

(第二版)

QUANGUO ZHUMING GAOXIAO ZIZHU ZHAOSHENG FUXI ZHIDAO

全国著名高校 自主招生复习指导

数学

本册主编 陆建根 王卫华



YZLI0890167634



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS

浙江大学出版社

全国著名高校自主招生复习指导

数 学

(第二版)

丛书主编 王卫华
本册主编 陆建根 王卫华
副主编 殷永霞 杨 虎 张欣然
编 写 林 玲 王文霞 李 英 史 娟
徐 艳 徐 慧 吴芳清 储六春
王小燕 吴宝清



YZLI0890167534



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS

浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

全国著名高校自主招生复习指导. 数学 / 陆建根, 王卫华

主编. —杭州: 浙江大学出版社, 2010. 11(2011. 7 重印)

ISBN 978-7-308-08113-9

I. ①全… II. ①陆… ②王… III. ①数学课—高中—
—升学参考资料 IV. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 219425 号

(第二策)

全国著名高校自主招生复习指导—数学

陆建根 王卫华 主编

责任编辑 张 明

封面设计 刘依群

出版发行 浙江大学出版社

(杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007)

(网址: <http://www.zjupress.com>)

排 版 浙江时代出版服务有限公司

印 刷 德清县第二印刷厂

开 本 787mm×960mm 1/16

印 张 14.25

字 数 330 千

版 印 次 2011 年 7 月第 2 版 2011 年 7 月第 2 次印刷

书 号 ISBN 978-7-308-08113-9

定 价 28.00 元

版权所有 翻印必究 印装差错 负责调换

浙江大学出版社发行部邮购电话 (0571) 88925591

目 录

一、知识提高与补充	1
1. 反函数与函数方程(含反三角函数)	1
2. 重要不等式及其应用	7
3. 数列与极限	11
4. 复数及其应用	18
5. 排列、组合、二项式定理	21
6. 概 率	26
7. 行列式	31
8. 数论初步与多项式	38
二、自主招生试题	44
2004 年复旦大学自主招生数学试题	44
2004 年同济大学自主招生数学试题	45
2005 年复旦大学自主招生数学试题	46
2005 年上海交通大学保送、推优生数学试题	47
2006 年清华大学自主招生数学试题	48
2006 年清华大学保送生暨自主招生北京冬令营数学笔试试题	49
2006 年复旦大学推优保送生考试数学试题	50
2006 年上海交通大学推优、保送生考试数学试题	51
2007 年上海交通大学冬令营选拔测试数学试题	52
2008 年北京大学自主招生数学试题	53
2008 年清华大学自主招生数学试题	54
2008 年复旦大学自主招生数学试题	55
2008 年南京大学自主招生数学试题	59
2008 年浙江大学自主招生数学试题	60
2008 年中国科技大学自主招生数学试题(部分)	61
2008 年上海交通大学冬令营数学试题	61

2008 年上海财经大学自主招生数学试题	62
2008 年西北工业大学自主招生高考数学测试题	65
2009 年北京大学自主招生数学试题	69
2009 年清华大学自主招生数学试题(理科)	69
2009 年清华大学自主招生数学试题(理科综合能力测试)	70
2009 年清华大学自主招生数学试题(文科)	71
2009 年复旦大学自主招生数学试题(部分)	71
2009 年南京大学自主招生数学试题	73
2009 年浙江大学自主招生数学试题	74
2009 年中国科技大学自主招生数学试题	75
2010 年北京大学自主招生考试数学试题	76
2010 年清华大学等五校自主招生数学试题	76
2011 年同济大学等九校(卓越联盟)自主招生数学试题	77
2011 年综合性大学(北约)自主选拔录取联合考试数学试题	79
2011 年全国高水平大学(华约)自主招生选拔学业能力测试数学试题	79
自主招生数学模拟试卷一	83
自主招生数学模拟试卷二	86
自主招生数学模拟试卷三	88
自主招生数学模拟试卷四	90
自主招生数学模拟试卷五	93
自主招生数学模拟试卷六	95
自主招生数学模拟试卷七	97
自主招生数学模拟试卷八	99
自主招生数学模拟试卷九	101
自主招生数学模拟试卷十	103
三、参考答案	105
2004 年复旦大学自主招生数学试题答案	105
2004 年同济大学自主招生数学试题答案	108
2005 年复旦大学自主招生数学试题答案	111
2005 年上海交通大学保送、推优生数学试题答案	114
2006 年清华大学自主招生数学试题答案	116
2006 年清华大学保送生暨自主招生北京冬令营数学笔试试题答案	118
2006 年复旦大学推优保送生考试数学试题答案	120

2006 年上海交通大学推优、保送生考试数学试题答案	124
2007 年上海交通大学冬令营选拔测试数学试题答案	127
2008 年北京大学自主招生数学试题答案	130
2008 年清华大学自主招生数学试题答案	132
2008 年复旦大学自主招生数学试题答案	133
2008 年南京大学自主招生数学试题答案	137
2008 年浙江大学自主招生数学试题答案	141
2008 年中国科技大学自主招生数学试题(部分)答案	143
2008 年上海交通大学冬令营数学试题答案	144
2008 年上海财经大学自主招生数学试题答案	147
2008 年西北工业大学自主招生高考数学测试题答案	150
2009 年北京大学自主招生数学试题答案	153
2009 年清华大学自主招生数学试题(理科)答案	155
2009 年清华大学自主招生数学试题(理科综合能力测试)答案	157
2009 年清华大学自主招生数学试题(文科)答案	159
2009 年复旦大学自主招生数学试题(部分)答案	160
2009 年南京大学自主招生数学试题答案	163
2009 年浙江大学自主招生数学试题答案	165
2009 年中国科技大学自主招生数学试题答案	167
2010 年北京大学自主招生考试数学试题答案	168
2010 年清华大学等五校自主招生数学试题答案	170
2011 年同济大学等九校(卓越联盟)自主招生数学试题答案	174
2011 年综合性大学(北约)自主选拔录取联合考试数学试题答案	178
2011 年全国高水平大学(华约)自主招生选拔学业能力测试数学试题答案	180
自主招生数学模拟试卷一答案	184
自主招生数学模拟试卷二答案	189
自主招生数学模拟试卷三答案	194
自主招生数学模拟试卷四答案	199
自主招生数学模拟试卷五答案	203
自主招生数学模拟试卷六答案	206
自主招生数学模拟试卷七答案	209
自主招生数学模拟试卷八答案	211
自主招生数学模拟试卷九答案	214
自主招生数学模拟试卷十答案	216

一、知识提高与补充

1. 反函数与函数方程(含反三角函数)

知识梳理

1. 反函数的定义

设函数 $y=f(x)(x \in A)$ 的值域是 C , 根据这个函数中 x, y 的关系, 用 y 表示 x , 得到 $x=\varphi(y)$. 若对于 y 在 C 中的任何一个值, 通过 $x=\varphi(y)$, x 在 A 中都有唯一的值和它对应, 那么, $x=\varphi(y)$ 就表示 y 是自变量, x 是应变量的 φ 函数, 这样的函数 $x=\varphi(y)(y \in C)$ 叫做函数 $y=f(x)(x \in A)$ 的反函数, 记作 $x=f^{-1}(y)$, 习惯上改写成 $y=f^{-1}(x)$. 若 $y=2x+6$ 记为 $f(x)=2x+6$, 则它的反函数为 $f^{-1}(x)=\frac{x}{2}-3$.

从映射的角度看, 若确定函数 $y=f(x)$ 的映射是定义域 A 到值域 C 的一一映射, 则它的逆映射 $f^{-1}:(x=f^{-1}(y))C \rightarrow A$ 确定的函数 $x=f^{-1}(y)$ (习惯上记为 $y=f^{-1}(x)$) 叫做函数 $y=f(x)$ 的反函数. 即, 函数 $y=f(x)$ 是定义域 A 到值域 C 的映射, 而它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 是集合 C 到集合 A 的映射, 由此可知:

(1) 只有“一一映射”确定的函数才有反函数. 如 $y=x^2(x \in \mathbf{R})$ 没有反函数, 而 $y=x^2, x \in [0, +\infty)$ 有反函数, $y=\sqrt{x}, x \in [0, +\infty)$

(2) 互为反函数的定义域和值域互换. 即函数 $y=f(x)$ 的定义域正好是它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的值域; 函数 $y=f(x)$ 的值域正好是它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域. 且 $f[f^{-1}(x)]=x, f^{-1}[f(x)]=x$ (如下表所示).

	函数 $y=f(x)$	反函数 $y=f^{-1}(x)$
定义域	A	C
值域	C	A



(3) 函数 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数. 即, 若函数 $y=f(x)$ 有反函数 $y=f^{-1}(x)$, 那么函数 $y=f^{-1}(x)$ 的反函数就是 $y=f(x)$.

2. 反函数的 8 个性质

(1) 原象与象的唯一互对性

设函数 $f(x)$ 存在反函数 $f^{-1}(x)$, 若函数 $f(x)$ 将定义域 A 中的元素 a 映射成值域为 C 中的元素 b , 则它的反函数 $f^{-1}(x)$ 恰好将值域 C 中的元素 b 唯一还原成 A 中的元素 a , 即 $f(a)=b \Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$.

(2) 定义域与值域的互换性

若函数 $f(x)$ 的定义域为 A , 值域为 C , 则它的反函数 $f^{-1}(x)$ 的定义域为 C , 值域为 A , 即反函数的定义域和值域分别是原函数的值域和定义域.

(3) 图像的对称性

在同一直角坐标系中, 互为反函数的两个函数的图像关于直线 $y=x$ 对称; 反之亦然.

(4) 奇偶性

奇函数 $y=f(x)(x \in A)$ 若存在反函数, 则它的反函数 $y=f^{-1}(x)(x \in C)$ 也是奇函数. 定义域为非单元素集的偶函数不存在反函数.

(5) 单调性

单调函数 $y=f(x)(x \in A)$ 若存在反函数, 则它的反函数 $y=f^{-1}(x)(x \in C)$ 也是单调函数, 且它们的单调性相同.

(6) 对应法则互逆性

即有 ① $f^{-1}[f(x)]=x, x \in A, A$ 是 $f(x)$ 的定义域;

② $f[f^{-1}(x)]=x, x \in C, C$ 是 $f(x)$ 的值域.

(7) 交点性质

函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像交点, 或者在直线 $y=x$ 上, 或者关于直线 $y=x$ 对称;

当函数 $y=f(x)$ 是单调增函数, 则函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像的交点必定在直线 $y=x$ 上.

(8) 自反函数性质

① 函数 $y=f(x)$ 为自反函数的充要条件是 $f[f(x)]=x$;

② 函数 $y=f(x)$ 为自反函数的充要条件是它自身的图像关于直线 $y=x$ 对称.

3. 求反函数的步骤

(1) 解关于 x 的方程 $y=f(x)$, 达到用 y 表示 x 的目的;

(2) 把第一步得到的式子中的 x 换成 y , y 换成 x ;

(3) 求出并说明反函数的定义域(即函数 $y=f(x)$ 的值域).

③ 4. 方程的根与函数的零点

(1) 零点: 对于函数 $y=f(x)$, 我们把使 $f(x)=0$ 的实数 x 叫做函数 $y=f(x)$ 的零点.

(2) 方程 $f(x)=0$ 有实数根 $\Leftrightarrow$ 函数 $y=f(x)$ 的图像与 x 轴有交点 $\Leftrightarrow$ 函数 $y=f(x)$ 有零点.

(3) 定理: 如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的图像是连续不断的一条曲线, 并且有 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 那么, 函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内有零点, 即存在 $c \in (a, b)$, 使得 $f(c)=0$, 这个 c 也就是方程 $f(x)=0$ 的根.

5. 函数方程的概念

(1) 函数方程的定义: 含有未知函数的等式叫做函数方程.

(2) 函数方程的解: 能使函数方程成立的函数叫做函数方程的解.

(3) 解函数方程: 求函数方程的解或证明方程无解的过程叫解函数方程.

6. 函数方程的解法

(1) 代换法(或换元法)

把函数方程中的自变量适当地以其他的自变量代换(代换时应注意使函数的定义域不会发生变化), 得到一个新的函数方程, 然后设法求得未知函数.

(2) 赋值法

在函数定义域内, 给自变量赋以某些特殊值或式, 从而求出函数解析式, 或求出某些函数值, 或讨论函数的某些性质.

(3) 待定系数法

当函数方程中的未知数是多项式时, 可用此法经比较系数而得.

(4) 迭代法

由函数方程找出函数值之间的关系, 通过 n 次迭代得到函数方程的解法.

(5) 柯西法

在 $f(x)$ 单调(或连续)的条件下, 利用柯西函数方程的解求解.

柯西(Cauchy)方程: 一个定义在有理数集上的实值函数 f , 对一切有理数 x 和 y , 都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$. 证明: 对一切有理数都有 $f(x)=xf(1)$.

证明: 由题设不难得出 $f(x_1+x_2+\cdots+x_n)=f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)$.

取 $x_1=x_2=\cdots=x_n=x$, 得 $f(nx)=nf(x) (n \in \mathbf{N}^*)$.

取 $x=0$, 则 $f(0)=nf(0)$, 得 $f(0)=0$. ①

取 $x=1$, 则 $f(n)=nf(1)$.

取 $x=\frac{m}{n}$, 则 $f(m)=nf(\frac{m}{n})$, 得 $f(\frac{m}{n})=\frac{1}{n}f(m)=\frac{m}{n}f(1)$. ②

取 $x=-\frac{m}{n}$, 且令 $y=-x>0$, 则 $f(x)+f(y)=f(x+y)=f(0)=0$.

$$\therefore f(x) = -f(y) = -yf(1) = xf(1) (m, n \in \mathbf{N}^*, \text{ 且 } (m, n) = 1). \quad ③$$

有上述①②③, 知: 对任意有理数 x , 均有 $f(x) = xf(1)$.

另一方面, 对于任意的无理数 x , 因 $f(x)$ 连续, 取以 x 为极限的有理数序列 $\{x_n\}$, 则有 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n f(1) = xf(1)$.

典型例题

例 1 函数 $y = \ln \frac{x+1}{1-x}, x \in (1, +\infty)$ 的反函数()

(A) $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}, x \in (0, +\infty)$ (B) $y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}, x \in (0, +\infty)$

(C) $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}, x \in (-\infty, 0)$ (D) $y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}, x \in (-\infty, 0)$

解 本题无需利用求反函数的三步曲: 反解—互换—表定义域, 只要利用互为反函数的定义域和值域互换性即可. 由 $x \in (1, +\infty)$, 得 $y = \ln \frac{x+1}{x-1} = \ln(1 + \frac{2}{x-1}) \geq 0$, 得反函数的定义域为 $(0, +\infty)$, 排除(C)、(D), 且反函数的值域为 $(1, +\infty)$, 故选(B).

例 2 若 $f(x)$ 与其反函数 $f^{-1}(x)$ 是同一个一次函数 $y = ax + b$, 求 a 和 b 的值.

解 由 $f(x)$ 为自反函数, 据性质有 $f[f(x)] = x$, 即

$$a^2x + ab + b = x, \text{ 得 } \begin{cases} a^2 = 1 \\ ab + b = 0 \end{cases},$$

解得 $a = 1, b = 0$ 或 $a = -1, b \in \mathbf{R}$.

例 3 设函数 $f(x) = \frac{1-2x}{1+x}$, 又函数 $g(x)$ 与 $y = f^{-1}(x+1)$ 的图像关于 $y = x$ 对称,

求 $g(2)$ 的值.

解法一 由 $y = \frac{1-2x}{1+x}$ 得 $x = \frac{1-y}{y+2}, \therefore f^{-1}(x) = \frac{1-x}{x+2}, f^{-1}(x+1) = \frac{-x}{x+3},$

$\therefore g(x)$ 与 $y = \frac{-x}{x+3}$ 互为反函数, 由 $2 = \frac{-x}{x+3}$, 得 $g(2) = -2$.

解法二 由 $y = f^{-1}(x+1)$ 得 $x = f(y) - 1, \therefore g(x) = f(x) - 1, \therefore g(2) = f(2) - 1 = -2$.

例 4 已知 $f(x) = \frac{a2^x - 1}{2^x + 1} (a \in \mathbf{R})$, 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数. (1) 求 a 的值; (2) 求 $f(x)$ 的反

函数; (3) 对任意的 $k \in (0, +\infty)$ 解不等式 $f^{-1}(x) > \log_2 \frac{1+x}{k}$.

解 (1) 由题知 $f(0) = 0$, 得 $a = 1$, 此时

$$f(x) + f(-x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1} + \frac{2^{-x} - 1}{2^{-x} + 1} = \frac{2^x - 1}{2^x + 1} + \frac{1 - 2^x}{1 + 2^x} = 0, \text{ 即 } f(x) \text{ 为奇函数.}$$

$$(2) \because y = \frac{2^x - 1}{2^x + 1} = 1 - \frac{2}{2^x + 1}, \text{ 得 } 2^x = \frac{1+y}{1-y} (-1 < y < 1),$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \log_2 \frac{1+x}{1-x} (-1 < x < 1).$$

$$(3) \because f^{-1}(x) > \log_2 \frac{1+x}{k}, \therefore \begin{cases} \frac{1+x}{1-x} > \frac{1+x}{k} \\ -1 < x < 1 \end{cases}, \therefore \begin{cases} x > 1-k \\ -1 < x < 1 \end{cases},$$

综上, ①当 $0 < k < 2$ 时, 原不等式的解集 $\{x | 1-k < x < 1\}$;

②当 $k \geq 2$ 时, 原不等式的解集 $\{x | -1 < x < 1\}$.

例 5 已知函数 $f(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 (x > 1)$, 解不等式 $f^{-1}(x) > 3$.

解 由 $f(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 = \left(1 - \frac{2}{x+1}\right)^2 (x > 1)$ 知 $f(x)$ 为 $(1, +\infty)$ 上的单调递增函数, 值域为 $(0, 1)$. 所以 $f(x)$ 有反函数 $f^{-1}(x)$, 且 $f^{-1}(x)$ 是 $(0, 1)$ 上的单调递增函数.

又 $\because 3 \in (1, +\infty)$, 即 3 在 $f(x)$ 的定义域内,

$$\therefore \text{不等式 } f^{-1}(x) > 3 \text{ 等价于 } \begin{cases} 0 < x < 1 \\ f(f^{-1}(x)) > f(3) \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x > f(3) \end{cases}.$$

$$\text{又 } f(3) = \left(\frac{3-1}{3+1}\right)^2 = \frac{1}{4}, \text{ 所以不等式 } f^{-1}(x) > 3 \text{ 的解集为 } \left\{x \mid \frac{1}{4} < x < 1\right\}.$$

例 6 已知 $f(2 - \cos x) = \cos 2x - \cos x$, 求 $f(x-1)$.

解 方法一(换元法)

$$\because f(2 - \cos x) = \cos 2x - \cos x = 2\cos^2 x - \cos x - 1.$$

$$\text{令 } u = 2 - \cos x (1 \leq u \leq 3), \text{ 则 } \cos x = 2 - u.$$

$$\therefore f(2 - \cos x) = f(u) = 2(2-u)^2 - (2-u) - 1 = 2u^2 - 7u + 5 (1 \leq u \leq 3).$$

$$\therefore f(x-1) = 2(x-1)^2 - 7(x-1) + 5 = 2x^2 - 11x + 14 (2 \leq x \leq 4).$$

方法二(配凑法)

$$f(2 - \cos x) = 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 2(2 - \cos x)^2 - 7(2 - \cos x) + 5.$$

$$\therefore f(x) = 2x^2 - 7x + 5 (1 \leq x \leq 3), \text{ 即}$$

$$f(x-1) = 2(x-1)^2 - 7(x-1) + 5 = 2x^2 - 11x + 14 (2 \leq x \leq 4).$$

例 7 已知 $f(x)$ 是一次函数, 且 $f\{f[f \cdots f(x)]\} = 1024x + 1023$. 求 $f(x)$.

解 设 $f(x) = ax + b (a \neq 0)$, 记 $f\{f[f \cdots f(x)]\} = f_n(x)$, 则

$$f_2(x) = f[f(x)] = a(ax+b) + b = a^2x + b(a+1).$$

$$f_3(x) = f\{f[f(x)]\} = a[a^2x + b(a+1)] + b = a^3x + b(a^2 + a + 1).$$

依此类推有:



$$f_{10}(x) = a^{10}x + b(a^9 + a^8 + \cdots + a + 1) = a^{10}x + \frac{b(1-a^{10})}{1-a}.$$

由题设知 $a^{10} = 1024$, 且 $\frac{b(1-a^{10})}{1-a} = 1023$.

$\therefore a = 2, b = 1$ 或 $a = -2, b = -3$.

$\therefore f(x) = 2x + 1$ 或 $f(x) = -2x - 3$.

例 8 已知 $f(1) = \frac{1}{5}$, 且当 $n > 1$ 时, 有 $\frac{f(n-1)}{f(n)} = \frac{2nf(n-1)+1}{1-2f(n)}$. 求 $f(n) (n \in \mathbf{N}^*)$.

解 对已知等式(递推公式)进行整理, 得 $f(n-1) - f(n) = 2(n+1)f(n)f(n-1)$.

$$\therefore \frac{1}{f(n)} - \frac{1}{f(n-1)} = 2(n+1).$$

把 n 依次用 $2, 3, \dots, n$ 代换, 得 $\frac{1}{f(2)} - \frac{1}{f(1)} = 2 \times 3, \frac{1}{f(3)} - \frac{1}{f(2)} = 2 \times 4, \dots$,

$$\frac{1}{f(n)} - \frac{1}{f(n-1)} = 2(n+1). \text{ 把上述 } (n-1) \text{ 个等式相加, 得}$$

$$\frac{1}{f(n)} - \frac{1}{f(1)} = 2[3+4+\cdots+(n+1)] = (n-1)(n+4).$$

$$\therefore \frac{1}{f(n)} = \frac{1}{f(1)} + (n-1)(n+4) = n^2 + 3n + 1, \therefore f(n) = \frac{1}{n^2 + 3n + 1}.$$

例 9 (柯西法) 设 $f(x) (x \in \mathbf{R})$ 连续且恒不为 0, 求函数方程 $f(x+y) = f(x)f(y)$ 的解.

$$\text{解 } \because f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)f\left(\frac{x}{2}\right) \geq 0,$$

若存在 $x_0 \in \mathbf{R}$, 使 $f(x_0) = 0$, 则对一切实数 x , 有 $f(x) = f(x-x_0+x_0) = f(x-x_0)f(x_0) = 0$ 这与 $f(x)$ 不恒为 0 矛盾, 故 $f(x) > 0$.

对题设 $f(x+y) = f(x)f(y)$ 两边取自然对数, 得 $\ln f(x+y) = \ln[f(x)f(y)]$.

$$\therefore \ln f(x+y) = \ln f(x) + \ln f(y).$$

令 $g(x) = \ln f(x)$, $\because f(x) > 0$, 且连续, $\therefore g(x)$ 连续, 且满足 $g(x+y) = g(x) + g(y)$.

由柯西定理知, $g(x) = g(1)^x$, 故 $\ln f(x) = x \ln f(1)$.

$$\therefore f(x) = e^{x \ln f(1)} = f(1)^x. \text{ 令 } f(1) = a, \text{ 则 } f(x) = a^x (a > 0).$$

类似地, 利用柯西函数方程的解, 在连续或单调的条件下可得

(1) 若 $f(xy) = f(x) + f(y) (x > 0, y > 0)$, 则 $f(x) = \log_a x$;

(2) 若 $f(xy) = f(x)f(y) (x > 0, y > 0)$, 则 $f(x) = x^2$;

(3) 若 $f(x+y) = f(x) + f(y) + kxy$, 则 $f(x) = ax^2 + bx$;

(4) 若 $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)$, 则 $f(x) = ax + b$.

2. 重要不等式及其应用

知识梳理

1. 均值不等式

设 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是 n 个正实数, 记 $H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$; $G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$;

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}; Q_n = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}.$$

它们分别称为正数的调和平均数、几何平均数、算术平均数和平方平均数.

这四个平均数具有如下关系: $H_n \leq G_n \leq A_n \leq Q_n$.

上式等号成立的充要条件是 $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

2. 柯西(Cauchy)不等式

设 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 和 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 是给定的实数, 则

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2).$$

上式等号成立的充要条件是存在 λ, μ (不全为零), 使 $\lambda a_i = \mu b_i, i = 1, 2, \dots, n$.

当 $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 1$ 时, 得 $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$.

$$\text{变形: (1) } \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{b_i^2}{a_i} \right) \geq \left(\sum_{i=1}^n b_i \right)^2;$$

$$(2) \sum_{i=1}^n \frac{b_i^2}{a_i} \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^n b_i \right)^2}{\sum_{i=1}^n a_i}, \text{ 特别地, } \frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \frac{x_3^2}{y_3} \geq \frac{(x_1 + x_2 + x_3)^2}{y_1 + y_2 + y_3}.$$

3. 排序不等式

给两组实数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 和 $b_1, b_2, \dots, b_n$, 如果 $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n, b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$, 则

$$(\text{反序和}) a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1 \leq (\text{乱序和}) a_1 b_{i_1} + a_2 b_{i_2} + \dots + a_n b_{i_n} \leq (\text{顺序和}) a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

其中 $i_1, i_2, \dots, i_n$ 是 $1, 2, \dots, n$ 的一个排列. 等号当且仅当 $a_1 = a_2 = \dots = a_n, b_1 = b_2 = \dots = b_n$ 时成立.

4. 凸函数与琴生不等式

一般地, 设 $f(x)$ 是定义在 (a, b) 内的函数, 如果对于 (a, b) 内任意两个数 x_1, x_2 , 都有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)], \text{ 则称函数 } f(x) \text{ 在 } (a, b) \text{ 内是凸函数.}$$

设 $f(x)$ 是定义在 (a, b) 内的凸函数, 如果对于 (a, b) 内任意 n 个数 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 都有 $f\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}\right) \geq \frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_n)]$, 当且仅当 $x_1=x_2=\dots=x_n$ 时取等号, 上述不等式称为琴生不等式.

典型例题

例 1 设实数 x, y, z 满足 $x+2y+3z=6$, 求 $x^2+y^2+z^2$ 的最小值.

解 由柯西不等式得

$$(1^2+2^2+3^2)(x^2+y^2+z^2) \geq (x+2y+3z)^2 = 36, \therefore x^2+y^2+z^2 \geq \frac{18}{7},$$

即 $x^2+y^2+z^2$ 的最小值为 $\frac{18}{7}$.

例 2 在三角形 ABC 中, 求 $\sin A + \sin B + \sin C$ 的最大值.

解 函数 $f(x) = \sin x$ 在区间 $(0, \pi)$ 上是凸函数, 则

$$\frac{1}{3}(\sin A + \sin B + \sin C) \leq \sin\left(\frac{A+B+C}{3}\right) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

所以 $\sin A + \sin B + \sin C$ 的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

例 3 设 $a, b, c \in \mathbf{R}$, 求证: $\frac{a+b+c}{3} - \sqrt[3]{abc} \geq \frac{2}{3}\left(\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}\right)$.

$$\begin{aligned} \text{证明} \quad \frac{a+b+c}{3} - \sqrt[3]{abc} - \frac{2}{3}\left(\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}\right) &= \frac{1}{3}(c+2\sqrt{ab}-3\sqrt[3]{abc}) \\ &= \frac{1}{3}(c+\sqrt{ab}+\sqrt{ab}-3\sqrt[3]{abc}) \geq \sqrt[3]{c \cdot \sqrt{ab} \cdot \sqrt{ab}} - \sqrt[3]{abc} = 0. \end{aligned}$$

例 4 设 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 为正数, 求证:

$$\frac{a_1^2}{a_2} + \frac{a_2^2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}^2}{a_n} + \frac{a_n^2}{a_1} \geq a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

证明 不妨设 $0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$, 则 $a_1^2 \leq a_2^2 \leq \dots \leq a_n^2$, $\frac{1}{a_1} \geq \frac{1}{a_2} \geq \dots \geq \frac{1}{a_n}$.

由排序不等式知, 乱序和不大于反序和, 所以

$$\frac{a_1^2}{a_2} + \frac{a_2^2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}^2}{a_n} + \frac{a_n^2}{a_1} \geq a_1^2 \cdot \frac{1}{a_1} + a_2^2 \cdot \frac{1}{a_2} + \dots + a_n^2 \cdot \frac{1}{a_n}, \text{ 即}$$

$$\frac{a_1^2}{a_2} + \frac{a_2^2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}^2}{a_n} + \frac{a_n^2}{a_1} \geq a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

注 本题用柯西不等式的变式可以一目了然:

$$\frac{a_1^2}{a_2} + \frac{a_2^2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}^2}{a_n} + \frac{a_n^2}{a_1} \geq \frac{(a_1+a_2+\dots+a_n)^2}{a_1+a_2+\dots+a_n} = a_1+a_2+\dots+a_n.$$

例 5 对任意的实数 $x > 0$ 和正整数 n , 证明: $1 + x^{n+1} \geq \frac{(2x)^n}{(1+x)^{n-1}}$.

证明 原不等式等价于 $(1+x^{n+1})(1+x)^{n-1} \geq (2x)^n$,

又由 $x > 0$, 则 $1+x^{n+1} \geq 2\sqrt{x^{n+1}}$, $(1+x)^{n-1} \geq (2\sqrt{x})^{n-1}$,

则 $(1+x^{n+1})(1+x)^{n-1} \geq 2\sqrt{x^{n+1}} \cdot (2\sqrt{x})^{n-1} = (2x)^n$.

例 6 已知正实数 a, b, c 满足 $a+b+c \leq 3$, 求证:

$$(1) \quad 3 > \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \geq \frac{3}{2};$$

$$(2) \quad \frac{a+1}{a(a+2)} + \frac{b+1}{b(b+2)} + \frac{c+1}{c(c+2)} \geq 2.$$

证明 (1) 由 a, b, c 为正数知, $\frac{1}{a+1} < 1$, $\frac{1}{b+1} < 1$, $\frac{1}{c+1} < 1$, 得

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} < 3.$$

由柯西不等式得

$$\left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \right) [(a+1) + (b+1) + (c+1)] \geq 9.$$

所以 $0 < a+b+c \leq 3$,

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \geq \frac{9}{(a+1) + (b+1) + (c+1)} \geq \frac{9}{3+3} = \frac{3}{2}.$$

(2) 由 (1) 及柯西不等式得

$$\begin{aligned} \frac{a+1}{a(a+2)} + \frac{b+1}{b(b+2)} + \frac{c+1}{c(c+2)} &\geq \frac{9}{\frac{a+1}{a+1} + \frac{b+1}{b+1} + \frac{c+1}{c+1}} \\ &= \frac{9}{(a+1) + (b+1) + (c+1) - \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \right)} \\ &= \frac{9}{6 - \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \right)} \geq \frac{9}{6 - \frac{3}{2}} = 2. \end{aligned}$$

例 7 已知 $a+b+c=1$, $a, b, c \in \mathbf{R}^+$, 求证: $\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \geq \frac{2}{1+a} + \frac{2}{1+b} + \frac{2}{1+c}$.

证法一 由 $\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} = \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}$,

$$\frac{2}{1+a} + \frac{2}{1+b} + \frac{2}{1+c} = \frac{2}{(a+b) + (a+c)} + \frac{2}{(a+b) + (b+c)} + \frac{2}{(c+a) + (c+b)},$$

那么由: $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} \geq \frac{4}{(a+b) + (b+c)}$,

$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{4}{(b+c)+(c+a)},$$

$$\frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{4}{(c+a)+(a+b)},$$

将上面的三个式相加可得: $\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \geq \frac{2}{1+a} + \frac{2}{1+b} + \frac{2}{1+c}$.

证法二 设 $f(a) = \frac{1}{1-a} - \frac{2}{1+a}$, $f(a) = \frac{1}{1-a} - \frac{2}{1+a} \geq \lambda a + \mu$, $a \in (0, 1)$

那么 $f(a) + f(b) + f(c) \geq \lambda(a+b+c) + 3\mu \geq 0$, 只要说明 $3\lambda + \mu = 0$.

$$\text{又 } f(a) = \frac{1}{1-a} - \frac{2}{1+a} = \frac{3a-1}{1-a^2} \geq -3\mu a + \mu,$$

那么 $(3a-1) \geq \mu(1-a^2)(-3a+1)$, 即 $(3a-1)[1+\mu(1-a^2)] \geq 0$, $a \in [0, 1]$

那么 $[1+\mu(1-a^2)]$ 必定有因子 $3a-1$, 则当 $a = \frac{1}{3}$ 时,

$$\text{则可求得: } \mu = -\frac{9}{8}, \lambda = \frac{27}{8}, \text{ 即 } (3a-1)[1+\mu(1-a^2)] = \frac{1}{8}(3a+1)(3a-1)^2 \geq 0,$$

$$\text{所以: } f(a) + f(b) + f(c) \geq \frac{27}{8}(a+b+c) + 3 \times (-\frac{9}{8}) = 0.$$

事实上, 要说明 $f(a) = \frac{1}{1-a} - \frac{2}{1+a} \geq \lambda a + \mu$, $a \in (0, 1)$, 也可以换一种办法来求解,

即曲线 $f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1+x}$ 在直线 $g(x) = \lambda x + \mu$ 上, 只要曲线 $f(x)$ 在直线 $g(x)$ 上, 即

$f(x)$ 在点 $\frac{1}{3}$ 处相切, 那么只要在 $\frac{1}{3}$ 处求 $f(x)$ 的切线就可以了, 就显得比较简单了.

例 8 设 a, b, c 为正实数, 且满足 $abc=1$, 试证明:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

证法一 由 $abc=1$, 得 $\frac{1}{a^3(b+c)} = \frac{b^2c^2}{ab+ac}$. 则原不等式等价于

$$\frac{b^2c^2}{ab+ac} + \frac{c^2a^2}{bc+ba} + \frac{a^2b^2}{ca+cb} \geq \frac{3}{2}.$$

运用柯西不等式, 有

$$\begin{aligned} (ab+bc+ca)^2 &= \left(\frac{ab}{\sqrt{ca+cb}} \cdot \sqrt{ca+cb} + \frac{bc}{\sqrt{ab+ac}} \cdot \sqrt{ab+ac} + \frac{ca}{\sqrt{ab+bc}} \cdot \sqrt{ab+bc} \right)^2 \\ &\leq \left(\frac{a^2b^2}{ca+cb} + \frac{b^2c^2}{ab+ac} + \frac{c^2a^2}{ab+cb} \right) (ca+cb+ab+ac+ab+bc). \end{aligned}$$

$$\text{于是, } \frac{b^2c^2}{ab+ac} + \frac{c^2a^2}{bc+ba} + \frac{a^2b^2}{ca+cb} \geq \frac{1}{2}(ab+bc+ca) \geq \frac{1}{2} \cdot 3 \sqrt[3]{abbc ca} = \frac{3}{2}.$$

证法二 由基本不等式得

$$\frac{b^2c^2}{ab+ac} + \frac{ab+ac}{4} \geq 2\sqrt{\frac{b^2c^2}{ab+ac} \cdot \frac{ab+ac}{4}} = bc,$$

$$\frac{c^2a^2}{ab+bc} + \frac{ab+bc}{4} \geq ac, \quad \frac{a^2b^2}{bc+ac} + \frac{bc+ac}{4} \geq ab,$$

相加得

$$\frac{c^2b^2}{ab+ac} + \frac{c^2a^2}{ab+bc} + \frac{a^2b^2}{bc+ac} \geq \frac{1}{2}(ab+ac+bc) \geq \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt[3]{abacbc} \geq \frac{3}{2}.$$

证法三 设

$$s = \frac{(abc)^2}{a^3(b+c)} + \frac{(abc)^2}{b^3(a+c)} + \frac{(abc)^2}{c^3(a+b)} = \frac{bc}{a(b+c)} \cdot bc + \frac{ac}{b(c+a)} \cdot ac + \frac{ab}{c(a+b)} \cdot ab,$$

设 $a \leq b \leq c$, 则 $ab \leq ac \leq bc, ab+ac \leq ab+bc \leq ac+bc$.于是 $\frac{bc}{a(b+c)} \geq \frac{ac}{b(a+c)} \geq \frac{ab}{c(a+b)}$, 由此推知 s 为顺序和, 由排序不等式得

$$s \geq \frac{bc}{a(b+c)} \cdot ac + \frac{ac}{b(a+c)} \cdot ab + \frac{ab}{c(a+b)} \cdot bc = \frac{c}{a(b+c)} + \frac{a}{b(a+c)} + \frac{b}{c(a+b)};$$

$$s = \frac{bc}{a(b+c)} \cdot ab + \frac{ac}{b(a+c)} \cdot bc + \frac{ab}{c(a+b)} \cdot ac = \frac{b}{a(b+c)} + \frac{c}{b(a+c)} + \frac{a}{c(a+b)}.$$

相加得

$$2s \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} = 3, \text{ 所以 } s \geq \frac{3}{2}.$$

3. 数列与极限

知识梳理

1. 等差等比数列的有关知识

	等差数列(AP)	等比数列(GP)
定义	$a_{n+1} - a_n = d$ 常数	$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \neq 0$ 常数
通项公式	$\begin{aligned} ① a_n &= a_1 + (n-1)d \\ ② a_n &= a_m + (n-m)d \\ ③ \text{叠加公式} \\ a_n &= (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) \\ &\quad + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1 \end{aligned}$	$\begin{aligned} ① a_n &= a_1 q^{n-1} \\ ② a_n &= a_m q^{n-m} \\ ③ \text{叠乘公式} \\ a_n &= \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1 \end{aligned}$