GaiLvLun Yu ShuLiTongJi XiTi JieXi

陆传赉 王玉孝 姜炳麟◎编著

概率论与数理统计习题解析

(第2版)

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

概率论与数理统计习题解析

（第2版）

陆传赉　王玉孝　姜炳麟　编著

北京邮电大学出版社
www. buptpress. com

再版前言

本书是在2003年北京邮电大学出版社出版的第1版的基础上加以修订后再版的，它可作为高等学校理工类、经济管理类及部分文科的本科生及硕士与博士生的教学辅导或参考资料，也可作为考研与考博学子的考前辅导书，更可作为相关的工程技术人员与公务员的参考资料。

本书自2003年9月出版以来，深受广大读者的欢迎与厚爱，早已脱销待再版。作者根据读者的希望和建议，在再版中除改进了第1版中某些笔误和不当之处外，在第1版的第一篇概率论各章内均增加了一定数量的计算例题或证明例题，其中有些题目还是近些年来有关专业的热门试题，而有些则是近二十年来考研中的试题。增加的内容将拓宽广大读者的解题思路和方法，相信它对广大读者更好地理解概率论与数理统计各部分的内容必定大有益处。

再版时给出了与本书密切相关的参考书目，以方便广大读者寻根究源。

作　者

目　　录

第一篇　概率论

第 1 章　概率论的基本概念 …… 3

1.1　内容提要 …… 3

1.1.1　随机事件及其运算 …… 3

1.1.2　事件的概率及其性质 …… 6

1.1.3　条件概率及条件概率空间 …… 8

1.1.4　事件的独立性 …… 9

1.2　典型例题分析 …… 10

1.2.1　概念题 …… 10

1.2.2　计算题 …… 18

1.2.3　证明题 …… 38

1.2.4　历届相关考研题解 …… 51

1.3　练习题 …… 56

1.4　练习题答案或提示 …… 61

第 2 章　随机变量及其分布 …… 63

2.1　内容提要 …… 63

2.1.1　随机变量及其分布函数 …… 63

2.1.2　离散型随机变量 …… 64

2.1.3　连续型随机变量 …… 66

2.1.4　随机变量函数的分布 …… 69

2.2　典型例题分析 …… 71

2.2.1　概念题 …… 71

2.2.2　计算题 …… 74

2.2.3 证明题 …… 93
2.2.4 历届相关考研题解 …… 99
2.3 练习题 …… 102
2.4 练习题答案或提示 …… 106

第 3 章 多维随机变量及其分布 …… 110

3.1 内容提要 …… 110
3.1.1 多维随机变量及其分布函数 …… 110
3.1.2 多维离散型随机变量 …… 112
3.1.3 多维连续型随机变量 …… 113
3.1.4 边缘分布 …… 114
3.1.5 条件分布 …… 116
3.1.6 随机变量的相互独立性 …… 117
3.1.7 多维随机变量函数的分布 …… 119
3.2 典型例题分析 …… 123
3.2.1 概念题 …… 123
3.2.2 计算题 …… 124
3.2.3 证明题 …… 151
3.2.4 历届相关考研题解 …… 160
3.3 练习题 …… 165
3.4 练习题答案或提示 …… 170

第 4 章 随机变量的数字特征 …… 175

4.1 内容提要 …… 175
4.1.1 数学期望 …… 175
4.1.2 方差 …… 177
4.1.3 常用分布的数学期望和方差 …… 178
4.1.4 协方差 …… 178
4.1.5 相关系数 …… 179
4.1.6 随机变量的矩 …… 180
4.1.7 多维随机变量的数字特征 …… 181
4.1.8 多维正态分布 …… 182
4.2 典型例题分析 …… 182
4.2.1 概念题 …… 182

4.2.2　计算题 …… 185
4.2.3　证明题 …… 202
4.2.4　历届相关考研题解 …… 209
4.3　练习题 …… 221
4.4　练习题答案或提示 …… 225

第 5 章　随机变量的特征函数与母函数 …… 228

5.1　内容提要 …… 228
5.1.1　特征函数及其性质 …… 228
5.1.2　多元特征函数及其性质 …… 230
5.1.3　母函数及其性质 …… 232
5.2　典型例题分析 …… 233
5.2.1　计算题 …… 233
5.2.2　证明题 …… 242
5.3　练习题 …… 253
5.4　练习题答案或提示 …… 256

第 6 章　极限定理 …… 260

6.1　内容提要 …… 260
6.1.1　随机变量序列的收敛性 …… 260
6.1.2　大数定律 …… 262
6.1.3　强大数定律 …… 263
6.1.4　中心极限定理(CLT) …… 264
6.1.5　重对数律 …… 265
6.1.6　独立随机变量和的收敛性 …… 265
6.2　典型例题分析 …… 267
6.2.1　概念与计算题 …… 267
6.2.2　证明题 …… 273
6.3　练习题 …… 303
6.4　练习题答案或提示 …… 308

第二篇　数理统计

第 7 章　抽样分布 …… 315

7.1　内容提要 …… 315

7.1.1 基本概念 …… 315
7.1.2 三个重要分布 …… 316
7.1.3 抽样分布定理 …… 318
7.2 典型例题分析 …… 319
7.3 练习题 …… 330
7.4 练习题答案 …… 333

第8章 参数估计 …… 335

8.1 内容提要 …… 335
8.1.1 点估计的方法 …… 335
8.1.2 估计的标准 …… 336
8.1.3 区间估计 …… 337
8.2 典型例题分析 …… 339
8.3 练习题 …… 357
8.4 练习题答案 …… 362

第9章 假设检验 …… 364

9.1 内容提要 …… 364
9.1.1 假设检验的基本概念 …… 364
9.1.2 最大功效检验 …… 365
9.1.3 正态总体的期望与方差的假设检验 …… 366
9.1.4 广义似然比检验 …… 367
9.1.5 正态性检验 …… 367
9.1.6 分布的拟合优度检验 …… 368
9.1.7 齐一性检验 …… 368
9.1.8 独立性检验 …… 369
9.2 典型例题分析 …… 370
9.3 练习题 …… 390
9.4 练习题答案 …… 395

第10章 方差分析 …… 397

10.1 内容提要 …… 397
10.1.1 单因素方差分析 …… 397
10.1.2 双因素方差分析 …… 398

10.2　典型例题分析 …… 402
10.3　练习题 …… 414
10.4　练习题答案 …… 418

第 11 章　回归分析 …… 419

11.1　内容提要 …… 419
11.1.1　一元线性回归 …… 419
11.1.2　多元线性回归 …… 421
11.2　典型例题分析 …… 423
11.3　练习题 …… 441
11.4　练习题答案 …… 443

附表 1　标准正态分布函数值表 …… 445

附表 2　t 分布上侧分位数表 …… 447

附表 3　χ^2 分布上侧分位数表 …… 449

附表 4　F 分布上侧分位数表 …… 453

附表 5　相关系数检验的临界值表 …… 465

附录 6　柯尔莫哥洛夫检验的临界值表 …… 466

附录 7　斯米尔诺夫检验的临界值 α 表 …… 468

参考文献 …… 470

第一篇　概 率 论

第1章 概率论的基本概念

1.1 内容提要

1.1.1 随机事件及其运算

1. 随机试验、样本点和样本空间

(1) 随机试验

随机试验具有如下特征.

1° 可重复性:在相同的条件下,可以重复进行.

2° 一次试验结果的随机性:在一次试验中可能出现这一结果,也可能出现那一结果,预先无法断定.

3° 全体结果的可知性:所有可能的结果预先是可知的.

通常用 E(可能带下标)表示随机试验.

(2) 样本点和样本空间

一随机试验 E 的每一个可能的(不可分解的)结果,称为 E 的样本点,记为 ω.

一试验 E 的所有样本点组成的集合,称为 E 的样本空间,记为 Ω.

2. 随机事件、基本事件、必然事件和不可能事件

对于一个随机试验,在一次试验中,可能发生也可能不发生的事情称为该试验的随机事件,记为 $A,B\cdots$(可以带下标).

通常一随机试验的随机事件可以表示为它的一些样本点组成的集合.对于一随机试验的一个随机事件,当且仅当它所包含的任一样本点在一次试验中出现,称它在这一次试验中出现.

只包含一个样本点的事件称为基本事件.

在任何一次试验中都出现的事件,称为必然事件,它就是 Ω 所表示的事件,因而用 Ω 表

示必然事件.

在任何一次试验中都不出现的事件,称为不可能事件,它就是$\varnothing$所表示的事件,因而用$\varnothing$表示不可能事件.

3. 事件之间的关系和运算

(1) 包含关系

设A,B为二事件 ,若"A发生必有B发生",称"A包含在B中"或"B包含A",记为$A\subset B$或$B\supset A$.

$A\subset B\Leftrightarrow$任意$\omega\in A$必有$\omega\in B$,见图1-1.

(2) 相等关系

设A,B为二事件,若$A\subset B,B\subset A$,称"A,B相等",记为$A=B$.

$A=B\Leftrightarrow A\subset B$且$B\subset A$,见图1-2.

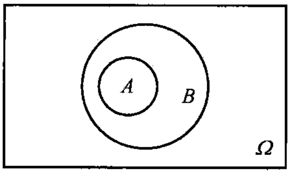

图 1-1

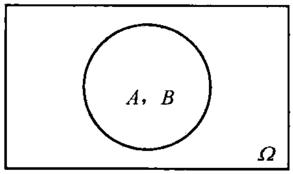

图 1-2

(3) 事件的并

设A,B为二事件,称事件"A,B至少一个发生(A发生或B发生)"为A,B的并(或和),记为$A\cup B$.

$A\cup B=\{\omega|\omega\in A$或$\omega\in B\}$,见图1-3.

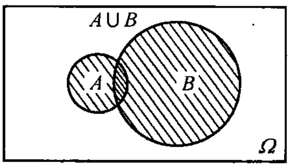

图 1-3

(4) 事件的交

设A,B为二事件,称事件"A,B同时发生(A发生而且B发生)"为A,B的交(或积),记为$A\cap B$或AB.

$AB=\{\omega|\omega\in A$且$\omega\in B\}$,见图1-4.

(5) 事件的差

设A,B为二事件,称事件"A发生而B不发生"为A减去B的差,记为$A-B$.

$A-B=\{\omega|\omega\in A$ 而 $\omega\notin B\}$，见图 1-5.

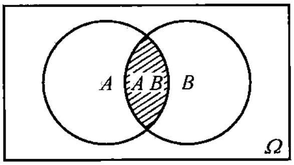

图 1-4

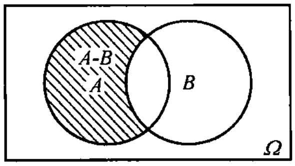

图 1-5

(6) 互不相容关系

设 A,B 为二事件，若"A,B 不能同时发生"，称 A,B 互不相容或互斥，记为 $AB=\varnothing$.

A,B 互不相容$\Leftrightarrow AB=\varnothing$，见图 1-6.

(7) 事件的余和对立事件

设 A 为一事件，称事件"A 不发生"为 A 的余事件或 A 的对立事件，记为 $\overline{A}$. $\overline{A}=\Omega-A$，见图 1-7.

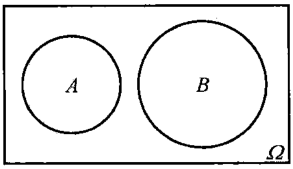

图 1-6

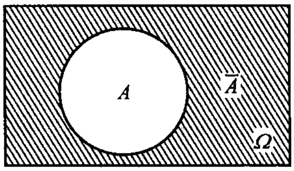

图 1-7

4. 事件的运算法则

1° 交换律：$A\cup B=B\cup A, AB=BA$.

2° 结合律：$A\cup B\cup C=(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), ABC=(AB)C=A(BC)$.

3° 分配律：$(A\cup B)C=AC\cup BC, (A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

4° 对偶律：$\overline{\bigcup_k A_k}=\bigcap_k \overline{A}_k, \overline{\bigcup_k A_k}=\bigcup_k \overline{A}_k$.

下列关系和运算要熟记：

$\varnothing\subset A\subset\Omega; A\subset A\cup B; B\subset A\cup B; A\subset B\Rightarrow A\cup B=B;$

$AB\subset A; AB\subset B; A\subset B\Rightarrow AB=A; A-B\subset A; A\subset B\Rightarrow A-B=\varnothing;$

$\varnothing A=\varnothing; \overline{\Omega}=\varnothing; \overline{\varnothing}=\Omega; A\subset B\Rightarrow\overline{A}\supset\overline{B}; A-B=A\overline{B}=A-AB;$

$A\cup B=A\cup\overline{A}B; A\cup B\cup C=A\cup\overline{A}B\cup\overline{A}\,\overline{B}C.$

1.1.2 事件的概率及其性质

1. 事件概率的定义

(1) 古典概型

满足下列条件的随机试验,称为古典概型.

1° 有限性:样本点的总数是有限的.

2° 等可能性:所有基本事件是等可能的.

① 概率的定义　设 E 为古典概型,样本空间为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$,$A$ 是 E 的一个事件,$A=\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_r}\}$,定义事件 A 的概率

$$P(A)=\frac{r}{n}=\frac{A\text{ 所包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}.$$

② 概率的性质　对于古典概型,事件的概率具有下列性质.

1° $P(A)\geqslant 0$.

2° $P(\Omega)=1$.

3° 有限可加性:若 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 互不相容,则 $P\left(\bigcup\limits_{k=1}^{m}A_k\right)=\sum\limits_{k=1}^{m}P(A_k)$.

(2) 几何概型

满足下列条件的随机试验,称为几何概型.

1° 有限性:样本空间是直线、二维或三维空间中度量(长度、面积或体积)有限的区间或区域.

2° 均匀性:样本点在样本空间上是均匀分布的(可通俗地称为是等可能的).

① 概率的定义　设 E 为几何概型,样本空间为 Ω,A 是 E 的一个事件,定义事件 A 的概率

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(\Omega)},$$

其中 $L(A)$,$L(\Omega)$分别是 A,Ω 的度量.

② 概率的性质　对于几何概型,事件的概率具有下列性质.

1° $P(A)\geqslant 0$.

2° $P(\Omega)=1$.

3° 可列可加性:若 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$互不相容,则 $P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}P(A_n)$.

(3) 事件的频率和性质以及概率的统计定义

① 事件的频率　将试验 E 重复独立地进行 n 次,若其中事件 A 发生了 n_A 次,则称 n_A 为 A 在这 n 次试验中出现的频数,称比值$\frac{n_A}{n}$为 A 在这 n 次试验中出现的频率,记为 $f_n(A)$,即 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$.

② 频率的性质　事件的频率有下列性质：

1° $f_n(A)\geqslant 0$.

2° $f_n(\Omega)=1$.

3° 若 $A_1,A_2,\cdots A_m$ 互不相容，则 $f_n\left(\bigcup_{k=1}^{m}A_k\right)=\sum_{k=1}^{m}f_n(A_k)$.

③ 概率的统计定义　当 n 充分大，频率 $f_n(A)$ 稳定在某个数 p 的附近摆动，定义事件 A 的概率 $P(A)=p$.

2. 概率的公理化定义及性质

σ-代数　设 Ω 是一非空集合，$\mathscr{F}$ 是 Ω 的一些子集组成的集合类，若 $\mathscr{F}$ 满足：

1° $\Omega\in\mathscr{F}$,

2° 若 $A\in\mathscr{F}$，则 $\overline{A}\in\mathscr{F}$,

3° 若 $A_n\in\mathscr{F}, n=1,2\cdots$，则 $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{F}$,

称 $\mathscr{F}$ 为 Ω 上的 σ-代数.

(1) 概率的公理化定义及概率空间

设随机试验 E 的样本空间为 Ω，$\mathscr{F}$ 是 Ω 上的 σ-代数，若对任一 $A\in\mathscr{F}$，有一实数与之对应，记为 $P(A)$，且满足以下条件.

1° $P(A)\geqslant 0$,

2° $P(\Omega)=1$,

3° 可列可加性：若 $A_1,A_2,\cdots A_n,\cdots$ 互不相交，则 $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)$,

称 A 为 E 的随机事件，$P(A)$ 为 A 的概率，并称 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为概率空间.

(2) 概率空间的性质

设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为一概率空间，则 P 具有下列性质.

1° $P(\varnothing)=0$.

2° 有限可加性：如果 $A_k\in\mathscr{F}, k=1,2,\cdots,n$，且 $A_iA_j=\varnothing, i\neq j$，则 $P\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)$.

3° 可减性：如果 $A,B\in\mathscr{F}$，且 $A\subset B$，则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$.

4° 对任意的 $A\in\mathscr{F}$，有 $P(A)\leqslant 1$.

5° 上、下连续性：如果 $\{A_n\}\subset\mathscr{F}$，且 $A_1\supset A_2\supset\cdots$，则 $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\lim_{n\to\infty}P(A_n)$；如果 $\{A_n\}\subset\mathscr{F}$，且 $A_1\subset A_2\subset\cdots$，则 $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\lim_{n\to\infty}P(A_n)$.

6° 一般加法公式：如果 $A_i\in\mathscr{F}, i=1,2,\cdots,n$，则 $P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j=2}^{n}P(A_iA_j)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$.

1.1.3 条件概率及条件概率空间

1. 条件概率的定义及性质

(1) 条件概率的定义

设$(\Omega,\mathscr{F},P)$为一已知概率空间,$B\in\mathscr{F}$,$P(B)>0$,则称

$$P(A|B)\overset{\triangle}{=}\frac{P(AB)}{P(B)},A\in\mathscr{F}$$

为在事件 B 发生的条件下 A 的条件概率.

(2) 条件概率的性质

条件概率满足:

1° $P(A|B)\geqslant 0,A\in\mathscr{F}$.

2° $P(\Omega|B)=1$.

3° 若 $A_n\in\mathscr{F},n=1,2,\cdots,A_iA_j=\varnothing,i\neq j$,则 $P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\mid B\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}P(A_n\mid B)$.

可见,条件概率具有上述无条件概率的其他性质 1°～6°.

(3) 条件概率空间的定义

设$(\Omega,\mathscr{F},P)$为一已知概率空间,$B\in\mathscr{F}$,$P(B)>0$,记

$$P_B(A)=P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)},A\in\mathscr{F},$$

称$(\Omega,\mathscr{F},P_B)$为$(\Omega,\mathscr{F},P)$在事件 B 下的条件概率空间.

(4) 条件概率空间的性质

设$(\Omega,\mathscr{F},P_B)$为$(\Omega,\mathscr{F},P)$在事件 B 下的条件概率空间. 若记 $\nu(A)=P_B(A)$,$A\in\mathscr{F}$,又 $C\in\mathscr{F}$,且 $\nu(C)>0$,$(\Omega,\mathscr{F},\nu)$在事件 C 下的条件概率空间为$(\Omega,\mathscr{F},\nu_C)$,则有

$$\nu_C(A)=P_{BC}(A)=P(A|BC),A\in\mathscr{F}.$$

2. 关于条件概率的三个定理

(1) 乘法公式

若 $P(A)>0$,则

$$P(AB)=P(A)P(B|A).$$

推广　若 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$,则

$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$.

(2) 全概率公式

设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 满足:

1° $B_iB_j=\varnothing,i\neq j$,

2° $\bigcup\limits_{k=1}^{n}B_k=\Omega$,

则对任意 A,有

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k) P(A \mid B_k).$$

(3) 贝叶斯公式

设 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 满足:

1° $B_i B_j = \varnothing, i \neq j$,

2° $\bigcup_{k=1}^{n} B_k = \Omega$,

则对任意 A,如果 $P(A) > 0$,有

$$P(B_j \mid A) = \frac{P(B_j) P(A \mid B_j)}{\sum_{k=1}^{n} P(B_k) P(A \mid B_k)}, j = 1, 2, \cdots, n.$$

1.1.4　事件的独立性

1. 二事件的独立性

定义 1　设 A, B 为二事件,若 $P(AB) = P(A)P(B)$,则称 A, B 相互独立.

性质 1　若 $P(A) > 0$,则 A, B 独立的充要条件是 $P(B|A) = P(B)$.

定理 1　若 A, B 独立,则 A 与 $\overline{B}$,$\overline{A}$ 与 B,$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 均独立.

2. 三个或三个以上事件的独立性

设 A, B, C 为三事件,若满足:

$$P(AB) = P(A)P(B),$$
$$P(AC) = P(A)P(C),$$
$$P(BC) = P(B)P(C),$$
$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C),$$

则称 A, B, C 相互独立,简称 A, B, C 独立.

若只满足上面的前三个式子,称 A, B, C 两两独立. A, B, C 两两独立,未必相互独立.

一般地,如果 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$,满足

$$P(A_i A_j) = P(A_i) P(A_j), 1 \leqslant i < j \leqslant n,$$
$$P(A_i A_j A_k) = P(A_i) P(A_j) P(A_k), 1 \leqslant i < j < k \leqslant n,$$
$$\cdots\cdots$$
$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1) P(A_2) \cdots P(A_n),$$

则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立,简称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 独立.

3. 独立事件类和事件类的独立性

(1) 独立事件类

设 T 是任一下标集,$A_t (t \in T)$ 是 $\mathscr{F}$ 中的事件类,若对 T 的任一有限子集 $\{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$,