实变函数引论

程丛电　编著

科学出版社

实变函数引论

程丛电　编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书以 n 维欧氏空间及其上的实函数为对象，讲授勒贝格测度理论与勒贝格积分理论. 全书共 7 章. 第 1 章导言，简单介绍勒贝格测度与勒贝格积分的起源及其基本理念；第 2～6 章分别为集合、n 维欧氏空间、测度论、可测函数、积分论；第 7 章有界变差函数与绝对连续函数，除了介绍有界变差函数与绝对连续函数这两项内容之外，还简单地介绍了斯蒂尔切斯积分和勒贝格-斯蒂尔切斯测度与积分. 每一章的末尾均配有相当数量的例题选讲和习题.

本书可作为高等院校数学专业及其他相关专业“实变函数论”课程的教材或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

实变函数引论 / 程丛电编著. —北京：科学出版社，2012

ISBN 978-7-03-034356-7

Ⅰ.①实… Ⅱ.①程… Ⅲ.①实变函数-高等学校-教材
Ⅳ.①O174.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 098131 号

责任编辑：昌 盛 王胡权 房 阳 / 责任校对：张小霞
责任印制：阎 磊 / 封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京九天志诚印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2012 年 6 月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2012 年 6 月第一次印刷 印张：7 1/2
字数：170 000

定价：19.00 元

前　言

“实变函数论”是为了克服黎曼积分理论的缺陷，寻求一种更加完美的数学理论而建构的一种新的积分理论. 由于，一方面，它是由法国数学家勒贝格所首先创立的；另一方面，它以有限维欧氏空间及其上的实函数为对象，并以集合理论与测度理论为基础，人们也常称之为实分析中的勒贝格测度与积分理论. 由于这门课程的内容都比较抽象，所以对于大多数学生来说，学习这门课程有一定的困难，如果能够出版一本既可以全面、深入、系统地讲授“实变函数论”的内容，又适合于广大学生们接受的专业书，则其对于推动我国数学教育事业的发展将是很有意义的. 鉴于这一现实状况，作者本着深入浅出和便于学生接受的原则，撰写了本书. 书中改变了一些内容的传统讲授方式，为它们建构起了新的教学形态或教学模式，并对部分命题给出了新的更利于学生接受的证明. 为了使学生多练习、多自学以及培养学生查阅参考文献的能力，并且为了节省篇幅，对于个别结论(定理、推论、命题)，书中没有给出它们的证明，只提供了适当的建议或文献，请读者自证或通过查找文献进行自学. 此外，书中还建构了一些新的、便于学生提高基本数学能力，特别是分析数学能力的内容，并在每章的末尾都配备了相当数量的例题选讲与习题.

本书可以作为高等院校“实变函数论”课程的教材或教学参考书. 书中标有“*”的内容，使用时可根据教学的具体情况进行取舍.

本书是在参考兄弟院校相关教材的基础上编写而成的，前辈们的工作对其形成有着深刻的影响与启发，在此不一一例述. 另外，在本书的撰写过程中，沈阳师范大学的有关同志给予了热情的鼓励和帮助. 关洪岩同志帮助选配了部分例题与习题，他的辛勤付出为本书增添了不少色彩. 最后，本书能够尽快地出版并与读者见面，与科学出版社同志们的努力是分不开的，特别是王胡权编辑对书稿进行了认真审阅并提出许多宝贵建议. 在此，谨向他们表示衷心的感谢.

由于作者水平有限，经验不足，书中难免存在不足和疏漏之处，恳请各位同行及读者批评指正.

程丛电

2012 年 1 月

目　　录

第 1 章　导　　言

实变函数论这个数学分支形成于 19 世纪末 20 世纪初，主要是由法国数学家勒贝格(Lebesgue，1875－1941)所创立的，其中心内容是勒贝格测度与勒贝格积分，它是黎曼(Riemann，1826－1866)积分的推广与发展，是在深入地研究实函数的黎曼积分性质与微分性质的基础上，为了克服牛顿(Newton，1642－1727)和莱布尼茨(Leibniz，1646－1716)所建立的微积分学中存在的不足，寻求一种更加完美的数学理论而发展起来的. 由于它奠定了近代分析学的基础，所以近百年来，它一直被誉为“跨入近代数学的门槛”. 学习这门课程不仅可以加深对于数学分析中各项内容的认识，还可以为进一步学习现代数学打下良好的基础.

下面通过大略地回顾相关的历史背景与黎曼积分，对勒贝格积分的形成及其理念作一简单的介绍，使大家对这门课程先有个初步的了解.

1.1　黎曼积分与勒贝格积分

1.1.1　历史背景

自从牛顿与莱布尼茨创立微积分开始，微积分因其重要性，引起了许多数学家的兴趣与进一步研究. 数学分析中的许多重要内容，如黎曼积分、达布(Darboux)上和与达布下和等，都是在这一过程中形成的. 由于黎曼积分的不足，这种研究很快被一系列分析问题阻挡住了. 下述三个问题可以比较全面地表明出这一系列问题的本质内容.

1. *微分运算与积分运算的关系问题*

具体地说是下面的问题：

(1) 设 $F(x)$ 与 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 区间上的两个实函数，若 $F'(x)=f(x)$，是否 $\forall x\in[a,b]$ 都有

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+F(a)?$$

(2) 设 $F(x)$ 与 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 区间上的两个实函数，若 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+F(a)$ $(\forall x\in[a,b])$，是否有 $F'(x)=f(x)$?

(3) $F'(x)=f(x)$是否为 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+c$ 的充要条件?

根据数学分析的知识,当 $f(x)$连续时,这一结论是正确的."$f(x)$连续"这一条件还能够进一步扩展吗?

2. 积分与极限的换序问题,即 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b \lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)\mathrm{d}x$ 的条件问题

通过学习数学分析知道,当 $f_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于 $f(x)$,并且对于每一个自然数 n,$f_n(x)$在$[a,b]$上都连续时,这一等式是成立的. 但是,在许多不满足上述条件的情况下,该等式也成立. 这就引出了问题,它究竟在什么条件下成立? 在什么条件下不成立? 在生产实际中所遇到的许多函数都不是初等函数,当处理与非初等函数相关的一些问题时,通常的做法是用适当的初等函数去近似地代替这个非初等函数,这就像用有理数 3.14 去近似地代替无理数 π 一样. 设 $f(x)$是一个非初等函数,$\{f_n(x)\}$是一个初等函数列,若$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$且上述等式成立,当要求 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 时,就可以用适当的 $f_n(x)$去代替 $f(x)$,然后通过求 $\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$ 而近似地求得 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. 由此,可以看出积分与极限换序问题的重要意义.

注 这种用适当的初等函数去代替一个非初等函数的做法,从本质上讲属于"逼近方法",它是数学的一种基本方法,也是实变函数论的一种基本方法.

3. 关于 $G([0,1],D)$的求积问题

这里

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\ 0, & x\in\mathbf{R}-\mathbf{Q},\end{cases}$$

而 $G([0,1],D)$表示函数 $D(x)$关于$[0,1]$区间的下方图形(见定义 5.1.1)或曲边梯形,$\mathbf{Q}$ 和 $\mathbf{R}$ 分别为有理数集和实数集. 受用 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 求一个非负连续函数的面积的启发,自然会想到,通过求 $\int_a^b D(x)\mathrm{d}x$ 来求 $mG([0,1],D)$,其中 $mG([0,1],D)$ 表示 $G([0,1],D)$的"面积". 但是,由于 $D(x)$在$[0,1]$上不可积,所以这条路是走不通的. 这就是本问题的瓶颈所在.

这些障碍迫使数学家们不得不进行新的开拓. 勒贝格积分就是在这样的开拓中建构起来的.

1.1.2 反思黎曼积分

由于上述三个代表问题都与积分有关,所以为了寻找新的思路,先对黎曼积分

进行一番深入的思考是极其有益的.

设 $f(x)$是$[0,1]$上的黎曼可积函数,令

$$f^+(x)=\begin{cases}f(x), & f(x)\geqslant 0,\\ 0, & f(x)<0,\end{cases}\quad f^-(x)=\begin{cases}-f(x), & f(x)\leqslant 0,\\ 0, & f(x)>0,\end{cases}$$

则

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b f^+\,\mathrm{d}x-\int_a^b f^-\,\mathrm{d}x\\ &= m_J G([a,b],f^+)-m_J G([a,b],f^-),\end{aligned}\tag{1.1}$$

其中 $m_J E$ 表示 E 的若尔当(Jordan,1838—1922)测度. 由此可见,函数 $f(x)$的可积性及其积分的值是由 $G([a,b],f^+)$和 $G([a,b],f^-)$的若尔当测度所决定的. 也就是说,从一定意义上讲,可积性是由测度决定的,有什么样的测度就有什么样的积分,这样就找到了积分的"根源"——测度(或度量).

注 由于 $f^+(x)$与 $f^-(x)$都是非负函数,$\int_a^x f^+(t)\mathrm{d}t$ 与 $\int_a^x f^-(t)\mathrm{d}t$ 都是单调增的,从而通过式(1.1)可将 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 表示为两个增函数的差. 由于这种表示会带来很多方便,所以后面常用这种表示来研究积分. 将一个复杂的对象用一些较简单的对象的某种运算表示出来或分解为一些较简单的对象的某种运算的形式是数学的一种基本方法,称之为"表示方法"或"分解方法",分解质因数与分解因式就属于这种方法.

思考问题 (1) 试考虑$(\mathbf{Q}\cap[0,1])$的若尔当测度;

(2) 设 $A=\{(x,y)\mid x,y\in(\mathbf{Q}\cap[0,1])\}$,$B=[0,1]\times[0,1]-A$,试考虑 A 与 B 的若尔当测度.

注 显然,$[0,1]$中有限个点所形成的集合的若尔当测度是 0,$[0,1]$的若尔当测度是 1,而$(\mathbf{Q}\cap[0,1])$的若尔当测度应为多少却不是一个显然的问题. 有趣的是,$[0,1]$与$(\mathbf{Q}\cap[0,1])$都是无限集,这意味着无限集与无限集也是有区别的. $[0,1]$与$(\mathbf{Q}\cap[0,1])$的元素一样多吗? 该问题是"计数"的深入发展,它是实变函数论的一个基本问题,第 2 章主要讨论这个问题.

1.1.3 勒贝格测度与勒贝格积分的建立

由上可知,黎曼积分是在若尔当测度的基础上建立起来的,黎曼积分的不足归根结底在于若尔当测度的不足,那么可否建立一种新的测度,使其克服若尔当测度的弱点,从而在其上建立一种新的积分,使其优越于黎曼积分,为解决上述的三个代表问题找到突破口呢? 勒贝格完成了这项任务. 1902 年,他在论文"积分、长度与面积"中所阐明的思想成为古典分析过渡到现代分析的转折点. 勒贝格积分理论不仅蕴涵了黎曼积分所达到的成果,而且还在较大程度上克服了后者的局限性. 在

勒贝格以后，还有许多数学家，如里斯(Riesz，1880－1956)，当茹瓦(Denjoy，1884－不详)，拉东(Radon，1887－1956)都对积分理论的进一步发展作出了重要贡献[1]. 这些早期工作由后来的数学家们不断地改进，现在所要学习的就是这种经过了改进的勒贝格积分理论，其大致过程如下：

(1) 建立一种新的测度——勒贝格测度.

(2) 设 $f(x)$是$[a,b]$上的函数. 当 $mG([a,b],f^+)$和 $mG([a,b],f^-)$都存在时，通过将式(1.1)中的 $m_JG([a,b],f^+)$和 $m_JG([a,b],f^-)$分别地转换为 $mG([a,b],f^+)$和 $mG([a,b],f^-)$来定义一种新的积分——勒贝格积分，即

$$(\mathrm{L})\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = mG([a,b],f^+) - mG([a,b],f^-).$$

1.1.4 勒贝格积分的意义

勒贝格积分是在勒贝格测度理论的基础上建构起来的，与黎曼积分相比较，它有着许多的优势. 例如，它不仅可以统一处理有界函数与无界函数的情形，不用像黎曼积分那样，通过建立广义积分来处理无界函数的积分问题，而且还可以允许被积函数定义在更一般的点集上，这样它就大大扩充了可积函数的范围，特别是它提出了比黎曼积分更加广泛而有用的收敛定理，成功地解决了上述的三个代表问题，扫除了阻挡分析学进步的障碍. 勒贝格积分不仅克服了黎曼积分的弱点，摆脱了黎曼积分的困境，而且还提供了一些宝贵的数学思想和方法，为许多数学分支的发展奠定了基础. 今天它已成为了分析数学、随机数学中不可缺少的工具.

注 计数、测度(度量)与积分(求和)都是最古老、最基本的数学问题，分解、逼近与积分都是最基本的数学方法，从一定意义上来讲，“实变函数论”加深了对于最基本的数学问题与数学方法的理解，并说明如何用它们解决某些困难的数学问题，从而极大地促进了许多新的数学研究方向的发展.

1.2 例题选讲

例 1.2.1 举例说明存在非单调且具有无限多个间断点的黎曼可积函数，并证明其可积性.

解 考虑黎曼函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q},p\text{ 与 }q\text{ 互素},q>p,\\ 0, & x=0,1\text{ 以及}(0,1)\text{内的无理数}.\end{cases}$$

显然，$f(x)$非单调且在(0,1)内的有理点处间断，但是它却在[0,1]上是黎曼可积的，并且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$. 证明如下：

$\forall \varepsilon>0$,在$[0,1]$内使得$\frac{1}{q}>\frac{\varepsilon}{2}$的有理点$\frac{p}{q}$只有有限个,设它们为$r_1,r_2,\cdots,r_k$,对$[0,1]$作分割$T=\{\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_n\}$,使得$\|T\|<\frac{\varepsilon}{2k}$,并把$T$中所有小区间分为$\{\Delta_i' \mid i=1,2,\cdots,m\}$和$\{\Delta_i'' \mid i=1,2,\cdots,n-m\}$两类,其中$\{\Delta_i'\}$为含有$\{r_i \mid i=1,2,\cdots,k\}$中点的所有小区间,这类小区间的个数$m\leqslant 2k$(当所有$r_i$恰好是$T$的分点时才有$m=2k$),$\{\Delta_i''\}$为$T$中其余不含$\{r_i\}$中点的小区间. 由于$f$在$\Delta_i'$上的振幅$\omega_i'\leqslant\frac{1}{2}$,于是有

$$\sum_{i=1}^{m}\omega_i'\Delta_i'\leqslant\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\Delta x_i'\leqslant\frac{1}{2}\cdot 2k\|T\|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

又f在Δ_i''上的振幅$\omega_i''\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$,所以$\sum\limits_{i=1}^{n-m}\omega''\Delta x_i''\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\sum\limits_{i=1}^{n-m}\Delta x_i''\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$. 把这两部分合起来便得到$\sum\limits_{i=1}^{m}\omega_i\Delta x_i=\sum\limits_{i=1}^{m}\omega_i'\Delta x'+\sum\limits_{i=1}^{n-m}\omega_i''\Delta x_i''<\varepsilon$,即$f(x)$在$[0,1]$上黎曼可积. 因为对于任意的分割$T$,当所取中间点$\xi_i$全为无理点时,$f(\xi_i)=0$,$\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=0$,所以$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$. 解毕.

例 1.2.2 举例说明

(1) 存在没有原函数但黎曼可积的函数;

(2) 存在有原函数但不黎曼可积的函数.

解 (1) 令

$$f(x)=\begin{cases}0, & -1\leqslant x<0,\\ 1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$$

显然,$f(x)$在$[-1,1]$上黎曼可积(因其为单调函数),但无原函数. 事实上,若$f(x)$在$[-1,1]$上有原函数$F(x)$,即$F'(x)=f(x)\ (-1\leqslant x\leqslant 1)$,则依据达布定理,$F'(x)$应取得$F'(-1)=0$与$F'(1)=1$之间的每一个值,即$f(x)$应取得$f(-1)=0$与$f(1)=1$之间的每一个值,这与$f(x)$的定义矛盾,故$f(x)$在$[-1,1]$上没有原函数.

(2) 令

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

则f在$[-1,1]$区间的每一点x处都有有限导数,

$$g(x)=f'(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^2}\cos\frac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

因此，函数 $f(x)$ 有原函数 $g(x)$. 但是，由于其在 $[-1,1]$ 上无界，故在 $[-1,1]$ 上不黎曼可积(黎曼可积的必要条件是函数有界). 解毕.

例 1.2.3 举例说明函数列一致收敛是积分与极限可换序的非必要条件.

解 令 $f_n(x)=x^n(0\leqslant x\leqslant 1)$，它是逐点收敛而非一致收敛于

$$f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x=1\end{cases}$$

的函数列，但仍有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = 0 = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x\,.$$

解毕.

习 题 一

1. 按定积分定义证明：

(1) $\int_a^b k\,\mathrm{d}x = k(b-a)$； (2) $\int_a^b \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^b-\mathrm{e}^a$.

2. 证明：若 T' 是 T 增加若干个分点后所得的分割，则 $\sum\limits_{T'}\omega_i'\Delta x_i'\leqslant \sum\limits_{T}\omega_i\Delta x_i$.

3. 设 f,g 均为定义在 $[a,b]$ 上的有界函数，证明：若仅在 $[a,b]$ 上的有限个点 x 处 $f(x)\neq g(x)$，则当 f 在 $[a,b]$ 上可积时，g 也在 $[a,b]$ 上可积，并且 $\int_a^b f\mathrm{d}x = \int_a^b g\mathrm{d}x$.

4. 设 f 在 $[a,b]$ 上有界，$\{a_n\}\subset[a,b]$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=c(c\in[a,b])$，证明：若 f 在 $[a,b]$ 上只有 $a_n(n=1,2,\cdots)$ 为其间断点，则 f 在 $[a,b]$ 上可积.

5. 证明：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = J$ 存在的充要条件是对任意一列积分和 $\sum f(T_n)$ $(n=1,2,\cdots)$，只要 $\lim\limits_{n\to\infty}\|T_n\|=0$，就有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum f(T_n)=J$ (其中 $\sum f(T_n)$ 为 f 对某一分割 T_n 及所属的某一组介点集所作的积分和).

第 2 章　集　　合

集合论研究集合的各种性质，自 19 世纪 80 年代由德国数学家康托尔(Cantor，1845－1918)创立以来，已发展成为一个独立的数学分支，其基本概念与方法已渗入到了 20 世纪的各个数学领域. 一方面，集合论的初期工作与数学分析的研究密切相关；另一方面，实变函数论是在集合论的观点与方法渗入数学分析的基础上产生的，由此可以看出，实变函数论与集合论有着密切的关系. 用集合论的方法研究问题是实变函数论最基本和最具有突出特色的方法. 因此，本书从集合论讲起. 无穷集之间元素的"多少"及"相等"关系是本章的主要内容.

2.1　基础知识

由于早在中学时就已经接触过集合的概念以及集合的并、交、补的运算，无限集合的运算等内容以前是没有接触过的，所以在此并不详细地讲述集合的基本概念，而主要讲述与无穷多个集合的运算有关的一些内容.

已知对于两个集合 A 与 B 有所谓的包含关系，并且包含关系具有下面的性质：

(1) $A\subset A$；

(2) $A\subset B$，$B\subset A$，则 $A=B$；

(3) $A\subset B$，$B\subset C$，则 $A\subset C$.

注　$\subset$和$\in$是不同的. $\subset$表示集合与集合之间的关系，$\in$表示集合和它的元素之间的关系. 当 $a\in A$ 时，不能写成 $a\subset A$，但可以写成$\{a\}\subset A$，其中$\{a\}$表示只含有一个元素 a 的集合.

从一些给定的集合出发，可以通过"集合的运算"作出一些新的集合，其中最常用的有"并"、"交"、"减"三种运算.

(1) 给定两个集合 A 和 B(见图 2.1.1(a))，称

$$C=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$

为 A 与 B 的并集(或和集)，简称并或和，记为 $C=A\cup B$(见图 2.1.1(b)中阴影部分). 这一运算可以推广到任意多个集合的情形. 设$\{A_\alpha\mid\alpha\in\Lambda\}$是一族集合，其中 Λ 称为指标集，α 在 Λ 中变化，则称集合$\{x\mid$存在某个 $\alpha\in\Lambda$，使得 $x\in A_\alpha\}$为这族集合的并集，记为$\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$.

(2) 给定两个集合 A 和 B，称 $C=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$为 A 与 B 的交集(或积集)，

简称交或积，记为 $C=A\cap B$，见图 2.1.2(a)中阴影部分. 这一运算也可以推广到任意多个集合的情形. 设 $\{A_\alpha \mid \alpha\in\Lambda\}$ 是一族集合，则称 $\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha=\{x \mid \forall\alpha\in\Lambda, x\in A_\alpha\}$ 为这族集合的交，记为 $\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$.

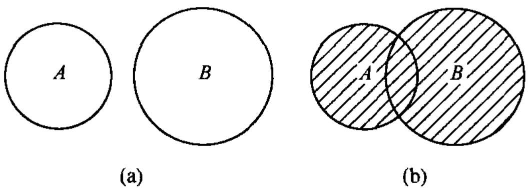

图 2.1.1

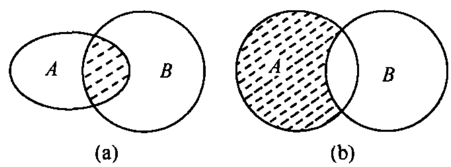

图 2.1.2

下面通过几个实例来帮助大家进一步理解指标集的含义.

例 2.1.1　$A_1=\{a,b,c\}, A_2=\{a,b,d\}, A_3=\{a,b,e\}, \Lambda=\{1,2,3\}$，则

$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha=A_1\cup A_2\cup A_3=\{a,b,d,c,e\}.$$

例 2.1.2　设 $A_1=[0,1], A_2=[0,2], \cdots, A_n=[0,n], \cdots, \Lambda=\mathbf{N}^+$，则

$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=[0,+\infty).$$

例 2.1.3　设 $A_\alpha=[0,\alpha)$，其中 $\alpha>0, \Lambda=\mathbf{R}^+$，则

$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha=[0,+\infty).$$

关于集合的并与交有下面的结论.

定理 2.1.1　(1) (交换律)$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$；

(2) (结合律)$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C, A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$；

(3) (分配律)$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C), A\cap(\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}B_\alpha)=\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}(A\cap B_\alpha)$；

(4) $A\cap A=A, A\cup A=A$.

证　只证 $A\cap(\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}B_\alpha)=\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}(A\cap B_\alpha)$，其余留给读者作为练习自证.

设 $x\in A\cap(\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}B_\alpha)$，则 $x\in A$ 且有 $\alpha_0\in\Lambda$，使得 $x\in B_{\alpha_0}$. 于是

$$x\in A\cap B_{\alpha_0}\subset\bigcup_{\alpha\in\Lambda}(A\cap B_\alpha),$$

从而 $A\cap(\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}B_\alpha)\subset\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}(A\cap B_\alpha)$.

又设 $x\in\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}(A\cap B_\alpha)$，则有 $\alpha_0\in\Lambda$，使得 $x\in A\cap B_{\alpha_0}$，即 $x\in A, x\in B_{\alpha_0}$，从而 $x\in\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}B_\alpha$. 因此，$x\in A\cap(\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}B_\alpha)$，于是 $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}(A\cap B_\alpha)\subset A\cap(\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}B_\alpha)$.

综上，等式成立. 证毕.

注　(1) $A\cup(B\cap C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ 不一定成立. 例如，$\{1\}\cup(\{2\}\cap\{3\})\neq(\{1\}\cap\{2\})\cup(\{1\}\cap\{3\})$.

(2) 把上述证明方法称为“相等方法”，通常证明两个集合相等总是用这种方法，它是集合论中最基本的方法，也是实变函数论的基本方法，以后将经常运用这

一方法来证明问题. 运用这样最基本的数学方法来认识问题和解决问题是实变函数论的一个显著特点,正是由于这样的特点,本课程才能够做到既可以为学习现代数学打下良好的基础,又可以提高数学能力.

(3) 关于集合运算,当无必要表明指标集 Λ 时可将其省略,如可分别将 $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$ 与 $\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$ 简写成 $\bigcup\limits_{\alpha}A_\alpha$ 与 $\bigcap\limits_{\alpha}A_\alpha$.

定理 2.1.2 (1) $A\cap B\subset A\subset A\cup B$;

(2) 若 $A_\alpha\subset B_\alpha(\alpha\in\Lambda)$,则 $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha\subset\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}B_\alpha$, $\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}B_\alpha\subset\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}B_\alpha$.

定理 2.1.2 的证明可由定义直接推出,故此从略.

(3) 给定两个集合 A 和 B,称 $\{x\,|\,x\in A$, 但 $x\notin B\}$ 为 A 减 B 所得的差集,记为 $C=A-B$ 或 $C=A\backslash B$,见图 2.1.2(b)中阴影部分. 注意:这里并不要求 $A\supset B$,并且一般来说,$(A\backslash B)\cup B$ 不等于 A. 设 $S\supset A$,则 $(S-A)$(或 $S\backslash A$)称为 A 关于 S 的余集或补集(complementary set),记为 $\complement_S A$(当没有必要指出 S 时,可以简单地记为 $\complement A$,见图 2.1.3).

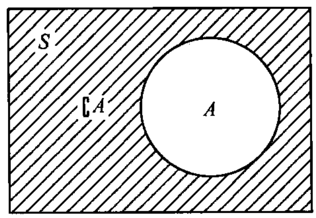

图 2.1.3

关于集合的并、交与减三种运算有下面的结论.

定理 2.1.3 (1) $\complement_S S=\varnothing$, $\complement_S\varnothing=S$;

(2) $A\cup\complement_S A=S$, $A\cap\complement_S A=\varnothing$;

(3) $\complement_S(\complement_S A)=A$;

(4) $A\backslash B=A\cap\complement_S B$;

(5) 若 $A\subset B$,则 $\complement_S A\supset\complement_S B$;

(6) $\complement_S(A\cap B)=\complement_S A\cap\complement_S B$, $\complement_S(A\cap B)=\complement_S A\cup\complement_S B$.

(6) 中的两个关系式可以分别推广为

$$\complement_S\Big(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha\Big)=\bigcap_{\alpha\in\Lambda}\complement_S A_\alpha, \tag{2.1}$$

$$\complement_S\Big(\bigcap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha\Big)=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\complement_S A_\alpha. \tag{2.2}$$

(6) 中两式及其推广称为德摩根(De Morgan)公式. 这是一个很有用的公式,它使得能通过余集运算把并集变为交集,把交集变为并集. 本课程以后将经常运用这一公式来处理问题,学习实变函数论一定要掌握好这一公式和学会使用这一公式. 关于这个定理,只证明德摩根公式,其余请读者自证.

德摩根公式的证明　先证 $\complement_S\Big(\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha\Big)=\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}\complement_S A_\alpha$. 设 $x\in\complement_S\Big(\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha\Big)$,则 $x\in S$ 且 $x\notin\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$,于是可知,必存在某一 $\alpha_0\in\Lambda$,使得 $x\notin A_{\alpha_0}$,故 $x\in\complement_S A_{\alpha_0}$,从而 $x\in\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}\complement_S A_\alpha$,这便证明了

$$\complement_S\Big(\bigcap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha\Big)\subset\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\complement_S A_\alpha.$$

反过来,设 $x\in\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}\complement_S A_\alpha$,则存在某一 $\alpha_0\in\Lambda$,使得 $x\in\complement_S A_{\alpha_0}$,即 $x\in S$, $x\notin A_{\alpha_0}$.

当然，$x\notin\bigcap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$，这意味着 $x\in\complement_S(\bigcap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha)$，故

$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\complement_S A_\alpha\subset\complement_S(\bigcap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha).$$

由以上两个方面的结果便知，等式成立.

现在进一步证明

$$\complement_S(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha)\subset(\bigcap_{\alpha\in\Lambda}\complement_S A_\alpha).$$

设 $x\in\complement_S(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha)$，则 $x\notin(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha)$，即 $\forall\alpha\in\Lambda$ 都有 $x\notin A_\alpha$，从而 $\forall\alpha\in\Lambda,x\in\complement_S A_\alpha$. 因此，$x\in\complement_S(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha)$，也就是说，

$$\complement_S(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha)\subset(\bigcap_{\alpha\in\Lambda}\complement_S A_\alpha).$$

反之，设 $x\in(\bigcap_{\alpha\in\Lambda}\complement_S A_\alpha)$，则 $\forall\alpha\in\Lambda,x\in\complement_S A_\alpha$，即 $\forall\alpha\in\Lambda,x\notin A_\alpha$，从而 $x\notin(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha)$，因此，$x\in\complement_S(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha)$. 也就是说，$(\bigcap_{\alpha\in\Lambda}\complement_S A_\alpha)\subset\complement_S(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha)$.

综上，等式成立. 证毕.

注 也可以根据 $\complement_S(\bigcap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\complement_S A_\alpha$，按照下面的方法来证明$(\bigcap_{\alpha\in\Lambda}\complement_S A_\alpha)=\complement_S(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha)$.

$\forall\alpha\in\Lambda$，令 $B_\alpha=\complement_S A_\alpha$，则 $A_\alpha=\complement_S B_\alpha$，并且

$$\complement_S(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\complement_S B_\alpha)=(\bigcap_{\alpha\in\Lambda}B_\alpha),$$

即$\bigcap_{\alpha\in\Lambda}\complement_S A_\alpha=\complement_S(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha)$.

*(4) 给定集列 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$，称

$$\begin{aligned}&\{x\mid\text{存在无穷多个 }A_n\text{，使得 }x\in A_n\}\\=&\{x\mid\text{对任意 }N>0\text{，存在一个 }n>N\text{，使得 }x\in A_n\}\end{aligned}$$

(即属于该集列中无限多个集的元素的全体所组成的集)为其上限集或上极限，记为$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$ 或$\limsup\limits_{n\to\infty}A_n$. 称

$$\begin{aligned}&\{x\mid\text{当 }n\text{ 充分大以后都有 }x\in A_n\}\\=&\{x\mid\text{存在 }N>0\text{，使当 }n>N\text{ 时，}x\in A_n\}\end{aligned}$$

(即仅不属于该集列中有限多个集的元素的全体所组成的集)为其下限集或下极限，记为$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$ 或$\liminf\limits_{n\to\infty}A_n$.

当$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$ 时，称集列$\{A_n\}$收敛，并称$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n\left(\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n\right)$为$\{A_n\}$的极限，记为$\lim\limits_{n\to\infty}A_n$.

显然，$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n\subset\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$. 此外，还不难证明

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}A_m, \tag{2.3}$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}A_m. \tag{2.4}$$

例如，式(2.3)可证明如下：

记 $A=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$，$B=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{m=n}^{\infty}A_m$. 设 $x\in A$，则 $\forall n\in\mathbf{N}^+$，总有 $m>n$，使得 $x\in A_m$，即对任意的 n，总有 $x\in\bigcup\limits_{m=n}^{\infty}A_m$，故 $x\in B$. 反之，设 $x\in B$，则对 $\forall n\in\mathbf{N}^+$，总有 $x\in\bigcup\limits_{m=n}^{\infty}A_m$，即总存在 $m>n$，使得 $x\in A_m$，即 $x\in A$. 因此，$A=B$，即 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{m=n}^{\infty}A_m$.

单调集列　如果集列 $\{A_n\}$ 满足 $A_n\subset A_{n+1}$ ($A_n\supset A_{n+1}$) ($n\in\mathbf{N}^+$)，则称之为递增(递减)集列. 这两种集列统称为单调集列. 对递增(递减)集列，以后用 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n$ 来表示 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ $\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)$.

例 2.1.4　$A_i=\{i\}$ $(i=1,2,\cdots)$，则

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\{1,2,\cdots,n\},\quad \bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}.$$

例 2.1.5　设 $A_\alpha=\{x\mid \alpha-1<x\leqslant\alpha\}$，$\mathbf{R}$ 为全体实数，$\alpha\in\mathbf{R}$，则

$$\bigcup_{\alpha\in\mathbf{R}}A_\alpha=(-\infty,+\infty).$$

例 2.1.6　设 $A_i=\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{i+1}\leqslant x\leqslant\frac{1}{i}\right\}$ $(i=1,2,\cdots)$，则

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=(0,1).$$

例 2.1.7　设 $A_i=\left\{x\,\middle|\,-i\leqslant x<1+\frac{1}{i}\right\}$ $(i=1,2,\cdots)$，则

$$\bigcap_{i=1}^{n}A_i=\left\{x\,\middle|\,-1\leqslant x<1+\frac{1}{n}\right\},\quad \bigcap_{i=1}^{\infty}A_i=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}.$$

例 2.1.8　设 $A_n=[n,+\infty)$ $(n=1,2,\cdots)$，则

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\varnothing.$$

例 2.1.9　设 $A_n=[0,n)$ $(n=1,2,\cdots)$，则

$$\lim_{n\to\infty}A_n=[0,+\infty).$$

2.2　对等与基数

本节的主要任务是将有限集合中元素“个数”的概念及其相等与大小关系推广到一般集合. 称 $\{1,2,\cdots,n\}$ 为正整数列的一个截段. 显然，两个非空有限集合元素个数相同的充分必要条件是它们能够和正整数列的同一截段一一对应，也等价于这两个集合一一对应. 这种一一对应的思想可帮助把元素个数的概念推广到无限集.

定义 2.2.1　设 A 和 B 是两个非空集合，若存在 A 到 B 上的一个一一映射