高等数学

学习辅导

张庆国　刘爱国　主编

科学出版社

高等数学学习辅导

主　编　张庆国　刘爱国
副主编　汪宏喜　徐　丽
　　　　王　凯　武　东
　　　　曹宗宏　张成堂
　　　　陈德玲　于淑妹

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是高等数学配套的学习辅导教材，内容包括极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微分学、二重积分、微分方程与差分方程、无穷级数共9章内容. 每一章都包括基本要求、重点与难点、内容提要、典型例题分析、同步练习题、自我测试题等6部分. 本书最后还选编了5套综合测试题，供读者学习巩固之用. 所有的同步练习题、测试题和综合测试题都附有较为详细的解答和提示方便读者学习使用.

本书除了可以作为高等数学学习的辅导书外，也可以作为全国研究生入学考试的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习辅导/张庆国，刘爱国主编. —北京：科学出版社，2012

ISBN 978-7-03-034907-1

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①张… ②刘… Ⅲ. ① 高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2012) 第130608号

责任编辑：张中兴／责任校对：刘小梅

责任印制：阎　磊／封面设计：迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2012年6月第 一 版　开本：720×1000 1/16

2012年6月第一次印刷　印张：14 3/4

字数：284000

定价：30.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

高等数学是大学学习的一门重要基础课, 也是理工科和经济类等专业研究生入学考试的必考课程. 学习高等数学需要做大量的习题才能理解基本概念、基本定理, 熟练掌握课程内容和解题技技巧. 但作为一门经典课程, 高等数学的题目众多, 不加选择地做题将耗费大量的时间和精力却效果不佳. 选择一些典型例题和习题来进行分析、思考、练习, 举一反三, 将会起到事半功倍的效果. 基于这个考虑, 我们在多年高等数学教学经验的基础上编写了本书, 包括极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微分学、二重积分、微分方程与差分方程、无穷级数共 9 章内容. 我们考虑到学生在学习高等数学时, 往往会感到内容繁杂、计算量大且技巧多样, 我们在每章都有针对性地总结了不同类型的典型例题进行思路分析、计算演示, 以期帮助学生快速掌握高等数学的解题技巧.

众所周知, 数学水平的高低体现在对基本概念的理解上, 做各类题目都应从基本概念的角度来分析它、审视它, 切实的理解掌握. 这样才是真正意义上的数学水平提高. 基于此, 本书每章分析典型例题前, 给出每章的基本要求、重点与难点、内容提要, 并在解题前, 给出分析思路. 这样, 学生使用本书学习巩固复习考研时, 可以了解并掌握考试的重点.

本书每章后都附有同步练习题、分层次的自我测试题 A、B. 这些题目大多是基本训练题, 原因是要掌握高等数学的内容、解题技巧, 通过高等数学各种考试, 都需要加强基本训练. 要求学生既要有解题的速度, 还要准确无误. 另外有些是"中等难度"的题, 这些题不是直接套用公式即可解出的, 是要求读者对多个知识点灵活运用才可以解决. 还有一些是具有实际背景的数学题, 希望在运用数学方法、概念解决实际问题上对学生有所启发. 我们在书后附了较为详细的答案和提示. 但希望读者在未经深入的独立思考前, 不要轻易去翻看它.

本书主编为张庆国、刘爱国, 负责全书的总体设计和统稿、修改定稿. 副主编为汪宏喜、徐丽、王凯、武东、曹宗宏、张成堂、陈德玲、于淑妹.

在这里我们要感谢安徽农业大学和科学出版社, 是他们的大力支持才使得本书顺利出版.

限于我们的学识和业务水平, 书中的不当之处, 恐在所难免, 敬请同行专家和读者不吝指教.

编者

2012年6月

目　录

第 1 章

极限与连续

1.1 基本要求

(1) 理解函数的概念; 了解反函数、复合函数和分段函数的概念; 掌握复合函数的分解.

(2) 熟悉基本初等函数及其性质与图形; 熟悉函数的表示法及函数的几种几何特性; 会建立一般有实际问题背景的函数关系式.

(3) 理解数列及函数极限的概念; 了解极限的精确定义, 熟练掌握极限四则运算法则.

(4) 了解极限存在准则; 会用两个重要极限求有关极限.

(5) 理解无穷小、无穷大的概念; 掌握无穷小的性质和无穷小的比较方法; 会用等价无穷小求极限.

(6) 理解函数连续的概念, 会判断函数间断点的类型; 掌握初等函数的连续性和闭区间上连续函数性质.

1.2 重点与难点

(1) 本章的重点: 函数的概念; 复合函数、分段函数、初等函数; 无穷小; 求函数极限; 判断间断点的类型; 函数的连续性和闭区间上连续函数性质.

(2) 本章的难点: 数列极限定义的 N–ε 语言、函数极限 δ–ε 语言; 无穷小比较; 判断间断点的类型; 闭区间上连续函数性质.

1.3 内容提要

1. 集合的定义

定义 1.3.1 具有某种特定性质的对象所组成的总体称为集合. 通常用大写字母

$A, B, C, \cdots$ 表示.

2. 区间

定义 1.3.2 设 a, b 为两个实数, 且 $a < b$, 称数集 $\{x | a < x < b\}$ 为开区间, 记作 (a, b), 即 $(a, b) = \{x | a < x < b\}$.

闭区间: $[a, b] = \{x | a \leqslant x \leqslant b\}$.

半开半闭区间: $[a, b) = \{x | a \leqslant x < b\}$; $(a, b] = \{x | a < x \leqslant b\}$, 其中, a 和 b 称为区间的端点, $b - a$ 称为区间的长度.

无限区间: $[a, +\infty) = \{x | a \leqslant x\}$; $(-\infty, b] = \{x | x \leqslant b\}$.

特别地, 全体实数的集合$\mathbf{R}$也可表示为无限区间 $(-\infty, +\infty)$.

3. 邻域

定义 1.3.3 设 a 与δ是两个实数, 且 $\delta > 0$, 满足不等式 $|x - a| < \delta$ 的实数 x 的全体称为点 a 的δ 邻域, 记作 $U(a, \delta)$, 即 $U(a, \delta) = \{x | a - \delta < x < a + \delta\}$, 其中, 点 a 称为该邻域的中心, δ 称为该邻域的半径.

若把邻域 $U(a, \delta)$ 的中心 a 去掉, 所得到的集合称为点 a 的去心 δ 邻域, 记作 $\mathring{U}(a, \delta)$, 即 $\mathring{U}(a, \delta) = \{x | 0 < |x - a| < \delta\}$.

4. 映射的定义

定义 1.3.4 设 X, Y 是两个非空集合, 若存在一个对应法则 f , 使得 $\forall x \in X$, 按法则 f , 有唯一确定的 $y \in Y$ 与之对应, 则称 f 为从 X 到 Y 的映射, 记作

$$f: X \to Y,$$

其中, y 称为元素 x 在映射 f 下的象, 记作 $f(x)$, 即 $y = f(x)$; x 称为元素 y 在映射 f 下的一个原象; 集合 X 称为映射 f 的定义域, 记作 D_f; X 中所有元素的象所组成的集合称为映射 f 的值域, 记作 R_f 或 $f(X)$, 即 $R_f = f(X) = \{f(x) | x \in X\}$.

5. 函数的定义

定义 1.3.5 设数集 $D \subset \mathbf{R}$, 则称映射 $f: D \to \mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数, 通常记作

$$y = f(x), \quad x \in D,$$

其中, x 称为自变量, y 称为因变量, D 称为函数 f 的定义域, 也记作 D_f.

函数的表示法: **表格法**、**图形法**、**解析法** (**公式法**).

(1) 分段函数. 在其定义域的不同范围内具有不同的解析式.

(2) 复合函数. 设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_f, 函数 $u = g(x)$ 在 D 上有定义, 且 $g(D) \cap D_f \neq \varnothing$, 则由下式确定的函数

$$y = f(g(x)), \quad x \in D$$

称为由函数 $u=g(x)$ 和函数 $y=f(u)$ 构成的复合函数, 其中变量 u 称为中间变量.

(3) 反函数. 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D, 值域为 R_f. 对 $\forall\, y\in R_f$, 在定义域 D 上至少可以确定一个数值 x 与 y 对应, 且满足关系式

$$f(x)=y.$$

如果把 y 作为自变量, x 作为函数, 则由上述关系可以确定一个新函数,

$$x=\varphi(y) \quad (\text{或} x=f^{-1}(y))$$

这个新函数称为函数 $y=f(x)$ 的反函数. 反函数的定义域为 R_f, 值域为 D.

习惯上, 一般将函数 $y=f(x)$, $x\in D$ 的反函数记作 $y=f^{-1}(x), x\in R_f$. 相对于反函数 $y=f^{-1}(x)$, 原来的函数 $y=f(x)$ 称为直接函数.

6. 函数的几何特性

(1) 有界性. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D, 如果存在正数 M, 使对 $\forall x\in D$, 有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界, 否则称 $f(x)$ 在 D 上无界.

(2)单调性. 设函数 $f(x)$ 在某区间 I 上有定义, 若对 $\forall x_1,x_2\in I$, 当 $x_1<x_2$ 时, 恒有

$$f(x_1)<f(x_2) \quad (\text{或} f(x_1)>f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加函数 (单调减少函数).单调增加和单调减少函数统称为单调函数.

(3) 奇偶性. 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 若 $\forall x\in D$, 恒有

$$f(-x)=f(x) \quad (\text{或} f(-x)=-f(x)),$$

则称 $f(x)$ 为偶函数(或奇函数).

偶函数的图形关于 y 轴对称, 奇函数的图形关于原点对称.

(4) 周期性. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 若 $\exists l>0$, 使得 $\forall x\in D$, 有 $(x\pm l)\in D$, 且有

$$f(x+l)=f(x)$$

成立, 则称 $f(x)$ 为周期函数, l 称为 $f(x)$ 的周期.

7. 初等函数

1) 基本初等函数

幂函数 $y = x^u (u \in \mathbf{R}$是常数$)$;

指数函数 $y = a^x (a > 0$且$a \neq 1)$;

对数函数 $y = \log_a^x (a > 0$且$a \neq 1)$;

三角函数 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x, y = \sec x, y = \csc x$;

反三角函数 $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan y = \operatorname{arc}\cot x$.

2) 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合运算所构成并可用一个式子表示的函数, 称为**初等函数**.

8. 数列极限定义("N-ε"语言)

定义 1.3.6 设有数列 $\{x_n\}$ 和常数 a, 若对 $\forall \varepsilon > 0$, 总是 $\exists N \in \mathbf{N}^+$, 使得当 $n > N$ 时, 恒有

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

成立. 则称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的**极限**. 或称数列 $\{x_n\}$收敛于常数 a. 记作

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a \quad 或 \quad x_n \to a (n \to \infty).$$

如果数列 $\{x_n\}$ 没有极限, 就称数列 $\{x_n\}$ 是**发散的**.

9. 收敛数列的性质

(1) **唯一性**. 若数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则其极限必唯一.

(2) **有界性**. 若数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则其必有界.

(3) **保号性**. 设 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$,

(i) 若 $a > 0$(或$a < 0$), 则 $\exists N \in \mathbf{N}^+$, 当 $n > N$ 时, 恒有 $x_n > 0$(或$x_n < 0$).

(ii) 若 $\exists N \in \mathbf{N}^+$, 使得当 $n > N$ 时, $x_n > 0$(或$x_n < 0$), 则 $a \geqslant 0$(或$a \leqslant 0$).

10. 函数的极限的定义

定义 1.3.7 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义, 若对 $\forall \varepsilon > 0$, 总是 $\exists \delta > 0$, 使得当 x 满足不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限, 记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A (x \to x_0)$$

左右极限. 当 x 从 x_0 的左侧 (右侧) 趋向于 x_0 时, 函数 $f(x)$ 的极限称为 $f(x)$ 在点 x_0 的左 (右) 极限, 分别记作

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \text{ 或 } f(x_0-0) \quad \left(\lim_{x\to x_0^+} f(x) \text{ 或 } f(x_0+0)\right).$$

函数极限存在的充要条件　$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A.$

类似地, 有 $x\to\infty, x\to-\infty, x\to+\infty$ 时, $f(x)$ 极限的定义.

11. 函数极限的性质

(1) *唯一性.* 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, 则其极限唯一.

(2) *局部有界性.* 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 则存在 $M>0$ 和 $\delta>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $|f(x)|\leqslant M$.

(3) *局部保号性.*

(i) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 且 $A>0$(或 $A<0$), 则存在常数 $\delta>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

(ii) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 且在 x_0 的某去心邻域内 $f(x)\geqslant 0$(或 $f(x)\leqslant 0$), 则 $A\geqslant 0$(或 $A\leqslant 0$).

12. 无穷小定义

定义 1.3.8　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ (或 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$), 则称函数 $f(x)$ 为 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$) 时的无穷小.

函数极限与无穷小的关系　$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充分必要条件是

$$f(x)=A+\alpha,$$

其中 α 为 $x\to x_0$ 时的无穷小.

13. 无穷大定义

定义 1.3.9　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ (或 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$), 则称函数 $f(x)$ 为 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$) 时的无穷大.

无穷小与无穷大的关系　在自变量的同一变化过程中, 无穷大的倒数为无穷小; 非零无穷小的倒数为无穷大.

14. 无穷小的性质

(1) 有限个无穷小的代数和仍是无穷小;

(2) 有界函数与无穷小的乘积是无穷小;

(3) 常数与无穷小的乘积是无穷小;

(4) 有限个无穷小的乘积仍是无穷小.

15. 函数极限的四则运算法则

设 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$(A,B 均为常数), 则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$;

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$;

(3) 若又有 $B\neq 0$, 那么 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}$.

16. 极限存在准则

准则 I(夹逼准则)　设在点 x_0 的某一去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$ 内 (或 $|x|>M$), 恒有

(1) $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$;

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} h(x)=A$

成立, 则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)$ 存在, 且有 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A$.

准则 II　单调有界数列必有极限.

17. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. 特点是 $\dfrac{0}{0}$ 型极限.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$. 特点是 1^∞ 型极限.

18. 无穷小的比较

设 $\lim\alpha=0, \lim\beta=0$, 且 $\alpha\neq 0$.

(1) 若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$, 则称 β 是比 α 高阶的无穷小, 记作 $\beta=o(\alpha)$;

(2) 若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$, 则称 β 是比 α 低阶的无穷小;

(3) 若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$, 则称 β 与 α 是同阶无穷小, 特别地, 当 $c=1$ 时, 即 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$, 此时称 β 与 α 是等价无穷小, 记作 $\alpha\sim\beta$.

等价无穷小代换定理　设 $\alpha,\beta,\alpha',\beta'$ 是同一变化过程中的无穷小, 且 $\alpha\sim\alpha'$, $\beta\sim\beta'$. 如果 $\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}=A$, 那么

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}=A.$$

常用的等价无穷小　设 $\alpha(x)\to 0$, 则有

$$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x),\quad \tan\alpha(x)\sim\alpha(x),\quad \arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x),\quad \arctan\alpha(x)\sim\alpha(x),$$
$$1-\cos\alpha(x)\sim\frac{\alpha(x)^2}{2},\quad \ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x),\quad \mathrm{e}^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x),$$
$$a^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\ln a(a>0),\quad (1+\alpha(x))^k-1\sim k\alpha(x)(k\neq 0\text{且为常数}).$$

19. 函数的连续性

1) 定义

定义 1.3.10　设函数 $f(x)$ 在 x_0 某一邻域内有定义, 如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

那么, 就称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续, x_0 称为 $f(x)$ 的连续点.

定义 1.3.11　设函数 $f(x)$ 在 x_0 某一邻域内有定义, 如果

$$\lim_{x\to 0}f(x)=f(x_0),$$

那么, 就称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

2) 单侧连续性

若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续.

若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在点 x_0 处既左连续又右连续.

3) 连续函数

如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内每一点都连续, 则称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内连续或称 $f(x)$ 是区间 (a,b) 内的连续函数, 区间 (a,b) 称为 $f(x)$ 的连续区间.

如果函数 $f(x)$ 是区间 (a,b) 内的连续函数, 并且在左端点 $x=a$ 处右连续, 即 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$, 在右端点 $x=b$ 处左连续, 即 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b)$, 则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续.

20. 函数的间断点

若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处间断, 点 x_0 称为 $f(x)$ 的间断点或不连续点.

间断点的常见类型　设 x_0 为 $f(x)$ 的间断点,

(1) **跳跃间断点**. 如果当 $x\to x_0$ 时,$f(x)$ 的左、右极限都存在但不相等, 即 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$, 则称 x_0 是 $f(x)$ 的跳跃间断点.

(2) **可去间断点**.如果当 $x\to x_0$ 时, $f(x)$ 的左、右极限存在且相等, 但不等于函数值 $f(x_0)$ 或函数 $f(x)$ 在 x_0 处无定义, 则称 x_0 是 $f(x)$ 的可去间断点.

跳跃间断点和可去间断点的共同特点是函数在点 x_0 处的左、右极限都存在, 所以把它们统称为第一类间断点.

(3) **第二类间断点**. 函数除第一类间断点以外的其他间断点, 统称为第二类间断点. 其特点是在此类间断点处的左、右极限至少有一个不存在.

21. 连续函数的性质

(1) **连续函数运算性质**. 若函数 $f(x),g(x)$ 在点 x_0 处连续, 则函数 $f(x)\pm g(x)$,

$$f(x)\cdot g(x), \frac{f(x)}{g(x)}(g(x_0)\neq 0)\text{在点}x_0\text{处也连续}.$$

(2) **反函数的连续性**. 如果函数 $y=f(x)$ 在区间 I_x 上单调增加 (或单调减少) 且连续, 那么它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 也在对应的区间 I_y 上单调增加 (或单调减少) 且连续.

(3) **复合函数的连续性**. 设函数 $y=f(g(x))$ 由函数 $u=g(x)$ 与函数 $y=f(u)$ 复合而成,$U(x_0)\subset D_{f\circ g}$. 若函数 $u=g(x)$ 在 $x=x_0$ 连续, 且 $g(x_0)=u_0$, 而函数 $y=f(u)$ 在 $u=u_0$ 连续, 则复合函数 $y=f(g(x))$ 在 $x=x_0$ 也连续.

(4) **初等函数的连续性**. 一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

22. 闭区间上连续函数的性质

(1) **最大值与最小值定理**. 闭区间上连续的函数一定有最大值与最小值.

(2) **有界性**. 闭区间上连续的函数一定在该区间上有界.

(3) **零点定理**. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号, 即 $f(a)\cdot f(b)<0$, 那么在开区间 (a,b) 内至少有函数 $f(x)$ 的一个零点, 即至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使

$$f(\xi)=0,$$

即 $\xi\in(a,b)$ 是方程 $f(x)=0$ 的一个实根.

(4) **介值定理**.

(i) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(a)\neq f(b),c$ 是介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任意实数, 那么在开区间 (a,b) 内至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使

$$f(\xi)=c.$$

(ii) 在闭区间上连续的函数必能取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值.

1.4 典型方法与例题分析

例 1.4.1 设 $f(x)=\arcsin(1-2x)$, 求 $f\left(x^2\right)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 的定义域.

分析 $f\left(x^2\right)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 的定义域是 $f\left(x^2\right)$ 的定义域和 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 的定义域的交集. 为此先确定函数 $f(x)$ 的定义域, 再求 $f\left(x^2\right)$ 的定义域和 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 的定义域.

解　函数 $f(x)$ 的定义域为 $|1-2x|\leqslant 1$, 即 $0\leqslant x\leqslant 1$, 故 $f\left(x^2\right)$ 的定义域为 $x^2\leqslant 1$, 即 $-1\leqslant x\leqslant 1$. $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 的定义域为 $0<\dfrac{1}{x}\leqslant 1$, 即 $x\geqslant 1$. 故 $f\left(x^2\right)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 的定义域为 $x=1$.

注 1.4.1　函数的定义域是函数概念的要素之一, 必须熟练掌握.

例 1.4.2　设有函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}(x+|x|)$与 $(x)=\begin{cases}x, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求复合函数 $f(g(x))$ 与 $g(f(x))$.

分析　根据复合函数的定义, 采用代入法解题.

解　(1) 先求 $f(g(x))$.

当 $x<0$ 时, $g(x)=x<0, f(g(x))=\dfrac{1}{2}(g(x)+|g(x)|)=\dfrac{1}{2}(x+|x|)=0$;

当 $x\geqslant 0$ 时, $g(x)=x^2\geqslant 0, f(g(x))=\dfrac{1}{2}(g(x)+|g(x)|)=\dfrac{1}{2}(x^2+\left|x^2\right|)=x^2$, 由上即得

$$f(g(x))=\begin{cases}0 & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

(2) 再求 $g(f(x))$.

因 $f(x)=\dfrac{1}{2}(x+|x|)\geqslant 0$, 故 $g(f(x))=f^2(x)=\dfrac{1}{2}(x^2+x\,|x|)$.

例 1.4.3　计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x-2\sqrt{x}-3}{x-9}$.

分析　极限是 "$\dfrac{0}{0}$" 型, 不能直接用极限的四则运算法则, 但是分子、分母均有因子 $(\sqrt{x}-3)$, 所以通过将分子、分母因式分解约去 "零因子" $(\sqrt{x}-3)$ 即可求解.

解　$\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x-2\sqrt{x}-3}{x-9}=\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}=\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}=\dfrac{2}{3}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2 x}-x}$.

分析　极限是 "$\dfrac{0}{0}$" 型, 分子、分母均有根式, 通过分子或分母有理化以及利用常见等价无穷小代换后再约去 "零因子"x 即可求解.

解　当 $x\to 0$ 时, $\sqrt{1+\sin^2 x}-1\sim\dfrac{1}{2}\sin^2 x, \tan x\sim x, 1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$, 所以有

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2 x}-x}\\ =&\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}\right)\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}\right)}{x\cdot\dfrac{1}{2}\sin^2 x\cdot\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}\right)}\\ =&\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x\cdot x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\dfrac{1}{2}x^2}{x^3}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$