $\triangle ADC$ 中，$AD=10$，$AC=14$，$DC=6$，

由余弦定理得 $\cos\angle ADC=\dfrac{AD^2+DC^2-AC^2}{2AD\cdot DC}=\dfrac{100+36-196}{2\times10\times6}=-\dfrac{1}{2}$，$\therefore \angle ADC=120°$，$\angle ADB=60°$.

在 $\triangle ABD$ 中，$AD=10$，$\angle B=45°$，$\angle ADB=60°$，

由正弦定理得 $\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}=\dfrac{AD}{\sin B}$，

$\therefore AB=\dfrac{AD\cdot\sin\angle ADB}{\sin B}=\dfrac{10\sin 60°}{\sin 45°}=\dfrac{10\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=5\sqrt{6}$.

点评：本题主要考查利用正弦定理和余弦定理解三角形，同时考查运算求解能力.

考题回放

即学即练

1. (2010·江苏)在锐角 $\triangle ABC$ 中，角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c. 若 $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}=6\cos C$，则 $\dfrac{\tan C}{\tan A}+\dfrac{\tan C}{\tan B}$ 的值是________.

2.(2011·天津)如图1-1-6,在$\triangle ABC$中,D是边AC上的点,且$AB=AD$,$2AB=\sqrt{3}BD$,$BC=2BD$,则$\sin C$的值为(　　)

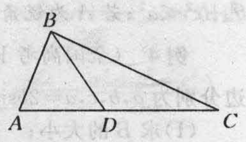


图1-1-6

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{6}$

3.(2010·重庆)设$\triangle ABC$的内角A、B、C的对边长分别为a、b、c,且$3b^2+3c^2-3a^2=4\sqrt{2}bc$.

(1)求$\sin A$的值;

(2)求$\dfrac{2\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(B+C+\frac{\pi}{4}\right)}{1-\cos 2A}$的值.

4.(安徽高考)在$\triangle ABC$中,$\sin(C-A)=1$,$\sin B=\frac{1}{3}$.

(1)求$\sin A$的值;

(2)设$AC=\sqrt{6}$,求$\triangle ABC$的面积.

1.2　应用举例

1.3　实习作业

重难点突破法

解三角形相关知识表解

一、常见的有关名词、术语

名词、术语	意义
仰角与俯角	与目标视线同在一铅垂平面内的水平视线和目标视线的夹角,目标视线在水平视线上方时叫仰角;目标视线在水平视线下方时叫俯角,如图1-2-1
方位角	一般是指北方向线顺时针到目标方向线的水平角.如方位角45°,是指北偏东45°,即东北方向
坡角	坡面与水平面的夹角
坡比	坡面的铅直高度与水平宽度之比,即$i=\frac{h}{l}=\tan\alpha$(i为坡比,α为坡角),如图1-2-2

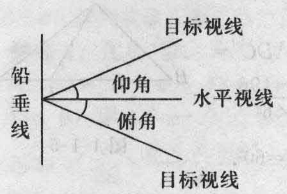


图1-2-1

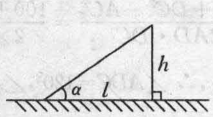


图1-2-2

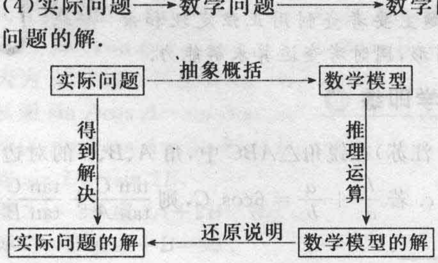
二、解三角形应用题的一般步骤

(1)读懂题意,理解问题的实际背景,明确已知与所求,理清量与量之间的关系;

(2)根据题意画出示意图,将实际问题抽象成解三角形模型;

(3)正确选择正、余弦定理求解;

(4)实际问题$\xrightarrow{画图}$数学问题$\xrightarrow{解三角形}$数学问题的解$\xrightarrow{检验}$实际问题的解.



三、解三角形常见类型与解法

已知条件	应用定理	一般解法
一边和两角(如a、B、C)	正弦定理	由$A+B+C=180°$,求角A.由正弦定理求出b与c,在有解时只有一解
两边和夹角(如a、b、C)	余弦定理 正弦定理	由余弦定理求第三边c,再由正弦定理求出小边所对的角,再由$A+B+C=180°$求出另一角,在有解时只有一解
三边(如a、b、c)	余弦定理	由余弦定理求出角A、B,再利用$A+B+C=180°$,求出角C,在有解时只有一解
两边和其中一边的对角(如a、b、A)	正弦定理 余弦定理	由正弦定理求出角B,由$A+B+C=180°$,求出角C,再用正弦或余弦定理求出边c,可有两解、一解或无解

四、数学建模举例

例1　如图1-2-3,在斜度一定的山坡上的一点A测得山顶上一建筑物顶端C对于山坡的斜度为15°,向山顶前进100米后,又从B点测得斜度为45°,设建筑物的高为50米.求此山相对于地平面的倾斜角θ.

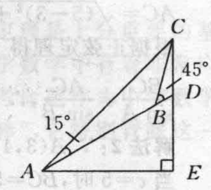


图1-2-3

分析:设此山相对于地平面的倾斜角$\angle EAD=\theta$,这样可在$\triangle ABC$中利用正弦定理求出BC;再在$\triangle BCD$中,利用正弦定理得到关于θ的三角函数,进而解得θ.

解:在$\triangle ABC$中,$\angle BAC=15°$,

$\angle CBA=180°-45°=135°$,$\therefore\angle ACB=30°$,

又$AB=100$,根据正弦定理有$\frac{100}{\sin 30°}=\frac{BC}{\sin 15°}$,

$\therefore BC=\frac{100\sin 15°}{\sin 30°}$.

在$\triangle BCD$中,$CD=50$,$BC=\frac{100\sin 15°}{\sin 30°}$,

$\angle CBD=45°$,$\angle CDB=90°+\theta$,

根据正弦定理有$\frac{50}{\sin 45°}=\dfrac{\frac{100\sin 15°}{\sin 30°}}{\sin(90°+\theta)}$,

解得$\cos\theta=\sqrt{3}-1$,$\therefore\theta\approx 42.94°$.

$\therefore$此山相对于地平面的倾斜角约为42.94°.