普通高等教育“十一五”国家级规划教材

Business Administration Classics 21世纪工商管理系列教材

Operations Research

运筹学基础教程

（第三版）

魏权龄　胡显佑　编著

中国人民大学出版社

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

Business Administration Classics 21世纪工商管理系列教材

Operations Research

运筹学基础教程

（第三版）

魏权龄　胡显佑　编著

中国人民大学出版社

·北京·

图书在版编目（CIP）数据

运筹学基础教程/魏权龄，胡显佑编著．—3版．—北京：中国人民大学出版社，2012.3
21世纪工商管理系列教材
ISBN 978-7-300-15311-7

Ⅰ.①运… Ⅱ.①魏…②胡… Ⅲ.①运筹学-高等学校-教材 Ⅳ.①O22

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第030114号

普通高等教育“十一五”国家级规划教材
21世纪工商管理系列教材
运筹学基础教程（第三版）
魏权龄　胡显佑　编著
Yunchouxue Jichu Jiaocheng

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街31号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京宏伟双华印刷有限公司	**版　　次**	1987年6月第1版
规　　格	185 mm×260 mm　16开本		2012年3月第3版
印　　张	13.25 插页1	**印　　次**	2012年3月第1次印刷
字　　数	270 000	**定　　价**	28.00元

前　言

进入21世纪，我国高等院校对运筹学课程教学的需求不断扩大，计算机、信息、经济、工商管理、公共管理、金融工程，还有MBA、MPA，等等，都对运筹学教学有不同的需求。本书的编著者都是数学出身，后来在中国人民大学的人文社会科学氛围中，逐渐吸纳了经济管理方面的知识。我们深深感到运筹学与经济管理学科领域关系之密切。例如，运筹学中的对策论、线性规划、非线性规划、动态规划、多目标规划、数据包络分析（DEA）等，在经济管理中都有着直接的应用。

这次是对该书进行的第二次修订，整体上基本保留了原书的结构。同时，考虑到当代大学生应当加强数学以及提高在经济管理学科中使用数学的能力，我们在某些章节增加了与经济管理有关的内容和背景知识。例如：第2章“线性规划”部分，增加了线性规划的对偶理论和对偶规划的经济意义。第4章“非线性规划”部分，增加了“凸集、凸函数与凸规划”一节，以及“库恩-塔克定理”（Kuhn-Tucker定理）等内容。同时，对经济管理学科中出现最多的“最优化”问题所必需的预备知识，以附录形式给出。对第5章“多目标规划”重新进行了编写，特别是增加了在多目标规划课程中不可不讲的“像集”的内容；将福利经济学中的Pareto最优，从多目标规划的角度作了进一步的论述。对第9章“对策（博弈）论”的内容作了适当的扩充，例如“二人有限非零和对策”。第10章“评价相对有效性的DEA模型”是新增加并重新做了修改的一章，因为DEA是运筹学的一个新领域，有着广泛的应用。

我们希望本书是一本有别于侧重数学专业和理工科专业的运筹学教材。书中所涉及的数学不是很深，只限于微分学、简单的线性代数和一些初等概率论知识。在第二次修订时，减去了很多数学证明；删去了运筹学教学中某些非主流的内容。修订后的教材，可供工科院校及财经院校的本科生、MBA、MPA、研究生使用；经过对书中某些章节的筛选，也可作为大专班、职工大学、培训大学、电视大学、函授大学等的运筹学教材使用。

讲述本书全部内容的学时安排如下（共计70学时）：

第1章	绪论	2学时
第2章	线性规划	12学时
第3章	整数线性规划*	6学时
第4章	非线性规划*	6学时

第 5 章　多目标规划*　　6 学时
第 6 章　动态规划　　8 学时
第 7 章　存储论　　6 学时
第 8 章　决策论　　6 学时
第 9 章　对策（博弈）论　　6 学时
第 10 章　评价相对有效性的 DEA 模型*　　12 学时

如果希望讲授学时再少些，我们建议删去带“*”的章节，这样总学时数为 40 学时。

鉴于我们水平有限，书中不足乃至错误之处在所难免，恳切希望读者不吝指正。最后，感谢多年来阅读和使用本教材的老师、同学和朋友，感谢他们对本书修改提出的宝贵意见和建议。

魏权龄　胡显佑
于中国人民大学

目 录

第 1 章 绪论

Chapter 1

1.1 运筹学的历史

“运筹学”一词，最早出现于 1938 年的英国，英国人称之为 Operational Research. 1942 年美国开始从事这项工作时，称之为 Operations Research. 我国运筹学的先驱者从《史记》“运筹于帷幄之中，决胜于千里之外，子房功也”一句中摘取“运筹”二字作为这门科学的名称，既显示其军事的起源，也表明其萌芽早已出现在我国.

运筹学作为一门近代新兴的科学，起源于第二次世界大战期间. 20 世纪 30 年代后期，英国军事管理部门邀请一批科学家（绝大部分为自然科学家），研究与防御有关的战略和战术问题，以便最有效地利用有限的军事资源，最成功地使用现有的武器装备. 早期的工作包括研究新式雷达的有效使用，野外火炮控制设备的效能（尤其是火炮在实战中的应用）等. 这个小组的建立及其工作标志着第一次正式的运筹学活动. 英国运筹小组卓有成效的工作促使美国军事管理部门也开始进行类似的活动. 美国运筹小组的工作包括反潜艇策略、深水炸弹的起爆深度研究等. 这些早期的运筹学工作，使用的方法一般说来都极为浅显，但成效卓著. 人们开始认识到武器系统的有效使用和评价是必不可少的工作；用定量分析方法研究实际问题、建立数学模型等方法也是行之有效的.

第二次世界大战以后，各兵种的运筹小组转而研究在现代和未来战争中，各种作战条件下武器系统的有效、准确、客观的分析和评价. 而那些企业管理家也注意到了运筹小组的成就，想利用运筹学方法来解决产业部门内部新型的管理问题，以提高生产率和增加利润. 甚至在政府部门制定计划、进行决策时，也试图采用运筹学方法. 所有这些都使得运筹学的研究队伍和应用领域不断扩大. 20 世纪 50 年代，计算机科学与计算技术的成就，对运筹学的发展也起着很大的推动作用. 与此同时，运筹学本身也有了坚实的数学基础，诸如线性规划、动态规划、非线性规划、对策论、图论网络等运筹学分支日趋成熟. 在以后的 20 多年中，运筹学已被人们公认为一门学术性和应用性很强的学科.

世界上有许多国家把运筹学列为大学高年级及研究生学习课程的一部分，有关运筹学的书籍和杂志雨后春笋般涌现，建立了许多新的运筹学会等学术组织．如果说 70 年代是运筹学的巩固时期，那么到了 80 年代，在当今世界的许多亟待解决的问题（例如：人口问题，能源问题，粮食问题，裁军问题，第三世界经济发展问题等）面前，运筹学所面临的挑战是：如何为当今世界做出贡献．

1.2 运筹学的分支

运筹学有很多的应用领域和研究领域，时至今日仍在不断发展和扩充．这里只能简单叙述一下其最主要的几个分支．

（一）线性规划（Linear Programming）

线性规划是运筹学最主要的分支之一．1939 年，苏联数学家康特罗维奇（Л. В. КанТорович）就提出了生产组织与计划中的线性规划模型，40 年代末，丹西格（G. B. Dantzig）、查恩斯（A. Charnes）等人关于线性规划的工作，都是线性规划最卓著的开创性工作．线性规划是研究在线性不等式或等式的限制条件下，使得某一个线性目标取得最大（或最小）的问题．由于线性规划模型比较简单，理论与计算方法比较成熟，因而线性规划在交通、工业、农业、军事、经济、管理等方面有很多成功应用的实例．

（二）整数规划（Integer Programming）

由于在实际问题中某些变量的取值只能为整数（例如：机器的台数，完成工作的人数等），因此，在线性规划的模型中有一部分或全部变量要求是整数，这就构成了（线性）整数规划问题．在整数规划的解法当中，最具代表性的是割平面法和分支定界法．这两类方法的共同特点是把一个整数规划问题的求解，转化为多次线性规划的求解．

（三）非线性规划（Nonlinear Programming）

非线性规划也是运筹学的最主要分支之一．在很多实际问题当中，变量与变量之间的关系大多是非线性关系．如果在数学规划模型当中，至少有一个非线性函数出现（不论是目标函数，还是约束函数），我们就称其为非线性规划问题．非线性规划的发展是与库恩-塔克（H. W. Kuhn，A. W. Tucker）在 1951 年发表的非线性规划基本定理分不开的，此后非线性规划的工作日益增多，出现了很多算法．随着运筹学应用领域的不断扩大和深入，近 20 年来这一分支的研究发展很快．

（四）多目标规划（Multiobjective Programming）

由于客观情况比较复杂，有时判断一个方案的优劣难以用一个目标来权

衡，即需用一个以上的目标来衡量，而这些目标之间又往往不是那么协调（甚至是彼此完全对立的）. 多目标规划是研究具有多个目标的规划问题的理论与方法的一个新分支. 多目标规划应用广泛，近 20 年这一分支的研究十分活跃.

（五）动态规划（Dynamic Programming）

动态规划也是运筹学一个最主要的分支. 它是贝尔曼（R. Bellman）等人在 1951 年，根据一类多阶段决策问题的特性，提出了解决这类问题的著名的“最优化原理”，随后又应用这一原理解决了很多实际问题，从而创建了解决多阶段决策问题的一种新方法——动态规划. 动态规划在工程技术、经济、管理、军事等部门有着广泛的应用.

（六）对策（博弈）论（Theory of Games）

对策论也是运筹学的一个重要分支. 1928 年，冯・诺伊曼（J. von Neumann）等人受经济问题的启发，研究了一类具有某种特性的博弈问题，这是对策论最早期的工作. 在我国古代的战国时期，“齐王与田忌赛马”就是一个非常典型的对策论的例子. 对策论所研究的主要对象是带有斗争性质（或至少含有斗争成分）的现象. 由于对策论研究的对象与政治、军事、工业、农业、交通运输等领域有密切关系，处理问题的方法又有着明显的特色，所以越来越受到人们的注意. 近年来，对策论在经济管理方面的应用十分广泛.

（七）决策分析（Decision Analysis）

决策分析的最终目的是从若干个行动方案中，合理地分析和决定满足一定要求的方案. 这一分支的历史不是很长，尽管就它本身的内容和方法来说还不够完善，但它毕竟是一个很实用又很有前途的运筹学新分支.

（八）存储论（Inventory Control）

在人类的实践活动中，都会遇到存储问题，存储量过大或过小往往都会带来损失（例如：水库的蓄水量，商品的库存量，机器零件的备用量，血库的储血量等）. 存储论是研究在各种不同情况下的库存问题，形成数学模型，选择合理的存储决策，以使相应问题中考虑的各项费用的总和最小. 随着社会经济的不断发展，需要存储的对象越来越多，因而研究存储问题对我们来说是十分有意义的.

（九）排队论（Queuing Theory）

排队论有时也称为随机服务系统，它同样是运筹学的一个重要分支. 排队论是研究系统拥挤现象和排队现象的一门学科，其目的是研究排队系统的运行效率，估计服务质量，确定系统参数的最佳值，以决定系统结构是否合理、研究设计改进措施等. 排队论的开创性工作是 1915 年丹麦数学家埃尔朗

（A. K. Erlang）在研究自动电话系统中通话线路与电话用户呼叫的数量关系问题时，建立了呼叫生灭模型，推导出了后来被人们命名的埃尔朗公式，它极为成功地解决了这一问题．排队论在城市管理、计算机研制、卫星通信、水库调度、生产管理等方面都得到了广泛应用．

（十）图论（Graph Theory）

图论作为数学的一个分支，迄今已有200多年的历史．随着科学技术的发展及电子计算机的出现与广泛应用，20世纪50年代，图论的理论得到进一步发展．图论在物理、化学、电学、计算机科学等方面得到应用．特别是许多运筹学问题可以化为纯图论问题，使用图论的理论和方法来求解便显得十分方便．因此，图论中的某些理论和方法也可看作运筹学的一个重要分支．

（十一）数据包络分析（Data Envelopment Analysis）

数据包络分析（简称DEA）是运筹学的一个新领域，具有很强的经济学背景．它是1978年由美国著名的数学家、经济学家和管理学家查恩斯（A. Charnes）和库珀（W. W. Cooper）等人开创的．最早，DEA是用来研究多输入、多输出系统中具有可比性的“单位”或“部门”间的相对有效性的．就评价相对效率而言，使用DEA方法和模型不仅可以评价出决策单元的“技术有效性”，还可以评测出“规模收益”状况和是否呈现“拥挤”现象．此外，直接利用统计数据，可以估计具有多输入、多输出系统的“生产前沿面”，以及建立非参数的最优化模型等．因此，也可将DEA看做一种非参数的统计估计方法．30年来，DEA在理论、模型、方法等方面都得到了很大发展，在诸多领域得到了应用．

（十二）其他

运筹学的研究领域和应用领域在不断地扩大，而且运筹学与其他相关学科（例如：系统工程，系统分析，管理学等）有着相关之处，因此，运筹学应包括哪些分支并不是很严格．现将国内外一些文献中出现的与运筹学有关的内容罗列如下：

1. 模拟；
2. 可靠性；
3. 质量控制；
4. 模型论；
5. 可行性研究；
6. 统筹方法；
7. 投入产出分析．

有兴趣的读者可查看有关文献，本书不作详细介绍．

第 2 章

Chapter 2

线性规划

线性规划是运筹学中研究较早、理论和算法比较成熟的一个重要分支. 它主要研究在一定的线性约束条件下，使得某个线性指标最优的问题. 我们在工农业生产、交通运输、军事等各领域都会遇到这类问题，因此，线性规划也是运筹学中应用最广的分支之一.

2.1 线性规划问题的一般形式

为了说明线性规划问题的特点，可先看一个例子.

例 1 某工厂利用甲、乙、丙三种原料，生产 A_1，A_2，A_3，A_4 四种产品. 每月可供应该厂原料甲 500 吨、乙 300 吨、丙 200 吨. 生产 1 吨不同产品可获得的利润以及生产 1 吨不同产品所消耗的原料数量见表 2—1.

表 2—1

消耗 产品 / 原料	A_1	A_2	A_3	A_4	每月原料供应量（吨）
甲	1	1	2	2	500
乙	0	1	1	3	300
丙	1	2	1	0	200
利润（元/吨）	200	250	300	150	

问工厂每月应如何安排生产计划，使总利润最大?

为了用数学形式来表达这一问题，设该厂每月应生产 x_1 吨产品 A_1，x_2 吨产品 A_2，x_3 吨产品 A_3，x_4 吨产品 A_4.

生产这四种产品所消耗原料甲的总数量就是 $x_1+x_2+2x_3+2x_4$（吨），但原料甲每月只能供应 500 吨，因此应有

$$x_1+x_2+2x_3+2x_4\leqslant 500$$

类似地，我们还可以得到

$$x_2+x_3+3x_4\leqslant 300$$

$x_1+2x_2+x_3\leqslant 200$

各种产品的数量不应是负数，因此还应有

$x_1\geqslant 0，x_2\geqslant 0，x_3\geqslant 0，x_4\geqslant 0$

生产 x_1 吨产品 A_1，x_2 吨产品 A_2，x_3 吨产品 A_3，x_4 吨产品 A_4 所获得的总利润是

$f=200x_1+250x_2+300x_3+150x_4$

我们要求 f 的最大值.

综合起来，可以把这个问题的数学形式写成

$$\text{求}\quad \max f=200x_1+250x_2+300x_3+150x_4 \tag{2.1}$$

$$\text{满足}\quad \begin{cases} x_1+x_2+2x_3+2x_4\leqslant 500 & (2.2)\\ x_2+x_3+3x_4\leqslant 300 & (2.3)\\ x_1+2x_2+x_3\leqslant 200 & (2.4)\\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0,\ x_4\geqslant 0 & (2.5)\end{cases}$$

式中，记号“max f”表示函数 f 的最大值. $f=200x_1+250x_2+300x_3+150x_4$ 称为目标函数；式（2.2）、（2.3）、（2.4）、（2.5）称为约束条件. 满足约束条件（2.2）、（2.3）、（2.4）、（2.5）的一组 x_1，x_2，x_3，x_4 的值称为此问题的可行解，使目标函数 f 达到最大值的可行解称为最优解. 从制定生产计划的角度来看，可行解就是一个生产安排的方案，最优解就是一个最好的生产安排方案. 式（2.1）、（2.2）、（2.3）、（2.4）、（2.5）就是一个线性规划问题.

一般地讲，如果我们要求出一组变量的值，使之满足一组约束条件，这组约束条件只含有线性不等式或线性方程，同时这组变量的值使某个线性的目标函数取得最优值（最大值或最小值），这样的数学问题就是线性规划问题.

工农业生产、交通运输等各领域中的许多问题都可以归结为求一个线性规划的解的问题.

具有 n 个变量的线性规划问题可以写成下述形式：

$$\text{求}\quad \min f=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n(\text{或}\max f=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n)$$

$$\text{满足}\quad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n * b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n * b_2\\ \qquad\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n * b_m\\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ \cdots,\ x_n\geqslant 0\end{cases}$$

式中，“max”表示最大值；“min”表示最小值；“$*$”表示可取“$=$”、“$\geqslant$”、“$\leqslant$”中的某一个.

利用求和记号“$\sum$”，我们也可以把一般的线性规划问题记为：

$$\text{求}\quad \min f=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\quad (\text{或}\max f=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j) \tag{2.6}$$

$$\text{满足}\quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j * b_i,\quad i=1,2,\cdots,m & (2.7)\\ x_j\geqslant 0,\quad j=1,2,\cdots,n & (2.8)\end{cases}$$

满足约束条件（2.7）、（2.8）的一组 x_1，x_2，…，x_n 的值称为此线性规划问题的可行解. 使目标函数 f 达到最优值的可行解称为线性规划问题的最优解.

线性规划问题是描述实际问题的抽象的数学形式，它反映了实际问题中数量之间的关系. 但是要把一个实际问题用数学形式（或模型）表示出来是比较复杂的，因为首先要了解该实际问题的经济背景，掌握较准确的数据，确定影响该问题的主要因素及我们想达到的目标，然后设出若干变量，并列出约束条件和目标函数. 如果所得到的数学模型具有式（2.6）、（2.7）、（2.8）所示的形式，这才是线性规划问题.

2.2　两个变量的线性规划问题的图解法

例 2　用图解法求解线性规划问题：

$$\begin{cases} \max\ f=3x_1+4x_2 \\ x_1+2x_2\leqslant 6 \\ 3x_1+2x_2\leqslant 12 \\ x_2\leqslant 2 \\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

解：我们把 x_1，x_2 看做平面直角坐标系中某个点的坐标，则满足一个约束不等式的所有的点（x_1，x_2）就形成一个半平面. 例如，为了确定 $x_1+2x_2\leqslant 6$所表示的半平面，可以先在坐标平面上画出直线 $x_1+2x_2=6$，再任取不在该直线上的一点，如取原点（0，0），将 $x_1=0$，$x_2=0$ 代入不等式 $x_1+2x_2\leqslant 6$ 的左边，显然可以使这个不等式成立. 那么 $x_1+2x_2\leqslant 6$ 就表示以 $x_1+2x_2=6$ 为边界，原点（0，0）所在的那半个平面.

在此例中共有五个约束不等式，所以五个半平面的公共部分中的点的坐标（x_1，x_2）就是此线性规划问题的可行解. 利用上面所介绍的方法，我们可以求出这一公共部分（见图 2—1），并将它称为线性规划问题的可行解区域（图中的阴影部分）.

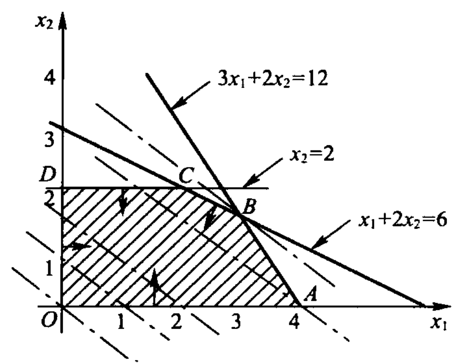

图 2—1

为了求出此线性规划问题的最优解，我们将 f 看做参数，则 $f=3x_1+4x_2$ 表示坐标平面上的一族平行直线. 例如，令$f=0$，则 $3x_1+4x_2=0$，表示过原点 O 的一条直线，在这条直线上的任意一点的坐标都使目标函数取值为零. 我们将这样的直线称为等值线（或等高线）.

再令 f 分别取值 3，6，12 等，就可以作出一组等值线，由图 2—1 可以看出，在这个例子中，当 f 取值越大时，对应的等值线离原点越远.

我们要求此线性规划问题的最优解，只要在等值线中找到既与可行解区域有公共点，又尽可能与原点距离远的那一条就可以了. 从图 2—1 显然可以看出经过 B 点的那条等值线符合要求. 为求出 B 点坐标，只需求解方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2=6 \\ 3x_1+2x_2=12 \end{cases}$$

可得最优解 $x_1=3$，$x_2=\frac{3}{2}$，对应的目标函数最大值为 $f=3\times3+4\times\frac{3}{2}=15$. 由图 2—1 还可以看出，这个线性规划问题的最优解是唯一的.

由例 2 可知，利用图解法求解两个变量的线性规划问题可按以下步骤进行：

（1）求出可行解区域：在平面直角坐标系中，可行解区域是各约束条件所表示的半平面的公共部分.

（2）求最优解：将目标函数中的 f 看做参数，作出等值线. 选取一条等值线，使它与可行解区域有公共点，并取得最大值或最小值.

例 3 用图解法求解线性规划问题：

$$\begin{cases} \max\ f=x_1+2x_2 \\ x_1+2x_2\leqslant 6 \\ 3x_1+2x_2\leqslant 12 \\ x_2\leqslant 2 \\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

解：（1）求可行解区域：因为约束条件与例 2 完全相同，所以可行解区域仍和例 2 相同.

（2）求最优解：将目标函数 $f=x_1+2x_2$ 中的 f 看做参数，令 $f=0，2，4，\cdots$，得一族等值线（图 2—2）. 由图可直接看出线段 BC 上所有点对应的坐标都是这个线性规划的最优解 . B 点坐标为 $x_1=3$，$x_2=\frac{3}{2}$，C 点坐标为 $x_1=2$，$x_2=2$. 它们对应的目标函数最大值 $f=3+2\times\frac{3}{2}=6$. 在这个例题中最优解有无穷多个.

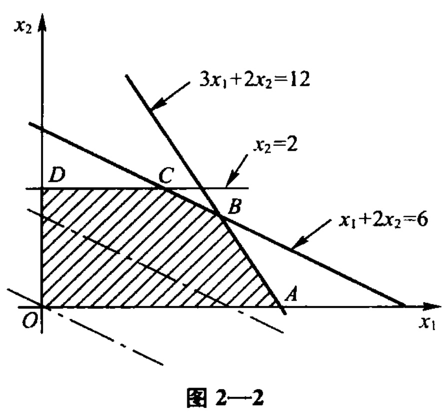

图 2—2

例 4 用图解法求解线性规划问题：

$$\begin{cases} \min\ f=x_1+x_2 \\ x_1+2x_2\geqslant 2 \\ x_1-\ x_2\geqslant -1 \\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

解：（1）求可行解区域：可行解区域 $ABCD$ 是四个半平面所限定的公共部分（图 2—3）．显然，可行解区域是一个无界的凸区域．

（2）求最优解：将 f 看做参数，令 $f=0，1，2，\cdots$，作出等值线．由图直接可以看出最小值在 B 点达到．而 B 点的坐标为 $(0，1)$．所以最小值 $f=0+1=1$．

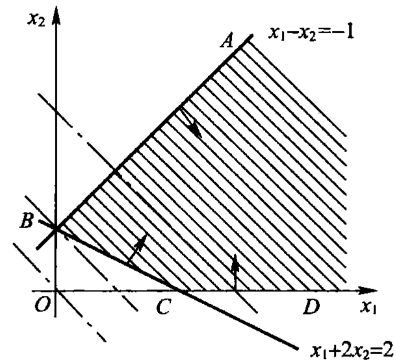

图 2—3

例 5　用图解法求解线性规划问题：

$$\begin{cases} \max f=x_1+x_2 \\ x_1+2x_2\geqslant 2 \\ x_1-x_2\geqslant -1 \\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

解：（1）求可行解区域：由于约束条件与例 4 完全相同，因此可行解区域仍是图 2—3 中的 $ABCD$.

（2）求最优解：目标函数 $f=x_1+x_2$ 仍与例 4 相同，我们要求它的最大值．但容易看出，无论设 f 是多么大的正数 M，等值线 $x_1+x_2=M$ 总与可行解区域有公共点．因此，这一线性规划问题的最优值无上界．这时，我们说此线性规划问题有可行解，但无最优解．

例 6　用图解法求解线性规划问题：

$$\begin{cases} \min f=3x_1-2x_2 \\ x_1+x_2\leqslant 1 \\ 2x_1+3x_2\geqslant 6 \\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

解：求可行解区域：从图 2—4 可以看出，四个约束不等式所表示的半平面没有公共部分．因此，这一线性规划问题没有可行解，更没有最优解．

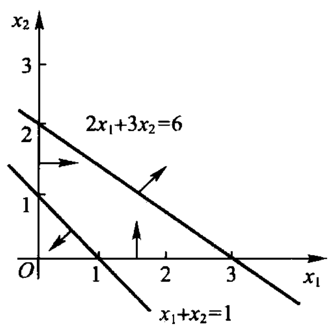

图 2—4

由例 2～例 6，我们可以得到几个重要的一般性结论：

1. 线性规划问题可能没有可行解（如例 6）．当线性规划问题有可行解时，它可能没有最优解（最优值无界），如例 5；也可能只有唯一的最优解，如例 2；还可能有无穷多个最优解，如例 3.

2. 线性规划问题的可行解区域都是“凸”区域．

3. 线性规划问题如果有最优解，则最优解可以在可行解区域的顶点上达到，如例 2 中的 B 点，例 3 中的 B 点、C 点，例 4 中的 B 点等．

上述结论对于含有 $n(n>2)$ 个变量的线性规划问题也是正确的．

2.3 线性规划问题的标准形式

为了便于讨论线性规划问题的求解方法，我们有必要将一般的线性规划问题（2.6）、（2.7）、（2.8）化为标准形式. 在本教程中，我们规定线性规划问题的标准形式必须具有以下特点：

1. 所有变量必须是非负的；
2. 所有的约束条件（变量的非负约束除外）必须是等式；
3. 求目标函数的最小值.

一般地，我们将标准形式的线性规划问题记为：

$$
(\mathrm{L})\begin{cases}\min f=\sum\limits_{j=1}^{n}c_jx_j\\ \sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i, \quad i=1,2,\cdots,m\\ x_j\geqslant 0, \quad j=1,2,\cdots,n\end{cases}
$$

如果某些线性规划问题不是标准形式，必须先把它变为标准形式.

例 7 将线性规划问题

$$
\begin{cases}\max f=4x_1+3x_2\\ x_1+x_2\leqslant 10\\ 2x_1-x_2\geqslant 2\\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0\end{cases}
$$

化为标准形式.

解：令 $f'=-f=-4x_1-3x_2$，则求目标函数 f 最大值的问题就可转化为求目标函数 f' 的最小值的问题.

对于约束条件 $x_1+x_2\leqslant 10$，可以在不等式左端加上一个非负变量 x_3，使其成为等式：

$$x_1+x_2+x_3=10$$

类似地，约束条件 $2x_1-x_2\geqslant 2$，可以在不等式左端减去另一非负变量 x_4，使其成为等式：

$$2x_1-x_2-x_4=2$$

综上所述，原线性规划问题就可化为标准形式：

$$
\begin{cases}\min f'=-f=-4x_1-3x_2\\ x_1+x_2+x_3\qquad =10\\ 2x_1-x_2\qquad -x_4=2\\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0,\ x_4\geqslant 0\end{cases}
$$

新添加的变量 $x_3\geqslant 0$，$x_4\geqslant 0$，称为松弛变量.

例 8 将线性规划问题