青少年科学启智系列

QSNKXQZXL

什么不是数学

李武炎/主编

向阿基米德致敬
破解费马最后定理
代数学的故事

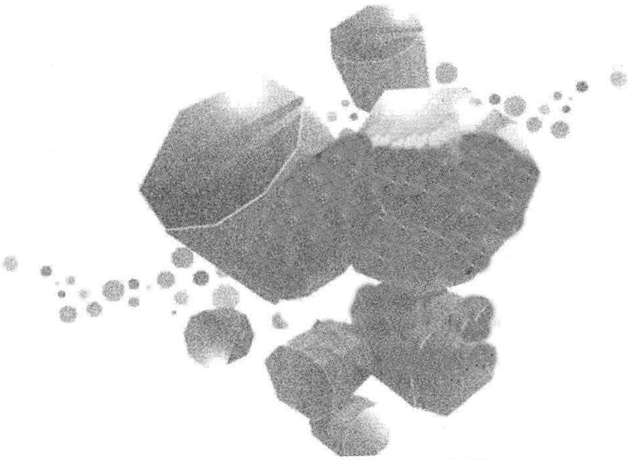
分形的魅力
谈韩信点兵问题
数学界的诺贝尔奖

長春出版社
全国百佳图书出版单位

青少年科学启智系列

什么不是数学

李武炎◎主编



長春出版社
全国百佳图书出版单位

图书在版编目(CIP)数据

什么不是数学 / 李武炎主编. —长春：长春出版社，2013.1
（青少年科学启智系列）
ISBN 978-7-5445-2620-3

Ⅰ. ①什… Ⅱ. ①李… Ⅲ. ①数学—青年读物
②数学—少年读物 Ⅳ. ①01-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 274915 号

著作权合同登记号 图字：07-2012-3845

什么不是数学

主　　编:李武炎
责任编辑:王生团
封面设计:王　宁

出版发行:長春出版社　　总编室电话:0431-88563443
发行部电话:0431-88561180　　邮购零售电话:0431-88561177
地　　址:吉林省长春市建设街 1377 号
邮　　编:130061
网　　址:www.cccbs.net
制　　版:长春市大航图文制作有限公司
印　　制:沈阳新华印刷厂
经　　销:新华书店

开　　本:700 毫米×980 毫米　1/16
字　　数:120 千字
印　　张:13
版　　次:2013 年 1 月第 1 版
印　　次:2013 年 1 月第 1 次印刷
定　　价:23.50 元

序

数学是一种科学，从物力学、化学、天文学到经济学、工程技术等，无不用到数学。一个人从上学的第一天起，就开始学习数学，至少会有十三四年的时间要学习这门课程，可见数学这门课程的重要与应用之普遍，但是对于广大学生来说，繁琐的公式与抽象的概念另其望而生畏。最近几年，一些出版单位不断地推出通俗性的科普读物，在市场上，深受读者喜爱。基于此，我们编著了《什么不是数学》这本书，以通俗的语言，深入浅出地介绍与数学有关的知识，以达到提倡科学教育的目的。

本书收集的文章都是脍炙人口的数学科普作品，对于充实教科书以外的数学知识，引发学生对数学学习的兴趣，具有积极的作用。我们在遴选文章时预先设立几个原

则：第一是文章的可读性要很高，最好是有趣又能益智的题材，例如我们选中的“韩信点兵”、“漫谈幻方”、“圆周率π”以及“费马最后定理”等，都是为大众普遍熟知且深感兴趣的知识，其中“韩信点兵”是古典的数论问题，是研究有关余数的题目，其解法是中国人最早发现的，所以被称为“中国剩余定理”；“幻方”是中国民间流行的智力游戏，也是古代中国数学家钻研的题材；“圆周率π”则是为人们津津乐道的，是小学生数学学习时碰到的第一个常数，它的故事充满乐趣；而“费马最后定理”的证明成功堪称二十世纪数学发展的里程碑。选材的第二原则是内容的多元化且具有启发性，为了配合这个原则，我们挑了几篇介绍数学家故事的文章，其中有史上三大数学家之一的阿基米德，也有对代数学的发展具关键性的天才数学家伽罗华，他的故事与本书中的“代数的故事”有关，希望对喜好数学的学子有激励启发的作用。

本书编辑出版的文章都是精彩的，而且作者的书写技巧也是一流的，这些作者大多长期从事教学和科研工作，具有极高的水平。读者通过阅读他们的文章，可以窥探到数学的发展概貌，领略数学文化的丰富多彩。

编　者

目 录

1 / 向阿基米德致敬
14 / 早夭的天才数学家伽罗华
20 / 破解费马最后定理
27 / 数学界的诺贝尔奖
38 / 数学与大自然的对话
44 / 来自花剌子模的人
52 / 代数学的故事（上）
69 / 代数学的故事（下）
80 / 什么不是数学
90 / 谈韩信点兵问题
109 / 分形的魅力
117 / 阿林谈微积分（上）

134 / 阿林谈微积分（中）

147 / 阿林谈微积分（下）

156 / 数学中最美的等式——数、生活与学习

162 / 漫谈幻方

172 / 漫谈斐波那契数列

183 / 一个名为“拈”的游戏

193 / 享受 π 乐趣

向阿基米德致敬

□蔡聪明

法国启蒙运动大师伏尔泰说："阿基米德的头脑要比荷马的更富想象力。"

意大利西西里岛（Sicily）的东南地方，有一个叫做西拉库拉（Syracuse）的海港。公元前 734 年，迦太基人（Carthage）曾在此建造一座古城，这就是阿基米德（Archimedes，约 287 — 212B. C.）的故乡。他在此诞生，其后到过亚历山大（Alexandria）游学，然后回乡工作并且死于西拉库拉。

根据历史的记载（或传说），西拉库拉的国王赫农二世，为了庆功谢神，命工匠打造一顶纯金皇冠，要献给不朽的

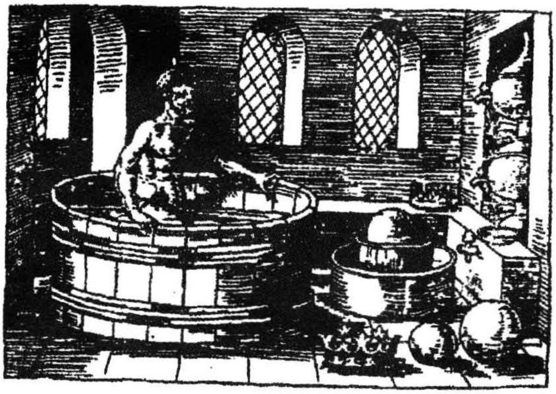


图 1　阿基米德沐浴图

神。完工之日，国王怀疑皇冠不纯，掺杂有银子，但是苦于找不到科学方法加以判别。因此，他就去请教好朋友阿基米德，提出著名的皇冠问题（the crown problem）：

在不熔化皇冠的条件下，

（1）如何判别皇冠是纯金与否？

（2）若不是纯金的话，如何求得金、银的含量各占多少？

阿基米德苦思一段时日，也是无所得。有一天他到澡堂洗澡，当他把身体沉入浴池的水里时，他敏锐地察觉到水位上升，并且身体的重量稍减（见图 1），他突然灵光闪现，狂喜得忘我地冲跑回家，上演裸奔，并且大叫：

"Eureka! Eureka!"（意指：我发现了！我发现了！）

本文我们要展示阿基米德的分析方法与实验精神，结合物理与数学，从而解决皇冠问题的过程，并且由洗澡又发现"浮力原理"，再延伸出实数系"阿基米德性质"的美妙收获。

分析与实验

大家都知道，金的比重大于银，故相同重量的金或银，

体积是前者小于后者（图 2）。同理，相同体积的金或银，重量是前者大于后者。

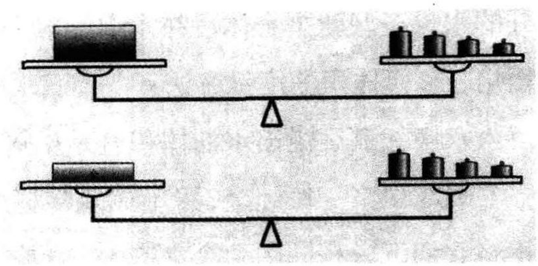


图 2　重量相同时，金的体积小于银

其次，一块金属在打造成不同的形状后，体积不变（假设是实心的，内部没有空隙），表面积当然会变。

有了上述两个基本常识，阿基米德分析论证如下：假设称得皇冠的重量是 2879 克，再取来同样是 2879 克的一块纯金与一块纯银，已知它们的体积分别为 V_1 与 V_3。假设皇冠的体积为 V_2，那么就有

（1）如果皇冠是金银混合打造的，则

$$V_1<V_2<V_3 \qquad ①$$

（2）如果皇冠是纯金打造的，则

$$V_1=V_2<V_3 \qquad ②$$

反之亦然。因此，只要能够测量出皇冠的体积，就可以利用①式或②式来验知皇冠是纯金与否的问题。

阿基米德虽是求算体积（如球、锥的体积）的高手，但是皇冠凹凸不平、弯曲变化，如何求它的体积呢？

正当他苦思不得其解时，洗澡的契机使他发现身体所排

开的水量正好就是身体浸在水中的部分之体积。这马上使他悟出，皇冠体积的度量方法：在装满水的水槽，将皇冠全部沉入水中，那么溢出水的体积就是皇冠的体积。

现在取来一块纯金，跟皇冠同样都是重 2879 克(图 3)。再将它们沉入相同的两个水槽中，阿基米德发现皇冠所排开的水量比较多（图 4)，即①式成立。因此他证明了金匠“偷工减料”。我们注意到，如果金、银的比重很相近，那么就可能会产生判别上的困扰。

阿基米德所解决的皇冠问题，虽然渺小，也不难，但已足令他狂喜到裸奔。因此，不论问题是大是小，困难或容

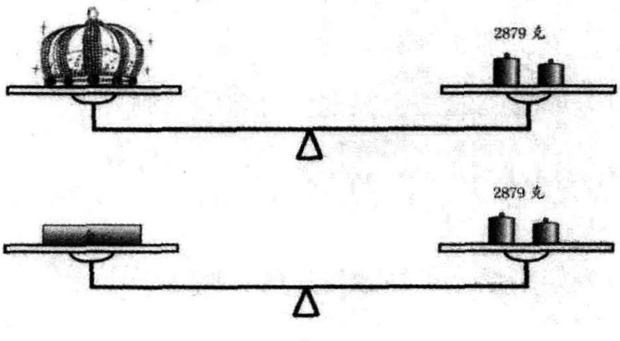


图 3

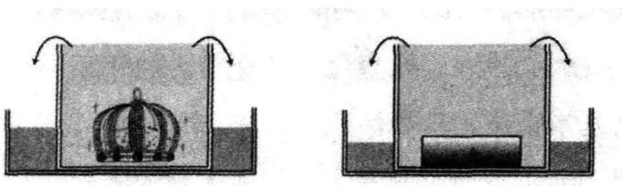


图 4

易，只要是自己从头到尾彻底地想出来，独立地解决问题，就会令人欣喜若狂。例如，当牛顿发现微分与积分的关联时，他说："我已经发现了用微分来算积分！"这种喜悦标志着数学史上的一个伟大时刻。数学里有最丰富的题材，让人得到这种美好的经验。

在历史上，还有两个例子，可以媲美阿基米德解决皇冠问题：曹冲称象与爱迪生（Edison，1847 — 1931）测量电灯泡的体积。

世界上每天有何其多的人洗澡，只有阿基米德从中得到"我发现了"的惊喜，这是因为怀有"问题意识"，在问题的引导之下，让他对周遭的感觉敏锐。"天才是一分的灵感，加上九十九分的汗水"，爱迪生如是告诫我们。灵感（inspiration）与汗水（perspiration）的英文恰好是押韵，形成类比。

皇冠问题的定量解法

为了探求皇冠的金、银含量，我们必须利用物体的比重概念。我们定义物体（或物质）密度与纯水密度的比值，叫做该物体的比重（specific gravity）。表 1 就是一些金属的比重数值表。

表1　　金属的比重

水	1.00	铁	7.86
金	19.30	铅	11.34
银	10.50	白金	21.37
铜	8.93	水银	13.59

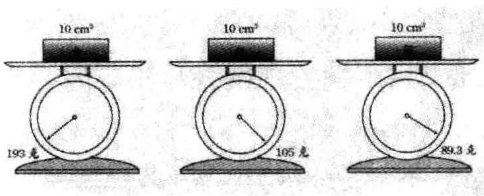


图 5

换言之，同样是 10 立方厘米的金、银、铜，它们的重量分别是 193 克、105 克与 89.3 克（图 5）。

算术解法

今假设测得皇冠的体积为 182 立方厘米，重量为 2879 克。如果皇冠是纯金的，则应该重

$$182\times 19.3 = 3512.6 \text{ 克}$$

或体积应该是

$$2879\div 19.3 = 149.2 \text{ 立方厘米}$$

这些都跟实际不符，故知皇冠不是纯金打造的。进一步，若皇冠是纯金的，则重量比实际的皇冠重

$$3512.6 - 2879 = 633.6 \text{ 克}$$

而 1 立方厘米的金比 1 立方厘米的银重

$$19.3 - 10.5 = 8.8 \text{ 克}$$

故对于纯金皇冠，每将 1 立方厘米的金换成 1 立方厘米的银，会减轻 8.8 克的重量。今欲减轻 633.6 克，总共需换

$$633.6 \div 8.8 = 72 \text{ 立方厘米}$$

因此，实际的皇冠含有 72 立方厘米的银，$182 - 72 = 110$ 立方厘米的金。从而，实际的皇冠所含金、银各有

$$19.3 \times 110 = 2123 \text{ 克}$$
$$10.5 \times 72 = 756 \text{ 克}$$

代数解法

事实上，这就是“鸡兔同笼”问题，我们不妨称之为“金银同冠”问题：有金、银两种怪兽同在一个皇冠之中，总共有 182 只，各有脚 19.3 只与 10.5 只，问金、银怪兽各有几只？

利用代数解法，假设金、银各有 x 立方厘米与 y 立方厘米，则依题意可得联立方程组

$$\begin{cases} x + y = 182 \\ 19.3x + 10.5y = 2879 \end{cases}$$

解得$x = 110$，$y = 72$。

上述从算术解法到代数解法，正好是反映从小学数学到中学数学的伸展。阿基米德的皇冠问题是一个绝佳的历史名例，结合生活实际、历史、物理与数学，又富趣味性。

浮力原理

物体在流体中（不论浮或沉），会减轻重量，并且所减轻的重量就等于物体所排开的流体之重量。这个原理也称为阿基米德原理。

习题一：假设有一顶皇冠、一块纯金及一块纯银，三者的重量都一样，为 384 克。将它们都浸没到水中，称其重量，发现纯金减少 19 克，纯银减少 28.5 克，皇冠减少 21.25 克。问皇冠中含金、银各多少克？

习题二：有一个容器可浮在水槽的水面上，水槽不大，可以精确地刻画出水槽的水位。假设容器装一顶皇冠后，仍浮在水面上，我们在水槽上刻画出水位线。现在将皇冠取出，沉入水槽中，问相对于原先的水位线，水槽的水位是上升或下降？

阿基米德性质

阿基米德在澡堂中，灵感特别多。他一面洗，一面用手把水泼弄出去，立刻悟到：只要有恒地泼水出去，在有限次之内，一定可以把水泼弄净尽。有恒为成功之本。换言之，不论澡堂的水多么多，用一个小汤匙（不论

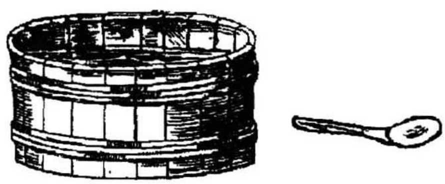


图 6

多么小），不断地取水，必有干枯之时（图 6）。

改用数学的术语来说就是：

任意给两个实数 $M>0$ 及 $\varepsilon>0$（$M>\varepsilon$），必存在一个自然数 n，使得 $n\varepsilon>M$。

这就是实数系所具有的著名的阿基米德性质（Archimedean property）。通常我们在心目中是想象 M 很大，ε 很小，分别代表澡盆的水量与一汤匙的水量。这个原理在高等数学中很重要，它等价于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$（习题）。利用穷尽法（method of exhaustion）求面积与体积时，所根据的原理就是阿基米德性质。

阿基米德性质也可以解释成愚公移山原理：不论山 $M>0$ 有多大，一铲 $\varepsilon>0$ 有多小，终究有一天 $n\in N$，山会被愚公挖光 $n\varepsilon>M$。

更可以解释成龟兔赛跑原理：不论兔子在乌龟前方 $M>0$ 有多远，乌龟的步幅 $\varepsilon>0$ 有多小，假设兔子睡大觉不动，乌龟终有一天 $n\in N$，会超越兔子 $n\varepsilon>M$（图 7）。

阿基米德性质虽然很直观易明，但是若要证明它的话，却必须用到深刻的实数系完备性。另一方面，利用阿基米德

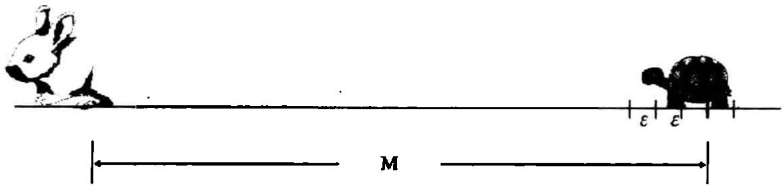


图 7

性质，我们可以证明有理数系 Q 稠密于实数系 R：对于任意两实数 a，$b\in R$，$a<b$，恒存在有理数 $r\in Q$，使得 $a<r<b$（习题）。

在公元前 5 世纪，古希腊哲学家芝诺（Zeno）曾提出善跑英雄阿基里斯（Achilles）与乌龟赛跑的悖论（paradox）。他宣称只要让乌龟在阿基里斯前 100 米，开始赛跑，那么阿基里斯永远追不上乌龟。假设阿基里斯的速度是乌龟的 10 倍，则当阿基里斯跑到乌龟的出发点时，乌龟已向前方走了 1 米，按此要领下去，乌龟永远在阿基里斯的前方（图 8）。请你破解这个诡论。

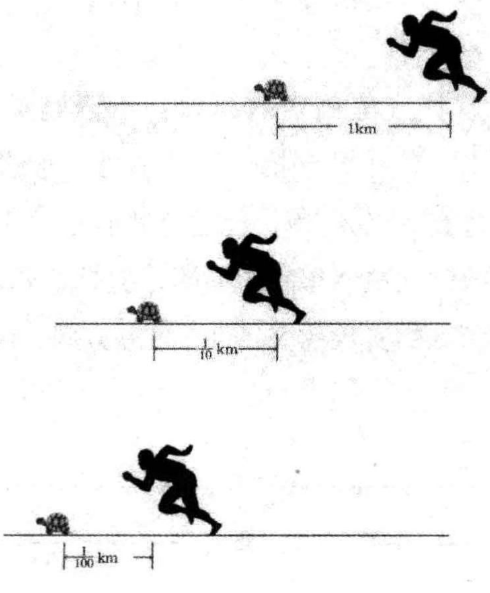


图 8