

高等学校应用型本科经管类基础课“十二五”规划教材

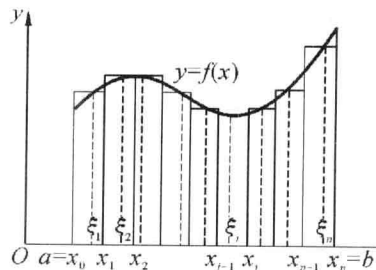
# 微积分<sub>下</sub>

WEIJIFEN (XIA)

► 主编 马建新 强静仁 吴小霞



华中科技大学出版社  
http://www.hustp.com



高等学校应用型本科经管类基础课“十二五”规划教材

# 微积分(下)

WEIJIFEN (XIA)

► 主编 马建新 强静仁 吴小霞

► 编委 (以姓氏笔画排序)

马建新	朱家砚	江成顺
陈芬	何友鸣	何志坚
吴小霞	杨建华	邹顺华
孟晓华	强静仁	



华中科技大学出版社

<http://www.hustp.com>

中国·武汉

## 图书在版编目(CIP)数据

微积分(下)/马建新 强静仁 吴小霞 主编. —武汉: 华中科技大学出版社,  
2012. 2  
ISBN 978-7-5609-7576-4

I. 微… II. ①马… ②强… ③吴… III. 微积分-高等学校-教材 IV. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 254843 号

微积分(下)

马建新 强静仁 吴小霞 主编

责任编辑: 史永霞

封面设计: 龙文装帧

责任校对: 周娟

责任监印: 张正林

出版发行: 华中科技大学出版社(中国·武汉)

武昌喻家山 邮编: 430074 电话: (027)87557437

录排: 武汉市兴明图文信息有限公司

印刷: 湖北新华印务有限公司

开本: 787mm×960mm 1/16

印张: 12.75

字数: 256千字

版次: 2012年2月第1版第1次印刷

定 价: 25.50元



本书若有印装质量问题, 请向出版社营销中心调换  
全国免费服务热线: 400-6679-118 竭诚为您服务  
版权所有 侵权必究

## 序

课本乃一课之“本”。虽然高校的教材一般不会被称为“课本”，其分量也没有中小学课本那么重，但教材建设实为高校的基本建设之一，这大概是多数人都接受或认可的。

无论是教还是学，教材都是不可或缺的。一本好的教材，既是学生的良师益友，亦是教师之善事利器。应该说，这些年来，我国的高校教材建设工作取得了很大的成绩。其中，举全国之力而编写的“统编教材”和“规划教材”，为千百万人的成才作出了突出的贡献。这些“统编教材”和“规划教材”无疑具有权威性；但客观地说，随着我国社会改革的深入发展，随着高校的扩招和办学层次的增多，以往编写的各种“统编教材”和“规划教材”，就日益显露出其弊端和不尽如人意之处。其中最为突出的表现在于两个方面。一是内容过于庞杂。无论是“统编教材”还是“规划教材”，由于过分强调系统性与全面性，以至于每本教材都是章节越编越长，内容越写越多，不少教材在成书时接近百万字，甚至超过百万字，其结果既不利于学，也不便于教，还增加了学生的经济负担。二是重理论轻技能。几乎所有的“统编教材”和“规划教材”都有一个通病，即理论知识的分量相当重甚至太重，技能训练较少涉及。这样的教材，不要说“二本”、“三本”的学生不宜使用，就是一些“一本”的学生也未必合适。

现代高等教育背景下的本专科合格毕业生应该同时具备知识素质和技能素质。改革开放以后，人们都很重视素质教育；毫无疑问，素质教育中少不了知识素质的培养，但是仅注重学生知识素质的培养而轻视实际技能的获得肯定是不对的。我们都知道，在任何国家和任何社会，高端的研究型人才毕竟是少数，应用型、操作型人才才是社会所需的大量人才。因此，对于“二本”尤其是“三本”及高职高专的学生来说，在大学阶段的学习中，其知识素质与技能素质的培养具有同等的重要性。从一定意义上说，为了使其动手能力和实践能力明显强于少数日后从事高端研究的人才，这类学生技能素质的培养甚至比知识素质的培养还要重要。

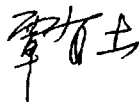
学生技能素质的培养涉及方方面面，教材的选择与使用便是其中重要的一环。正是基于上述考虑，在贯彻落实科学发展观的活动中，我们结合“二本”尤其是“三本”及高职高专学生培养的实际，组织编写了这一套系列教材。这一套教材与以往的“统编教材”和“规划教材”有很大的不同。不同在哪里？其一，体例与内容有所不同。每本教材一般不超过40万字。这样，既利于学，亦便于教。其二，理论与技能并重。在确保基本理论与基本知识不能少的前提下，注重专业技能的训练，增加专业技能训练的内容，让“二本”、“三本”及高职高专的学生通过本专科阶段的学习，在动手能力上明显强于研究生和“一本”的学生。当然，我们的这些努力无疑也

是一种摸索。既然是一种摸索,其中的不足和疏漏甚至谬误就在所难免。

中南财经政法大学武汉学院在本套教材的组织编写活动中,为了确保质量,成立了以主管教学的副院长徐仁璋教授为主任的教材建设委员会,并动员校内外上百名专家学者参加教材的编写工作。在这些学者中,既有曾经担任国家“规划教材”、“统编教材”的主编或撰写人的老专家,也有教学经验丰富、参与过多部教材编写的年富力强的中年学者,还有很多博士、博士后及硕士等青年才俊。他们之中不少人都已硕果累累,因而仅就个人的名利而言,编写这样的教材对他们并无多大意义。但为了教育事业,他们都能不计个人得失,甘愿牺牲大量的宝贵时间来编写这套教材,精神实为可嘉。在教材的编写和出版过程中,我们还得到了众多前辈、同仁及方方面面的关心、支持和帮助。在此,对为本套教材的面世而付出辛勤劳动的所有单位和个人表示衷心的感谢。

最后,恳请学界同仁和读者对本套教材提出宝贵的批评和建议。

中南财经政法大学武汉学院院长



2011. 7. 16

# 目 录

<b>第 7 章 定积分</b> .....	(1)
7.1 定积分的概念 .....	(1)
7.2 定积分的性质 .....	(6)
7.3 定积分的基本公式 .....	(9)
7.4 定积分的换元积分法和分部积分法 .....	(15)
7.5 广义积分与 $\Gamma$ 函数 .....	(20)
7.6 定积分的应用 .....	(26)
数学家莱布尼茨简介 .....	(37)
第 7 章总习题 .....	(39)
<b>第 8 章 无穷级数</b> .....	(42)
8.1 常数项级数 .....	(42)
8.2 正项级数 .....	(49)
8.3 任意项级数 .....	(55)
8.4 幂级数 .....	(59)
8.5 函数展开成幂级数 .....	(64)
8.6 幂级数的应用举例 .....	(69)
数学家阿贝尔简介 .....	(71)
第 8 章总习题 .....	(72)
<b>第 9 章 多元函数微积分</b> .....	(75)
9.1 空间解析几何 .....	(75)
9.2 多元函数 .....	(79)
9.3 二元函数的极限与连续 .....	(84)
9.4 偏导数与全微分 .....	(89)
9.5 多元复合函数求导法则 .....	(97)
9.6 隐函数及其求导法则 .....	(102)
9.7 二元函数的极值 .....	(109)
9.8 二重积分 .....	(114)
数学家陈省身简介 .....	(127)
第 9 章总习题 .....	(128)

---

<b>第 10 章 微分方程与差分方程</b> .....	(133)
10.1 微分方程的一般概念 .....	(133)
10.2 一阶微分方程 .....	(136)
10.3 几种二阶微分方程 .....	(144)
* 10.4 二阶常系数线性微分方程 .....	(147)
10.5 差分方程 .....	(154)
* 10.6 一阶常系数线性差分方程 .....	(157)
数学家拉普拉斯简介 .....	(161)
第 10 章总习题 .....	(162)
<b>第 11 章 Mathematica 7.0 简介(续)</b> .....	(164)
11.1 Mathematica 在定积分中的应用 .....	(164)
11.2 Mathematica 在多元函数微积分中的应用 .....	(168)
11.3 Mathematica 在无穷级数中的应用 .....	(172)
11.4 Mathematica 在微分方程中的应用 .....	(174)
数学家约翰·冯·诺依曼简介 .....	(175)
<b>部分参考答案</b> .....	(177)

# 第 7 章 定 积 分

世界上没有两片完全相同的树叶.

—— 莱布尼茨

不定积分是微分法逆运算的一个侧面,定积分则是它的另一个侧面.本章先引入定积分的概念,然后讨论定积分的性质、计算方法,以及定积分在几何、经济方面的应用.

## 7.1 定积分的概念

### 7.1.1 定积分产生的实际背景

#### 1. 曲边梯形的面积

设  $y = f(x)$  是定义在  $[a, b]$  上的非负连续函数. 由曲线  $y = f(x)$  ( $f(x) \geq 0$ ), 直线  $x = a$ ,  $x = b$  及  $x$  轴所围成的平面图形称为曲边梯形 (见图 7-1). 曲边梯形的面积可用下述方法计算.

如果曲边梯形在底边上各点处的高  $f(x)$  在  $[a, b]$  上是常数, 则曲边梯形是一个矩形, 其面积容易求得. 而现在底边上的高  $f(x)$  在

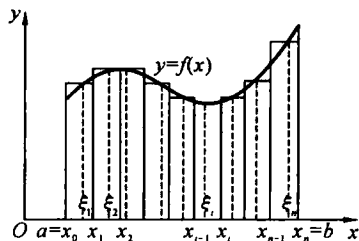


图 7-1

区间  $[a, b]$  上是变化的, 因此它的面积不能按矩形面积来计算. 然而, 曲边梯形的高  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上是连续的, 当  $x$  变化很小时,  $f(x)$  的变化也很小, 如果把  $x$  限制在一个很小的区间上, 曲边梯形就可以近似看做矩形来处理. 设想把曲边梯形沿  $x$  轴方向切割成许多窄长条, 把每个窄长条按矩形近似计算其面积, 求其和便得到曲边梯形面积的近似值. 分割越细, 误差越小, 于是当窄长条宽度趋近于零时, 就可以得到曲边梯形面积的精确值.

由此, 得到计算曲边梯形面积的步骤如下.



第一步:分割. 在区间 $[a, b]$ 中任意插入 $n-1$ 个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

这些分点把区间 $[a, b]$ 分成 $n$ 个小区间

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, x_n],$$

它们的长度依次是

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \cdots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}.$$

过各分点作垂直于 $Ox$ 轴的直线,相应的曲边梯形被分割成 $n$ 个窄小曲边梯形(见图7-1).

第二步:近似. 当每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 的长度很小时,它所对应的每个小曲边梯形的面积可以用矩形面积近似替代. 小矩形的宽为 $\Delta x_i$ ,在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 $\xi_i$ ,以对应的函数值 $f(\xi_i)$ 为高,则小曲边梯形面积 $\Delta A_i$ 的近似值为 $f(\xi_i)\Delta x_i$ ,即

$$\Delta A_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

第三步:求和. 把 $n$ 个小矩形的面积相加,得到曲边梯形面积 $A$ 的近似值,即

$$A \approx f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i.$$

第四步:取极限. 为了保证所有的小区间长度 $\Delta x_i$ 都无限缩小,要求小区间长度的最大值 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$ 趋近于零(这时分点数无限增大,即 $n \rightarrow$

$\infty$ ),则和式 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$ 的极限就是曲边梯形的面积,即

$$A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i.$$

## 2. 变速直线运动的路程

设某物体作变速直线运动,已知速度 $v = v(t)$ 是时间间隔 $[T_1, T_2]$ 上的连续函数,且 $v(t) \geq 0$ ,计算在这段时间内物体运动的路程.

第一步:分割. 在时间间隔 $[T_1, T_2]$ 中任意插入 $n-1$ 个分点

$$T_1 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = T_2,$$

这些分点把 $[T_1, T_2]$ 分成 $n$ 个小段,各小段的时间长度依次是

$$\Delta t_1 = t_1 - t_0, \Delta t_2 = t_2 - t_1, \cdots, \Delta t_n = t_n - t_{n-1}.$$

第二步:近似. 每小段 $[t_{i-1}, t_i]$ 上的运动可近似看成匀速直线运动,在 $[t_{i-1}, t_i]$ 上任取一点 $\xi_i$ ,作乘积 $v(\xi_i)\Delta t_i$ ,则在这一小段时间内该物体运动的路程

$$\Delta s_i \approx v(\xi_i)\Delta t_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

第三步:求和. 把 $n$ 个小段所有路程 $\Delta s_i$ 加起来,得到全部路程 $s$ 的近似值,即

$$s \approx v(\xi_1)\Delta t_1 + v(\xi_2)\Delta t_2 + \cdots + v(\xi_n)\Delta t_n = \sum_{i=1}^n v(\xi_i)\Delta t_i.$$

第四步:取极限.当  $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_n\}$  趋近于零时,和式  $\sum_{i=1}^n v(\xi_i) \Delta t_i$  的极限就是全部路程  $s$  的精确值,即

$$s = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n v(\xi_i) \Delta t_i.$$

从以上两个例子可以看出,虽然研究的具体问题不同,但解决问题的方法是相同的,即采用分割、近似、求和、取极限四个步骤,且最后所得的数学表达式为具有相同结构的一种特定和式的极限.在科学技术和实际生活中,许多问题都可以归结为这种特定和式的极限,由此可以抽象出定积分的定义.

## 7.1.2 定积分的定义

**定义 7.1.1** 设函数  $f(x)$  为区间  $[a, b]$  上的有界函数,在  $[a, b]$  中任意插入  $n-1$  个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

把区间  $[a, b]$  分成  $n$  个小区间

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n],$$

各小区间的长度依次为

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \dots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}.$$

在每个小区间  $[x_{i-1}, x_i]$  上任取一点  $\xi_i (x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i)$ ,作函数值  $f(\xi_i)$  与小区间长度  $\Delta x_i$  的乘积  $f(\xi_i) \Delta x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ ,并作和式

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

记  $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$ ,如果不论对区间  $[a, b]$  怎样的分法,也不论在小区间

$[x_{i-1}, x_i]$  上点  $\xi_i$  怎样的取法,极限  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$  总是确定的值,则称这个极限

值为  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上的定积分,记作  $\int_a^b f(x) dx$ ,即

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i,$$

其中称  $f(x)$  为被积函数,  $f(x) dx$  为被积表达式,  $x$  为积分变量,  $[a, b]$  为积分区间,  $a$  为积分下限,  $b$  为积分上限.

关于定积分的定义,作以下几点说明.

(1) 定积分值只与被积函数  $f(x)$  和积分区间  $[a, b]$  有关,与积分变量用哪个字母表示无关,即

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du.$$

(2) 在定积分的定义中, 假设  $a < b$ , 为了方便计算与运用, 作以下两点补充规定:

① 当  $a > b$  时,  $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$ ;

② 当  $a = b$  时,  $\int_a^b f(x) dx = 0$ .

下面给出函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积的两个充分条件.

**定理 7.1.1** 设  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积.

**定理 7.1.2** 设  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上有界, 且只有有限个间断点, 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积.

上面讨论的两个实际问题用定积分的定义表述如下:

由连续曲线  $y = f(x)$  ( $f(x) \geq 0$ ), 两条直线  $x = a, x = b$  及  $x$  轴所围成的平面图形的面积  $A$  等于函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上的定积分, 即

$$A = \int_a^b f(x) dx.$$

某物体以  $v = v(t)$  ( $v(t) \geq 0$ ) 作变速直线运动, 从时刻  $T_1$  到时刻  $T_2$  物体运动的路程  $s$  等于速度函数  $v = v(t)$  在区间  $[T_1, T_2]$  上的定积分, 即

$$s = \int_{T_1}^{T_2} v(t) dt.$$

### 7.1.3 定积分的几何意义

由前面曲边梯形面积的计算可以看到:

当  $f(x) \geq 0$  时, 定积分  $\int_a^b f(x) dx$  表示由曲线  $y = f(x)$ , 两条直线  $x = a, x = b$  ( $a \leq b$ ) 及  $x$  轴所围成的曲边梯形的面积  $A$ , 即  $\int_a^b f(x) dx = A$ .

当  $f(x) \leq 0$  时,  $\int_a^b f(x) dx = -A$ .

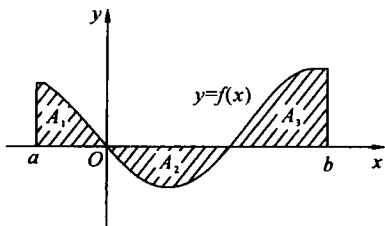


图 7-2

定积分  $\int_a^b f(x) dx$  的几何意义: 由曲线  $y = f(x)$ , 两条直线  $x = a, x = b$  及  $x$  轴所围成的平面图形的各部分面积的代数和. 其图形在  $x$  轴的上方时取正号, 在  $x$  轴的下方时取负号.

如图 7-2 所示, 函数  $y = f(x)$  在区间  $[a, b]$  上的定积分为

$$\int_a^b f(x) dx = A_1 - A_2 + A_3.$$

**例1** 利用定义计算定积分  $\int_0^1 x^2 dx$ .

**解** 因为被积函数  $f(x) = x^2$  在积分区间  $[0, 1]$  上连续, 而连续函数是可积的, 所以积分与区间  $[0, 1]$  的分法和点  $\xi_i$  的取法无关. 因此, 为了便于计算, 不妨把区间  $[0, 1]$  分成  $n$  等份, 分点为  $x_i = \frac{i}{n}$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ). 这样, 每个小区间

$[x_{i-1}, x_i]$  的长度  $\Delta x_i = \frac{1}{n}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 取  $\xi_i = x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 得和式

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i &= \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \Delta x_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \\ &= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

当  $\lambda \rightarrow 0$ , 即  $n \rightarrow \infty$  时, 对上式取极限, 由定积分的定义, 即得所要计算的积分

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3}.$$

**例2** 利用定积分的几何意义求定积分

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx.$$

**解** 根据定积分的几何意义, 该定积分是由曲线  $y = \sqrt{4-x^2}$ , 直线  $x=0, x=2$  及  $x$  轴所围成的平面图形的面积, 即以 2 为半径的四分之一圆的面积, 如图 7-3 所示, 则

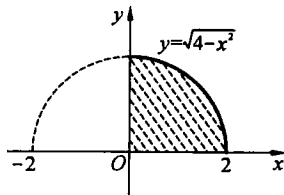


图 7-3

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx = \frac{1}{4} \pi \cdot 2^2 = \pi.$$

### 习题 7.1

(A)

1. 将和式极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[ \sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right]$  表示成定积分.

2. 利用定积分的几何意义说明下列等式:

$$(1) \int_a^b k dx = k(b-a);$$

$$(2) \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4};$$

$$(3) \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = 0;$$

$$(4) \int_{-1}^1 |x| dx = 2 \int_0^1 x dx.$$

## (B)

1. 利用定积分的定义计算下列积分:

$$(1) \int_a^b x dx (a < b); \quad (2) \int_0^1 e^x dx.$$

2. 计算由曲线  $y = x^2$ , 直线  $x = 1$  及  $x$  轴所围成的平面图形的面积.

## 7.2 定积分的性质

在下面的讨论中, 假定被积函数在所讨论区间上都是可积的.

**性质 1** 两个函数代数和的定积分等于它们定积分的代数和, 即

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

$$\begin{aligned} \text{证} \quad \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)] \Delta x_i \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \pm \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta x_i \\ &= \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx. \end{aligned}$$

性质 1 可以推广到有限个函数代数和的情形.

**性质 2** 被积函数中的常数因子可以提到积分号前面, 即

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad (k \text{ 为常数}).$$

$$\text{证} \quad \int_a^b k f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n k f(\xi_i) \Delta x_i = k \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = k \int_a^b f(x) dx \quad (k \text{ 为常数}).$$

**性质 3** 设  $a < c < b$ , 则  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ .

**证** 因为  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上可积, 所以不论把  $[a, b]$  怎样分, 积分和的极限总是不变的. 因此, 在分区间时, 可以将  $c$  取为区间的分点, 则  $[a, b]$  上的积分和等于  $[a, c]$  上的积分和加  $[c, b]$  上的积分和, 记为

$$\sum_{[a,b]} f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{[a,c]} f(\xi_i) \Delta x_i + \sum_{[c,b]} f(\xi_i) \Delta x_i.$$

令  $\lambda \rightarrow 0$ , 上式两端同时取极限, 得

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

性质 3 可以推广到对任意的常数  $a, b, c$ , 等式

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

均成立. 例如, 当  $a < b < c$  时, 由于

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_c^b f(x) dx,$$

移项后, 即得  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ .

**性质 4** 如果在区间  $[a, b]$  上,  $f(x) \equiv 1$ , 则  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b dx = b - a$ .

**性质 5** 如果在区间  $[a, b]$  上,  $f(x) \geq 0$ , 则  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ .

**证** 因为  $f(x) \geq 0$ , 所以  $f(\xi_i) \geq 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ . 又由于  $\Delta x_i \geq 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ , 因此

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \geq 0,$$

令  $\lambda = \max\{\Delta x_1, \dots, \Delta x_n\} \rightarrow 0$ , 便得要证的不等式.

**性质 6 (估值定理)** 如果函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的最大值为  $M$ , 最小值为  $m$ , 则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \quad (a < b).$$

**证** 因为  $\forall x \in [a, b], m \leq f(x) \leq M$ , 所以

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx,$$

再由性质 2 及性质 4, 得到所要证的不等式.

**性质 7 (定积分中值定理)** 如果函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 则在区间  $[a, b]$  上至少存在一点  $\xi$ , 使得

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a) \quad (a \leq \xi \leq b).$$

这个公式称为定积分中值公式.

**证** 由性质 6 中的不等式变形, 得

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

这表明, 确定的数值  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$  介于函数  $f(x)$  的最小值  $m$  及最大值  $M$  之间. 根据闭区间上连续函数的介值定理, 在  $[a, b]$  上至少存在一点  $\xi$ , 使得函数  $f(x)$  在点  $\xi$  处的值与这个确定的数值相等, 即应有

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(\xi) \quad (a \leq \xi \leq b).$$

两端分别乘以  $b-a$ , 即得到所要证的等式.

定积分中值定理的几何意义: 设  $f(x) \geq 0$  在区间  $[a, b]$  上连续, 则在区间

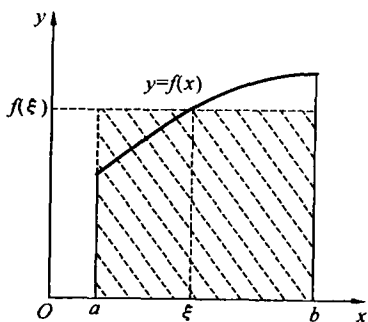


图 7-4

$[a, b]$ 上至少存在一点  $\xi$ , 使得以区间  $[a, b]$  为底边、曲线  $y = f(x)$  为曲边的曲边梯形的面积等于以区间  $[a, b]$  为底、 $f(\xi)$  为高的矩形的面积, 如图 7-4 所示.

显然, 当  $b < a$  时, 定积分中值公式

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a) \quad (b \leq \xi \leq a)$$

也是成立的.

由定积分中值定理所得的

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx,$$

称为函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上的平均值.

## 习题 7.2

### (A)

1. 已知  $\int_a^b f(x) dx = p$ ,  $\int_a^b [f(x)]^2 dx = q$ , 求定积分  $\int_a^b [4f(x) + 3]^2 dx$ .
2. 证明不等式  $\int_2^3 \sqrt{x^2 - x} dx \geq \sqrt{2}$ .

### (B)

1. 利用定积分的性质, 比较下列定积分的大小:

- |  |   |
|--|---|
| (1) $\int_1^2 x^2 dx$ 与 $\int_1^2 x^3 dx$ ;                                    | (2) $\int_e^2 \ln x dx$ 与 $\int_e^2 (\ln x)^2 dx$ ; |
| (3) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin x dx$ 与 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ ; | (4) $\int_0^2 3x dx$ 与 $\int_0^3 3x dx$ .           |

2. 估计下列积分的值:

- |  |   |
|--|---|
| (1) $\int_1^2 (x^2 + 1) dx$ ;                                  | (2) $\int_0^2 e^{-x^2} dx$ ;                                |
| (3) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin^2 x) dx$ ; | (4) $\int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^{\sqrt{3}} x \arctan x dx$ . |

3. 证明下列不等式:

- (1)  $\frac{\pi}{2} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 x}} dx < \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ ;
- (2)  $\frac{2}{5} < \int_1^2 \frac{x}{x^2 + 1} dx < \frac{1}{2}$ ;

$$(3) 1 \leq \int_0^1 \sqrt{1+x^4} dx \leq \frac{4}{3}.$$

4. 设  $f(x)$  与  $g(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 证明:

(1) 若在  $[a, b]$  上,  $f(x) \geq 0$ , 且  $\int_a^b f(x) dx = 0$ , 则在  $[a, b]$  上  $f(x)$  恒等于 0;

(2) 若在  $[a, b]$  上,  $f(x) \leq g(x)$ , 且  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$ , 则在  $[a, b]$  上  $f(x)$  恒等于  $g(x)$ .

## 7.3 定积分的基本公式

用定积分的定义来计算定积分是很烦琐的, 本节将通过揭示定积分与原函数的关系导出定积分的基本计算公式: 牛顿 - 莱布尼茨公式.

下面先从实际问题寻找解决定积分计算的思路与线索. 以物体作变速直线运动为例.

### 7.3.1 变速直线运动中位置函数与速度函数之间的关系

由 7.1 节知, 一物体以  $v = v(t)$  ( $v(t) \geq 0$ ) 作变速直线运动时, 在时间间隔  $[T_1, T_2]$  内运动的路程为

$$s = \int_{T_1}^{T_2} v(t) dt.$$

另一方面, 这段路程又可表示为位置函数在区间  $[T_1, T_2]$  上的增量

$$s(T_2) - s(T_1).$$

这样位置函数与速度函数之间有如下关系:

$$\int_{T_1}^{T_2} v(t) dt = s(T_2) - s(T_1).$$

由于  $s'(t) = v(t)$ , 即位置函数是速度函数  $v(t)$  的原函数, 因此上式表明: 速度函数  $v(t)$  在区间  $[T_1, T_2]$  上的定积分等于其原函数在区间  $[T_1, T_2]$  上的增量.

这一结论是否具有普遍意义? 也就是说, 函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上的定积分  $\int_a^b f(x) dx$  是否等于  $f(x)$  的原函数  $F(x)$  在区间  $[a, b]$  上的增量  $F(b) - F(a)$  呢?

### 7.3.2 变上限的定积分

由 7.3.1 节知, 定积分的计算可以转化为原函数的计算问题. 下面先讨论原函数的存在问题.

设函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 并且设  $x$  为  $[a, b]$  上的任一点, 那么在部分



区间 $[a, x]$ 上的定积分为

$$\int_a^x f(x) dx.$$

上面的 $x$ 既表示积分上限,又表示积分变量,为避免混淆,将积分变量改为 $t$ (定积分与积分变量的记号无关),于是上面积分改写为

$$\int_a^x f(t) dt.$$

显然,当 $x$ 在 $[a, b]$ 上变动时,对应每一个 $x$ 值,积分 $\int_a^x f(t) dt$ 有一个确定的值,因此 $\int_a^x f(t) dt$ 是积分上限 $x$ 的一个函数,记作 $\Phi(x)$ ,即

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (a \leq x \leq b).$$

这个积分称为 $f(x)$ 的积分上限函数,也称为变上限的定积分.

积分上限函数的几何意义如图 7-5 所示,并且它具有以下性质.

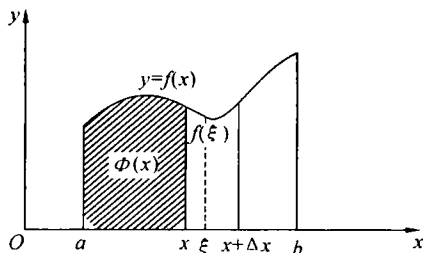


图 7-5

**定理 7.3.1** 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续,则积分上限函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (a \leq x \leq b)$$

在区间 $[a, b]$ 上可导,且

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x) \quad (a \leq x \leq b).$$

**证** 如图 7-5 所示,给 $x$ 以增量 $\Delta x$ ,则函数 $\Phi(x)$ 的改变量为

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) \\ &= \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \\ &= \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt. \end{aligned}$$

由定积分中值定理,在 $x$ 与 $x + \Delta x$ 之间至少存在一点 $\xi$ ,使得

$$\Delta\Phi = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = f(\xi) \Delta x,$$