机械优化设计

马 履 中 编著

东 南 大 学 出 版 社

(苏)新登字第012号

内 容 提 要

本书系统地介绍了机械优化设计中常用的优化理论、方法及应用。内容主要有：机械优化设计的基础知识；无约束优化的直接算法，间接算法；约束优化的直接算法，间接算法；多目标优化方法，其中包含一些较新的算法，如增广乘子法、广义简约梯度法、正交网格法、浮动随机计算点法等优化方法近二十余种。应用方面有平面、空间四连杆机构；凸轮机构；行星轮系的优化设计，并阐明了作者论著的凸轮从动件运动规律；离心泵；碟形弹簧；转向机构；装箱机械手的优化方法等。书末撰写了优化设计源程序。有关章节均有适量的习题。

本书可作为高等工科院校学生、研究生的教材或参考书，亦可供工程技术人员参考。

机 械 优 化 设 计

马 履 中　编著

东南大学出版社出版发行

南京四牌楼2号　邮编210018

江苏工学院印刷厂印刷

开本787×1092毫米 1/16　印张11.5　字数276千字

1993年3月第1版　1993年3月第1次印刷

印数：1—2000册

ISBN 7—81023—728—4

TH·40　　定价：7.50元

序

机械优化设计是在机械设计中应用数学规划论、解析法和电子计算机的基础上发展起来的一门崭新的学科。工程设计中运用优化方法不仅可使设计周期大大缩短，还可使设计的水平显著提高。工程设计问题由于涉及的众多因素通常是十分复杂的，而大多数属于有约束非线性规划问题。用常规的设计方法往往只能得到近似解。正确运用机械优化设计可使工程设计中复杂的非线性规划问题得到较理想的优化解。实际上机械优化设计反映了设计人员对设计规律的认识进一步深化。

为了有利于广大工程设计人员，研究生及高年级大学生能掌握这一优化设计技术，并能应用到工程设计的实践中去，以提高产品的设计质量。一本取材适当的机械优化设计教材是很必要的。为此，本书作者马履中同志早在 1982 年即于教学中编写了机械优化设计讲义。多年来，该书作者一直在教学第一线进行机械优化设计教学与科研的实践活动。曾为研究生、助教进修班、本科生及工程师进修班讲授机械优化设计课程，积累了丰富的教学经验。据此对原讲义进行了大量的修订和改编。书中收入了一些较新的算法，如 PHR 增广乘子法，GRG 广义简约梯度法，正交网格法，浮动随机计算点法等。书中编入了作者这几年来在机械优化设计中的部分研究成果，如凸轮机构从动件最佳运动规律组合曲线优化设计、离心泵机辅设计中的优化技术、拖拉机双拉杆转向机构结构参数的优化设计、碟形弹簧优化设计、连杆式装箱机械手机构优化设计等。

该书在编排系统上考虑了研究生、大学本科生及工程技术人员不同层次的读者学习的需要。在内容叙述上深入浅出，便于教学及自学。因而是一本值得推荐的实用的机械优化设计好教材。

本书的编著出版显示了作者在治学上是严谨的，在教材编写工作上是颇有成效的。在该书出版之际，特写此序以示祝贺。

教授

一九九三年一月十五日

前　　言

机械优化设计是以机械、数学规划、算法语言三门学科为基础发展起来的一门综合性学科，其数学的本质是数学规划。机械设计中，设计者总是力求选择较佳参数来较好地满足预定的运动学和动力学要求。在50年代初机械设计通常用运动几何法来进行设计，这种设计方法是一种精度不高的近似解，当时虽也有以数学“函数逼近论”为基础的用解析法进行机械设计的，但它对解决机械设计中大量遇到的非线性问题十分困难。50年代末，由于数学规划、电子计算机和计算方法的迅速发展，使机械优化设计进入了数值计算的新阶段，目前优化设计技术已形成一门崭新的学科。采用优化方法，对提高产品的设计水平，改进现有产品的质量是一种十分有效的手段。机械优化设计是近代机械综合的一个重要发展趋势。本书所述内容对其他解非线性方程的有关问题也都是十分有用的。

为了在高等工科院校的教学内容中增加一些现代设计的新方法，同时也为了使新的现代设计方法在工程实际中得到推广应用，作者曾在1982年编写了《机械优化设计》讲义，供机械类专业作为必修课、选修课教材或助教进修班、研究生教材。也曾在工程技术人员中作为培训班教材，得到各单位和同志们的鼓励与支持。作者总结十年来的教学科研实践经验并考虑了算法语言的使用情况和优化方法的发展，在原讲义的基础上作了大量的修订、整理，编成此书。

本书在编写中力求深入浅出，循序渐进，兼顾优化理论与工程实际应用，在内容的组织安排上既考虑了优化理论的深度、广度，又考虑了初学者学习的方便。着重阐明了各种方法的基本概念与几何本质。在应用方面反映了作者近年来的部分研究成果。书后撰写的优化程序，可供读者在了解基本原理的基础上熟悉程序的编制方法并上机练习。

本书的第一章为机械优化设计基础知识。这一章是后面各章学习的基础，学习时应先具备有一定的数学预备知识，主要有：矩阵；矢量的线性相关性；空间的基；泰勒展开式；函数极值理论；方向导数；梯度；等高线；凸函数等的数学知识。这些知识可通过自学或复习高等数学，线性代数来解决。第二章为无约束优化问题常用算法。这一章亦是为有约束优化问题作准备的。第三章为约束优化问题的间接算法。这一章拟讲惩罚函数法为主。增广乘子法与广义简约梯度法是为研究生教学时讲授的内容。本科生教学时这部分可不讲授。第四章为约束优化问题的直接算法。其中浮动随机计算点法，正交网格法，库恩—塔克条件为研究生教学内容。本科生学时有限时，这部分内容可不讲授。第五章为多目标优化。这一章主要是对多目标优化问题的处理方法上作一些由浅入深的介绍。为进一步学习多目标优化问题打一点基础。这章内容可作为机动内容处理。第六章为机械优化设计应用举例。这一章主要指明怎样根据工程实际问题确定设计变量、目标函数、约束条件并建立起数学模型。选用合适的优化方法，编制源程序得出计算结果。重点在介绍优化设计具体步骤或程序框图等。第七章为优化算法程序举例。这一章主要学会怎么读现有程序，用现有程序并改编部分子程序的方法，实际上机运算。有关各章均附有适量的习题。

本书在编写上增加了优化上机时怎么处理一些具体问题。有些章节内容是结合作者平时研究的成果经加工整理而成。书中收入了一些较新的算法，如：PHR 增广乘子法；GRG 广义简约梯度法；正交网格法；浮动随机计算点法等。书中还列入了编著者的若干工作。如：凸轮机构从动件最佳运动规律组合曲线优化设计；离心泵计算机辅助设计中的优化技术；拖拉机双拉杆转向机构结构参数的优化设计；碟形弹簧优化设计；连杆式装箱机械手机构优化设计等等。

本书编著过程中，原国家教委工科机械基础课程教学指导委员、全国机械原理教学研究会副主任委员孙可宗教授，华东工学院沈守范教授，中国纺织大学华大年教授，江苏工学院鲍庆惠教授对本书编著工作给予了热情鼓励与支持。东南大学程光蕴教授对全书作了认真细致的审阅、对书搞提出许多宝贵意见，谨向他们致以深切谢意。

由于水平所限，书中难免有缺点和错误之处，恳望读者批评指正。

编著者

一九九二年十一月一日

于江苏工学院

目　　录

第一章　机械优化设计的基础知识

第二章　无约束优化问题的常用算法

第三章　设计约束的处理方法(约束优化问题算法之一)

第四章　约束优化问题的直接算法(约束优化问题的算法之二)

第一章　机械优化设计的基础知识

§1-1　概　　述

优化方法是随着数学规划论，电子计算机及其计算方法的发展而发展，它广泛应用于科学技术的各个部门。

通常讲的“最优”是指最优值或最佳值（Optimum），文献中常用“Opt”表示。求最优值的过程叫“优化”（Optimization）。最优值的概念是相对的，它随着科学技术的发展和设计条件的改变而变化。

优化方法应用到工程设计中就是“优化设计”，它能使工程设计者从众多的设计方案中获得较为完善的或最合适的最优设计方案。

所谓最优设计方案，并不是所有的性能指标都是最优的，它们之间有时是相互矛盾的，通常在设计中总是存在一个（或几个）主要的目标，而其它性能只要符合要求就可以了。即在满足一定约束条件下，追求例如经济性最好，重量最轻，体积最小，寿命最长等目标。

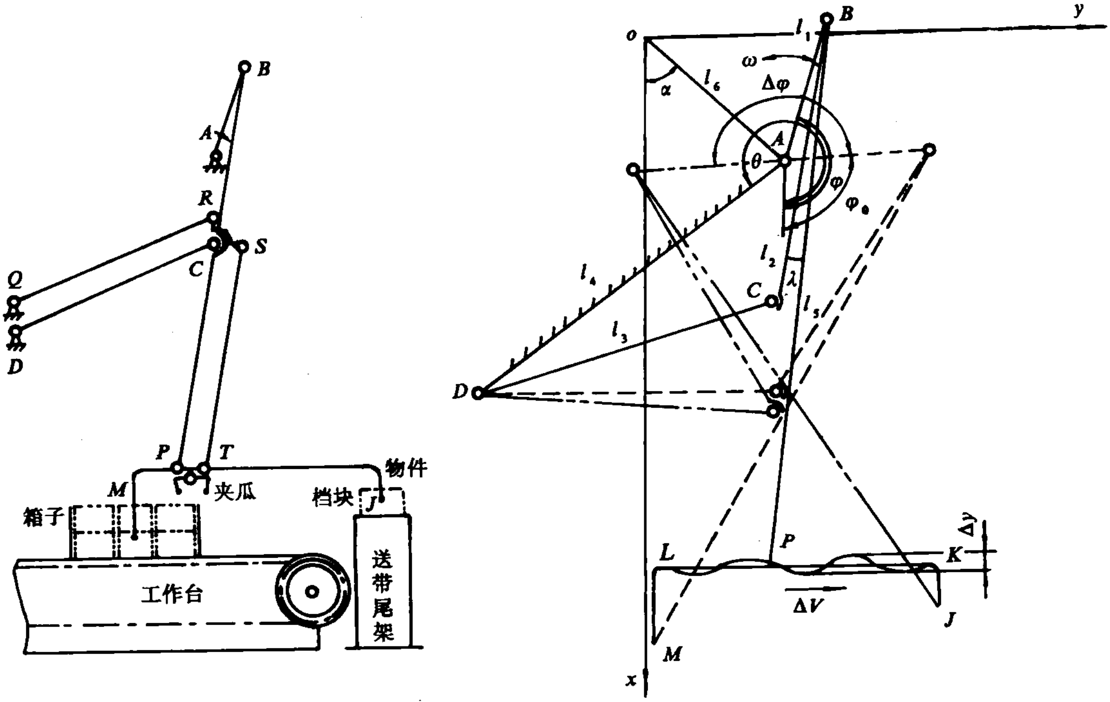
在机构设计中，所谓最优值通常都是指运动学和动力学参数，例如图 1－1(a) 所示的连杆式装箱机械手，他是由基本四杆机构 $ABCD$，迭加上 PTS 与 CRQ 两个 Ⅱ 极杆组组成的机构，其中 $DQ=CR$，$QR=CD$，$CS=PT$，$CP=ST$ 以保证手爪 PT 在运动中始终保持水平姿态。因此该机械手的基本机构应是图 1－1(b) 所示的 $ABCD$ 四杆机构，设取定 xoy 右手笛卡尔坐标系，机构中 P 点的位置与 l_1、l_2、l_3、l_4、l_5、l_6、α、θ、λ、φ 等参数有关，设曲柄 AB 在 $\varphi=\varphi_0$ 位置时，P 点恰好与轨迹的始点 M 相对应，由此继续转过一个角度 $\Delta\varphi$，便到达轨迹终点 J 处。最优化设计的任务就是要确定这十一个变量：l_1、l_2、l_3、l_4、l_5、l_6、α、θ、λ、φ_0、$\Delta\varphi$ 使机构在运动中 P 点的轨迹与理想的轨迹差 ΔX，ΔY 或 $\sqrt{\Delta X^2+\Delta Y^2}$ 最小。P 点移动的速度变化 ΔV 和 AB 杆上的驱动力矩的变化 ΔM 为最小等。例如，有一台装箱机械手，原来轨迹差 Δy 为 0.56mm，经过优化设计后减少到 0.15mm，而且其它指标也得到了改善。

上例的装箱机械手，我们要设计确定的十一个机构参数是变量，通常叫做设计变量；ΔX、ΔY、$\sqrt{\Delta X^2+\Delta Y^2}$、$\Delta V$ 和 ΔM 是我们要追求的目标，它们是设计变量的函数称为目标函数；当然，此机构还必需满足其它给定的运动学和动力学的约束条件。

优化设计就是优选设计变量，在满足约束条件下，使目标函数为最优值（本例即使目标函数值为最小）。

为了使初学机械优化设计者对优化设计内容及其相互之间的联系有一个全面的了解，图 1-2 给出了本书各章节的主要内容，及其相互之间的关系。读者不难从该图中了解到各章内容在解决机械优化设计中的地位、作用。在学习机械优化设计课程时，往往是逆着图中箭头方向讲解的，即先讲一维搜索；共轭方向基础知识；无约束优化问题；有约束优

化问题；优化设计应用实例等等。



(a) (b)

(a)具有连杆机构的装箱机械手结构简图 (b)装箱机械手中基本四连杆机构运动简图

图 1-1

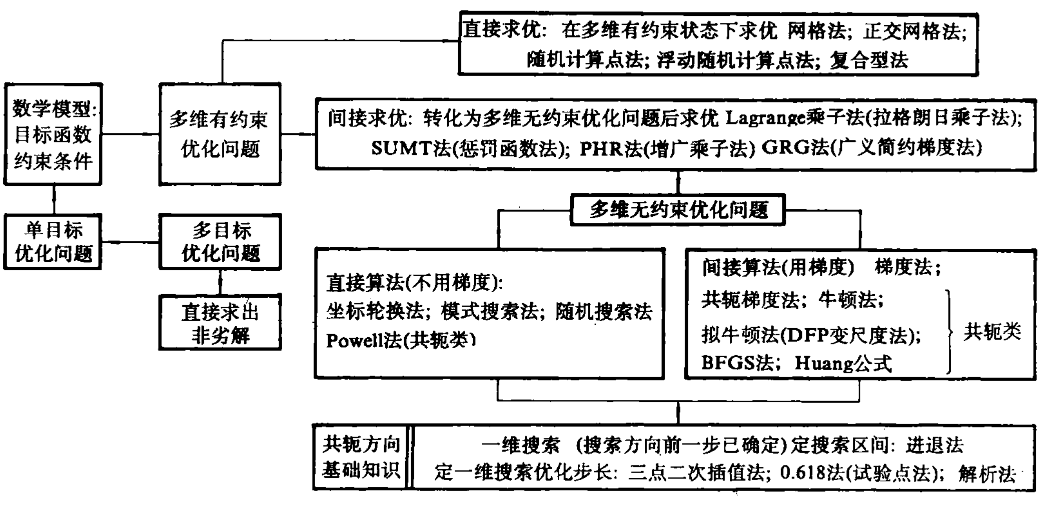


图 1-2 优化设计各部分内容相互联系图

本章讨论：设计变量，目标函数，约束条件这三个基本概念；最优设计的数学模型。

此外，在具体介绍优化设计方法之前，本章先对优化设计经常要用到的“一维搜索方法”，“共轭方向”这两个问题予以介绍。

§1-2　设计变量

一个机械系统，其设计方案，可以用一些参数的数值量来描述，这些参数中有几何参数（例如，图 1-1 所示的装箱机械手机构中，各构件的长度，固定支点及连杆点的坐标）和物理量（例如，各构件的质量，力和力矩等）。在设计时，按各种具体情况，有些参量是可以给定的，这些在设计过程中给定的，看做是不变的量称为**参量**，这些参量有些是设计时按具体问题的特殊要求提出来的，有些可能是从经验中得出认为该参量的特殊值会带来良好的效果，把这些参量看做固定会使问题大大简化。

还有一些量，则需要在设计中优选的，这些量是变量，称为**设计变量**。因此，一个设计方案可由参量和设计变量完整地来描述。因为参量是常量，不在这里讨论。优化设计主要讨论如何选定最优的设计变量。

设共有n个设计变量x_i，$i=1, 2, \cdots n$，用向量记为：

$$\overline{X}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \tag{1-1}$$

$\overline{X}$ 称为设计向量，x_i 是设计向量$\overline{X}$的第 i 个分量。$\overline{X}$ 的分量的数目 n 称为设计向量的维数。记$\overline{X}\in R^n$ 表示$\overline{X}$是属于 n 维实欧氏空间的向量。该 n 维空间称为设计空间。一个设计向量$\overline{X}$(或一组设计变量 x_1, x_2, $\cdots$, x_n) 代表一个设计方案。其中优化设计方案记为$\overline{X}^*$ 或$\overline{X}_{opt}$，优化方案又称优化点。为了兼顾阅读与书写方便起见，本书所用的代号规定为：

第K点的总矢量表示为$\overline{x}^{(k)}$或$\overline{X}^{(k)}$(有矢量号);

第K点的各分量表示为$x_1^{(k)}$，$x_2^{(k)}$，$\cdots$,$x_i^{(k)}$或$X_i^{(k)}$(通常不写矢量号)

其中 x 与 X 大小写都可以，不区分。上标号表示所讨论的点号数为第 K 点，下标号表示 K 点的各分量号。

但对于一维问题有时为了书写方便，常习惯于将$\overline{x}^{(k)}$ 写为$\overline{x}_k$，将$\overline{x}^{(k+1)}$ 写为$\overline{x}_{k+1}$，望阅读时引起注意。

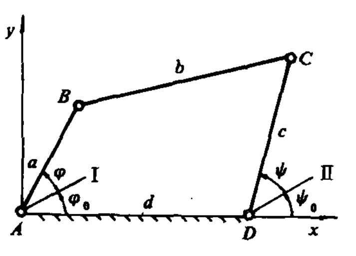


图 1-3　四杆机构设计变量的确定

例：图 1-3 所示四杆机构，主动构件 AB 的起始位置为 AI，起始角 φ_0；从动构件 CD 的起始位置为 DⅡ，起始角为 ψ_0；四杆机构各构件的长度分别为 a，b，c，d。显然从动构件的运动规律可表示为：

$$\psi=f'(a, b, c, d, \varphi_0, \psi_0, \varphi)$$

式中 φ，ψ 分别为主动构件和从动构件的转角。由于机构各构件长度按同一比例扩大

或缩小，并不改变各构件之间的相对运动。故上式可改写为

$$\psi = f'(a',\ b',\ c',\ \varphi_0,\ \psi_0,\ \varphi)$$

式中 $a' = \dfrac{a}{d}$ ， $b' = \dfrac{b}{d}$ ， $c' = \dfrac{c}{d}$。

如果按上式设计四杆机构，则 a'，b'，c'，φ_0 及 ψ_0 可以作为设计变量。若将这些设计变量用设计向量 $\overline{X}$ 来表示，则 $\overline{X}$ 为包括全部设计变量的列矩阵，即：

$$\overline{X} = [\,a'\ b'\ c'\ \varphi_0\ \psi_0\,]^T$$

§1-3　目标函数

用来评价设计方案性能好坏标准的函数（设计变量的函数）称为目标函数和评价函数。通常在许多可行设计中，必定有一些方案比另一些方案要好一些。它之所以要好一些，必定是它的某些性能较好，这些性能通常是设计变量的函数，这个函数可用来评价设计性能的好坏。对机构设计来说，目标函数就是评价该机构设计方案使机构的某种运动学和动力学等性能好坏标准的函数。因为目标函数的数值依赖于设计变量，故目标函数是设计向量的函数，可写作。

$$F(\overline{X}) = F(x_1,\ x_2,\ \cdots x_n)$$

优化设计的实质，就是适当选取设计变量，使目标函数达到优化值，即 $F(\overline{X}) \to opt$。

目标函数的建立是优化设计很重要的一环，它直接影响到优化方案的质量。有时，如果目标函数的形式选取不妥当，不仅会使计算难度增大，严重的将导致整个优化设计失败。

有关目标函数的选择，在某些情况下存在明显的目标函数即只涉及一个目标函数，称之为“单目标优化问题”。但也有另一些情况，目标函数的建立恰存在着特别需要的而又难以同时满足的某些设计性质，即存在着这样的情况，需要有二个或更多个性能来同时作为目标函数，这就是“多目标优化问题”。处理单目标优化问题已经有很多成熟的方法，下面还要详细讨论。多目标优化问题，由于其问题较为复杂，涉及的面也较广，目前解决多目标优化问题的方法还不够完善，有关理论也有许多问题值得进一步探讨。在以下讨论中主要讨论单目标优化问题，多目标化问题将在第五章中专题讨论。

机械优化设计中有关机构的优化问题目标函数的建立方法具体例题在第六章中将详细论述。各类问题优化的目标函数建立都需视具体要求而定。下面仅以轨迹再现或函数再现的机构优化设计问题其目标函数的建立方法举例说明之。

对于机构设计的轨迹再现或函数再现的目标函数的建立，有时可采用误差法。用契贝雪夫最大误差方法为：

$$F(\overline{X}) = \max_{q=1\cdots s} \left| f(x_q) - f'(x_q) \right| \longrightarrow \min \qquad (1-2)$$

用高斯平方误差法则为：

$$F(\overline{X})=\sum_{q=1}^{s} W_q\,[f(x_q)-f'(x_q)]^2 \longrightarrow \min \tag{1-3}$$

式中 $f(x)$ 表示机构再现实际值。$f'(x)$ 表示给定值。W 是“加权因素：为非负数，它表示该项准则的重要程度，其情况大致和前述的一样，如果不十分重要可取 $W=1$。$q=1,\ 2\cdots S$ 为在给定范围内计算的点数，一般依计算精度而定。

应当指出的是在工程设计中，经常会感到目标函数是自明的，其实不然。还必需仔细全面分析、推敲，否则会导致不良后果。例如，在机构设计中，以传动角最优的设计不一定作用力水平为最低。

具体目标函数的建立是属于各专业范围的问题，故在此就不多谈了。

§1－4　设计约束

如前所述，目标函数是设计向量 $\overline{X}(\overline{X}\in R^n)$ 的函数，而设计变量 $x_1,\ x_2,\ \cdots x_n$，往往不是彼此独立的，它们常常需要满足某些限制条件，这种限制条件称为设计约束，如曲柄摇杆机构，必须满足曲柄存在条件，这个条件就是设计约束条件。

设计约束在数学上有不等式约束函数。

$$G_j(\overline{X})\leqslant 0 \qquad j=1,\ 2,\ \cdots m \tag{1-4}$$

其中 $G_j(\overline{X})\geqslant 0$ 的形式，可变为 $-G_j(\overline{X})\leqslant 0$ 的形式，故不予讨论。

此外还有等式约束函数

$$h_j(\overline{X})=0 \qquad j=1,\ 2,\ \cdots p \tag{1-5}$$

不管它是等式约束函数还是不等式约束函数，其形式可以相互转换，即等式约束可改变为不等式约束，反之亦然。

例如：等式约束 $h(\overline{X})=0$ 可用两个不等式约束条件来代替，此两不等式约束为：

$$\begin{cases} h(\overline{X})\leqslant 0 \\ h(\overline{X})\geqslant 0 \end{cases} \tag{1-6}$$

反之，不等式约束 $G(\overline{X})\leqslant 0$ 也可用一等式约束条件来表示。为此可引入一松弛变量 S 的办法。把上述不等式约束表示为等式约束，即：

$$G(\overline{X})+S^2=0 \tag{1-7}$$

因为若该等式约束被满足的话，不等式也能满足，式中 S 是实值变量，称为松弛变量，它使 $\overline{X}$ 点与约束界限保持一“距离”，若 $S=0$，则 $G(\overline{X})=0$；若 $S\neq 0$，则由（1－7）式可知，此时 $G(\overline{X})$ 自然必定为负值。

由于设计约束的存在，使最优化设计的难度大大增加，因为在优化设计过程中，选定设计变量时不仅要着眼于优化目标函数值，而且还要使设计变量满足约束条件。不等式约束在优化设计中特别重要，用得最多。

如图 1－4 所示的四杆机构中。杆 1 为曲柄，杆 3 为摇杆的条件可表示为下述不等式约束条件：

$$
\left.\begin{aligned}
G_1(\vec{X}) &= x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \leqslant 0 \\
G_2(\vec{X}) &= x_1 + x_3 - x_2 - x_4 \leqslant 0 \\
G_3(\vec{X}) &= x_1 + x_4 - x_2 - x_3 \leqslant 0
\end{aligned}\right\} \quad (1-8)
$$

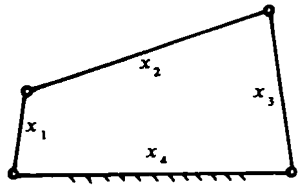


图1－4　四杆机构约束条件的确定

任一个不等式约束$G_j(\vec{X}) \leqslant 0$都把设计空间划分为两部分:

（1）使设计约束条件满足的部分;

（2）使设计约束条件不满足的部份。

这两部分的分界以 $G_j(\vec{X})=0$ 为特征，它是 n 维设计空间中的一张“曲面”（或叫“超曲面”），称为约束边界，通常将 m 个不等式约束均满足的那一部分设计空间称为可行区域。因此有约束的优化设计的实质，就是在可行区域内适当选取设计变量，使目标函数达到优化值。

例如：以二维问题来说明上述各点，令设计向量$\vec{X}=(x_1 x_2)^T$须满足下列设计约束:

$$
\begin{aligned}
G_1(\vec{X}) &= x_1 - x_{1\max} \leqslant 0 \\
G_2(\vec{X}) &= x_{1\min} - x_1 \leqslant 0 \\
G_3(\vec{X}) &= x_2 - x_{2\max} \leqslant 0 \\
G_4(\vec{X}) &= x_{2\min} - x_2 \leqslant 0 \\
G_5(\vec{X}) &\leqslant 0 \\
G_6(\vec{X}) &\leqslant 0
\end{aligned}
$$

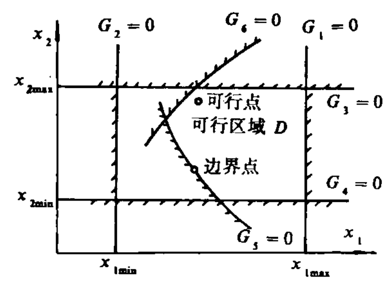


图1－5　约束区域的划分

上式中约束条件 $G_1(\vec{X})=0$，$G_2(\vec{X})=0$，$G_3(\vec{X})=0$，$G_4(\vec{X})=0$ 都是直线，而 $G_5(\vec{X})=0$，$G_6(\vec{X})=0$ 为曲线，其形状见图 1－4 所示。图中影线部分是设计约束不满足的部份。所有设计约束均满足的公共部份即为可行区域 D。

从图可知，设计约束 $G_2(\vec{X})=0$ 实际上并不起约束作用，因为只要满足 设 计 约 束 $G_5(\vec{X}) \leqslant 0$，$G_6(\vec{X}) \leqslant 0$ 则 $G_2(\vec{X}) \leqslant 0$ 必然满足，另外把可行域内的点称为可行点（即可行方案），约束边界上的点称为边界点。有约束的优化设计方案$\vec{X}^*$ 通常为边界点。若$\vec{X}^*$ 为可行域内点，这时约束条件有、无都没关系。即可把设计约束全部去掉而作为无约束优化问题求解。

设计约束在工程上通常又可将其分为边界约束和性能约束两类。边界约束又称区域约束，即考虑设计变量的变化范围。如前述图 1－4 所示四杆机构，其构件的长度 $x_i(i=1,2\cdots k)$ 应满足 $x_{i\min} \leqslant x_i \leqslant x_{i\max}$，则它的不等式约束函数为:

$$
\left.\begin{aligned}
G_4(\vec{X}) &= x_i - x_{i\max} \leqslant 0 \\
G_5(\vec{X}) &= x_{i\min} - x_i \leqslant 0
\end{aligned}\right\}
$$

$$
i=1,2,\cdots k \quad (\text{四杆机构}k=4) \qquad (1-9)
$$

性能约束是考虑某种性能或设计要求而推导出来的约束条件。例如曲柄摇杆机构存在一个曲柄的条件是曲柄为最短杆，且曲柄与其他任一杆的长度之和小于其余两杆长度之和，由此导出的不等式约束函数式如前述（1－8）式就是性能约束函数。又如为了保证机构有良好传动的性能而要求机构的传动角 γ 要大于某一允许的最小传动角 $|\gamma_{\min}|$，则此不等式性能约束函数为：

$$G_6(\overline{X})=|\gamma_{\min}|-\gamma\leqslant 0 \qquad (1-10)$$

传动角 γ 的计算可参看机械原理有关内容。

在某些工程问题上还出现另一种形式的约束，其设计变量只能取一些离散值，不能取连续值的这样一种约束。例如，设计变量是齿轮模数时，其中模数的选取只允许在离散的（不是连续的）一组值内选取。当然这种约束在机构设计中常有可能碰到，而且在处理时是十分麻烦的事。有关这些问题将在 §6－5 及 §6－8 中再讨论其解决的方法。

§1－5 优化设计的数学模型及优化过程的几何描述

优化设计问题可用某种标准形式来表示，这种形式对解题方法提供了一个通则，这种通则就是数学模型。优化设计的数学模型可归纳为：

无约束优化问题数学模型的表示式是： $\min\limits_{\overline{X}\in R^n} F(\overline{X})$

约束优化问题数学模型的表示式是： $\min\limits_{\overline{X}\in R^n} F(\overline{X})$

$$\begin{aligned} s.t.\ & G_j(\overline{X})\leqslant 0 \qquad j=1,\ 2,\ \cdots,\ m \\ & h_j(\overline{X})=0 \qquad j=1,\ 2,\ \cdots,\ p \end{aligned}$$

其含义是

在可行区域内寻求一组最优设计变量 $\overline{X}$

$$\overline{X}=(x_1\ \ x_2\cdots x_n)^T \qquad \overline{X}\in R^n$$

在满足 $G_j(\overline{X})\leqslant 0 \qquad j=1,2,\cdots m;$

$h_j(\overline{X})=0 \qquad j=1,2,\cdots p;$

的设计约束条件下，使目标函数 $F(\overline{X})=F(x_1\ \ x_2\cdots x_n)\rightarrow\min$。换言之，是找一个优化点 $\overline{X}^*=(x_1^*\ \ x_2^*\cdots x_n^*)^T$ 满足所有 $G_j(\overline{X}^*)\leqslant 0$ 和 $h_j(\overline{X}^*)=0$。并使 $F(\overline{X}^*)=\min\limits_{\overline{X}\in D\subset R^n} F(\overline{X})$，这里的 D 表示在 n 维设计空间内由 m 个不等式约束和 p 个等式约束所规定的的可行域 D。它是 n 维实欧氏空间 R^n 的一个子集。

若问题是求 $\max\limits_{\overline{X}\in R^n} F(\overline{X})$，则我们可取 $-F(\overline{X})$ 作为目标函数，仍为：$\min\limits_{\overline{X}\in R^n}(-F(\overline{X})$ 这一类问题。

故今后只讨论$\min\limits_{\bar{X}\in R^n} F(\bar{X})$这一类问题。

优化设计又叫数学规划，并按照$F(\bar{X})$，$G_j(\bar{X})$，$h_j(\bar{X})$和$\bar{X}$的各种不同情况，优化设计问题可分为下述各种类型：

(1) 若$F(\bar{X})$，$G_j(\bar{X})$，$h_j(\bar{X})$都是$\bar{X}$的线性函数，称为线性规划，否则称为非线性规划。

(2) 若$m=p=0$，即没有任何设计约束，称为无约束规划，否则称为约束规划。

(3) 若$\bar{X}$的所有分量均取整数值，称为全整数规划，若$\bar{X}$的各分量取值为离散值则为离散规划。变量中一部分分量取整数值，一部分取离散值，一部分取实型值的则称为混合规划。若$\bar{X}$为随机值，称为随机规划。

(4)此外尚有几何规划,动态规划等等，这些都是优化课题的重要分支。

目前机构设计中遇到的大部分问题是约束非线性规划。

（一）约束非线性优化解的几何描述

今以二维非线性优化问题为例，来说明它的几何概念。

例如：已知目标函数

$$F(\bar{X})=x_1^2+x_2^2-4x_1+4 \tag{a}$$

设计约束

$$G_1(\bar{X})=-x_1+x_2-2\leqslant 0 \tag{b}$$

$$G_2(\bar{X})=x_1^2-x_2+1\leqslant 0 \tag{c}$$

$$G_3(\bar{X})=-x_1\leqslant 0 \tag{d}$$

$$G_4(\bar{X})=-x_2\leqslant 0 \tag{e}$$

求找$\bar{X}^*=(x_1^*\ \ x_2^*)^T$使$F(\bar{X}^*)=\min F(\bar{X})$

这个例子是一个二维的非线性规划问题，目标函数$F(\bar{X})$是二次函数，因为由（a）式可知：

目标函数：$F(\bar{X})=x_1^2+x_2^2-4x_1+4=(x_1-2)^2+x_2^2$

可见上式是一以$F(\bar{X})=0$，$x_1=2$，$x_2=0$为顶点的，开口向上的旋转抛物面。

设计约束：$G_1(\bar{X})\leqslant 0$即$x_2\leqslant x_1+2$取等号时$x_2=x_1+2$是条直线。

$G_2(\bar{X})\leqslant 0$即$x_2\geqslant x_1^2+1$取等号时$x_2=x_1^2+1$是一顶点在$x_1=0$；$x_2=1$，开口指向x_2轴正向的抛物线。

$G_3(\bar{X})\leqslant 0$即$-x_1\leqslant 0$，$x_1\geqslant 0$取等号时$x_1=0$是一条x_2轴

$G_4(\bar{X})\leqslant 0$即$-x_2\leqslant 0$，$x_2\geqslant 0$取等号时$x_2=0$是一条x_1轴。

其中$G_4(\bar{X})\leqslant 0$这一约束实际上不起作用，因为他已被约束更苛刻的$G_2(\bar{X})\leqslant 0$这一约束所代替。所以实际可行域是由$G_1(\bar{X})=0$，$G_2(\bar{X})=0$，$G_3(\bar{X})=0$这些曲线所围成。

见图 1－6（a）所示。

由于可行域在 x_1ox_2 平面上，而目标函数 $F(\overline{X})$ 是 ox_1x_2F 空间中的一张曲面，为了叙述方便现介绍有关等值线的概念。任取定 $F(\overline{X})$ 一个值 f_1 $\left(例如取 f_1=\frac{1}{4}\right)$ 过该处作 x_1ox_2 的平行平面，与 $F(\overline{X})$ 曲面得一条交线，此交线各点到 x_1ox_2 平面的距离都等于 f_1。现将这条交线向 x_1ox_2 平面正投影，得一曲线 $F(\overline{X})=f_1$（简称 f_1 曲线），显然 f_1 曲线上各点 $(x_1, x_2)\in f_1$ 曲线，其对应的 $F(\overline{X})$ 值都等于 f_1 即 $F(\overline{X})_{\overline{X}\in f_1}\equiv f_1$，称这条曲线为 $F(\overline{X})$ 的一条等值曲线。或者换言之，从 x_2ox_1 平面的任一点 $\overline{X}$（当然应使 $F(\overline{X})$ 有意义），总可作一条等值线。对应不同的 $F(\overline{X})$ 的值，有不同的等值线，位于同一条等值线上的点 $\overline{X}$ 其对应的值 $F(\overline{X})$ 相同，不同的等值线依次排列，组成一等值线族，本例中等值线族为一族同心圆，越向里对应的值越小，特别其圆心（2，0）对应的 $F(\overline{X})$ 值最小，这就是无约束问题的优化解。

本例是有约束的优化问题，优化点只能在可行域内考虑，按上所述，在可行域内过任一点均可作唯一的一条等值线，其对应的目标函数值可能是不同的。现在要找的是在可行域内，哪一点其等值线所对应的目标函数值 $F(\overline{X})$ 为最小？如果这一点找到了，则它必为有约束优化点 $\overline{X}^*$。显然 $\overline{X}^*$ 点必定是可行域的边界与某条等值线的切点（有时也可能是可行域两条边界的角点）。如图 1－6（b）所示，有约束优化点 $\overline{X}^*$ 其对应的坐标为（0.58,1.31）点。

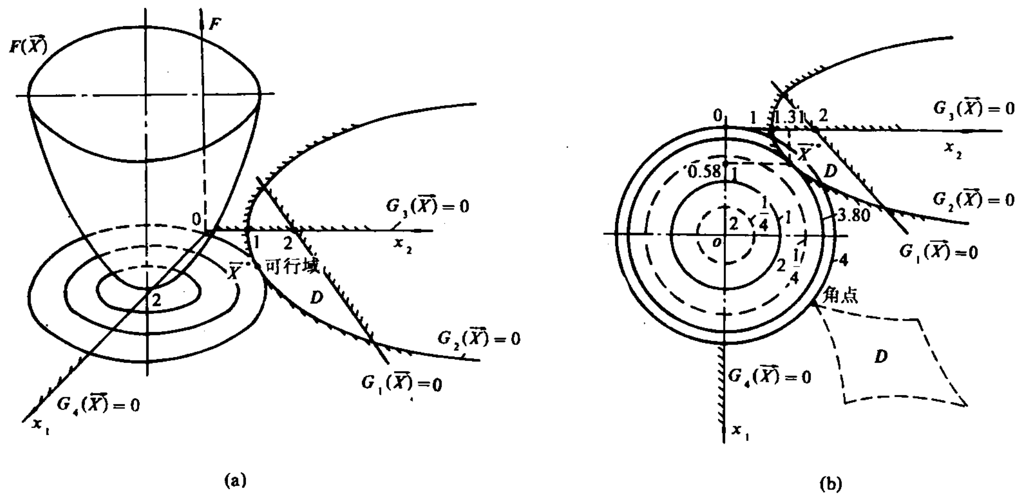


图 1-6　优化解的几何描述

综上所述，非线性优化问题，从几何上看，其实质为：

（1）无约束优化问题，实质是求等值线族的中心点。

（2）有约束优化问题，实质是求可行域边界与某一条等值线的切点。

图 1－6 的例子目标函数是多变量的单峰函数，有时目标函数是多形态的，亦即有几个极值点，这时上述的中心点和切点不只一个，则每个都叫局部优化点。所有局部优化

点中最好的一个解称为全局优化点。必须注意，有时局部优化点不一定是全局优化点。如图 1－7 所示，当 X_2^* 对于整集区 R^n 是目标函数的最小时，则即为全局最优点。如果另有一个极值点$\overline{X}_1^*$，而 $F(\overline{X}_1^*) > \overline{F}(\overline{X}_2^*)$ 则这一点即为局部最优点或相对最优点。在约束最优化问题中，由于变量只允许在可行区域内选择，所以得到的最优点是条件极值点。为约束局部最优点或约束全局最优点。

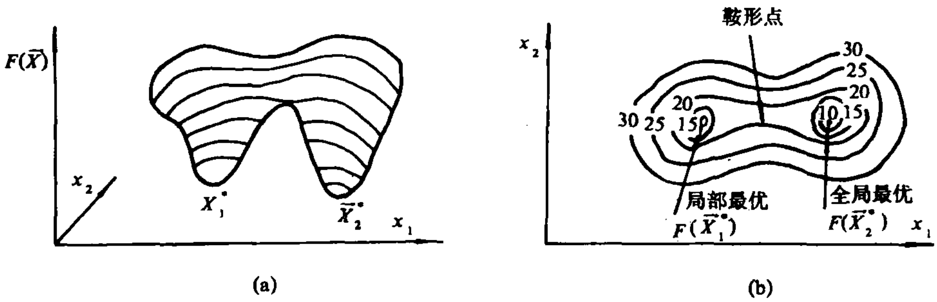


图 1-7　局部优化点与全局优化点

对于一个 n 维的约束非线性最优化问题，可以这样来理解：n 个设计变量 x_1，$x_2 \cdots x_n$ 组成一个 n 维实欧氏空间 R^n，在这空间中的每一个点代表 n 个变量的一个给定值，即一个设计方案。每一个不等式约束方程在这个 n 维空间内是一个超曲面，几个不等式约束方程的超曲面将 n 维空间划分为两个区域：一个是可行区域，其中所有点均满足不等式约束方程；另一个是不可行区域，其中所有点不满足某些或全部约束方程。当目标函数取某一定值时，就在 n 维空间内构成一个目标函数的等值超曲面，一系列目标函数的等值超曲面表示目标函数的变化规律。最优化解就是要在 n 维空间内找到一个点$\overline{X}_4^*$，使其目标函数值为最小，实际上对于约束最优化问题来说，这一点就是目标函数等值超曲面与可行区域边界超曲面的一个切点。对于无约束最优化问题，这一点就是目标函数的极值点，即为等值超曲面族的中心。

对于目标函数是一般二维二次函数的情况，其等值线族是一族同心椭圆。对于目标函数是一般函数的情况，（这里指的是二维情况，对多维也可类推），等值线的概念仍然有效，只是这时等值线族有些奇形，但在局部优化点邻近仍为一族同心椭圆，其中心就是一个局部无约束优化点，这是因为一般函数 $F(\overline{X})$ 在局部优化点$\overline{X}^*$ 邻近可展成二次函数的缘故，对于目标函数是 n 维一般函数的情况，可设 $F(\overline{X})$ 在任一点$\overline{X}^{(k)}$ 处展成台劳（又称泰勒或 Taylor）级数并保留到二次项（假设函数 $F(\overline{X})$ 具有连续的一、二阶偏导数），可得：

$$F(\overline{X}) \approx F(\overline{X}^{(k)}) + \nabla^T F(\overline{X}^{(k)})(\overline{X} - \overline{X}^{(k)}) + \frac{1}{2}(\overline{X} - \overline{X}^{(k)})^T \nabla^2 F(\overline{X}^{(k)})(\overline{X} - \overline{X}^{(k)}) \tag{1-11}$$